

This volume was digitized through a
collaborative effort by/ este fondo fue
digitalizado a través de un acuerdo
entre:

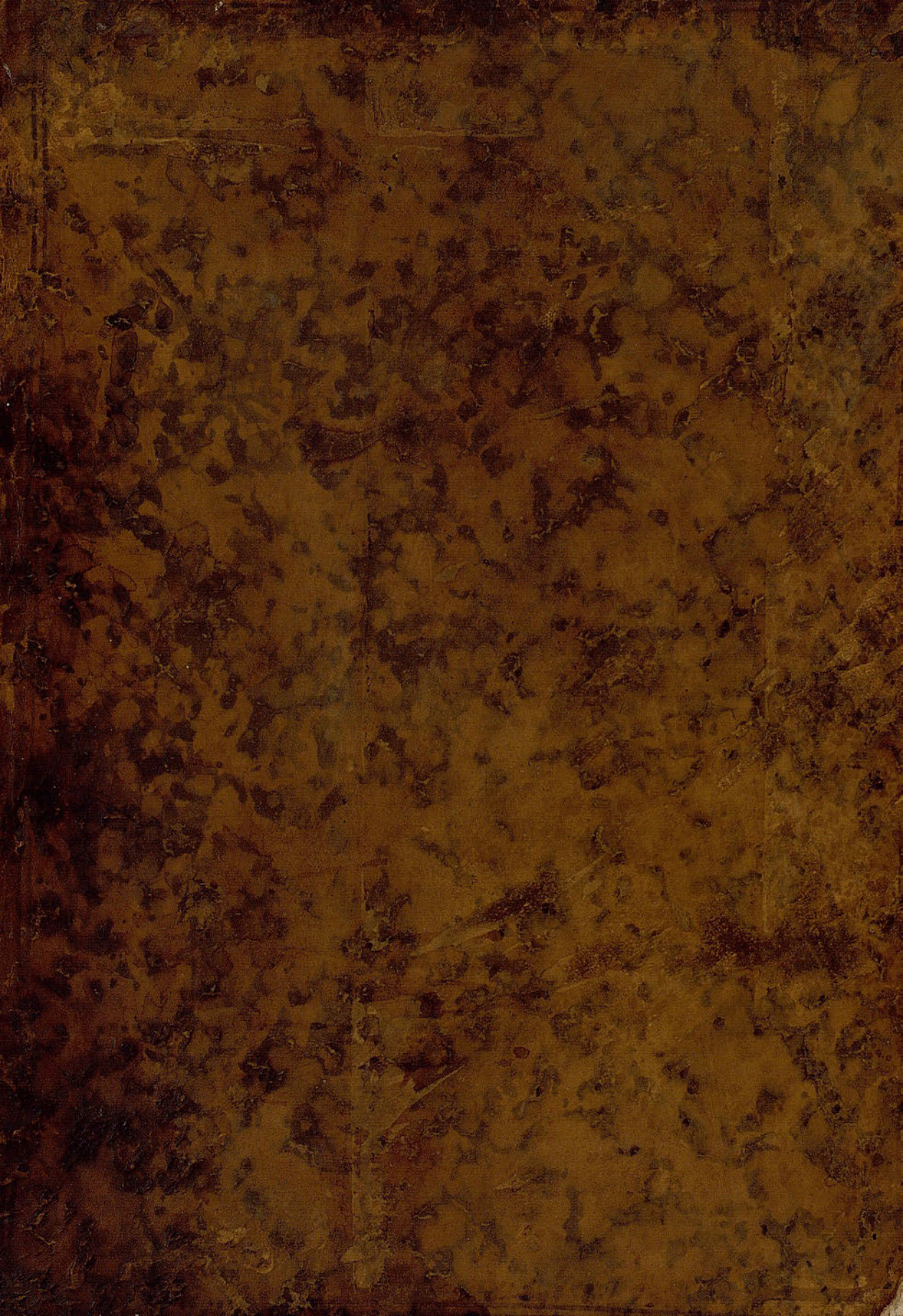
Biblioteca General de la
Universidad de Sevilla

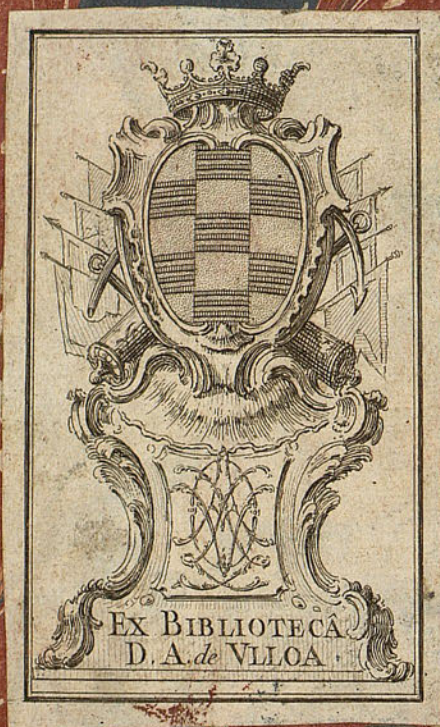
www.us.es

and/y

Joseph P. Healey Library at the
University of Massachusetts Boston
www.umb.edu









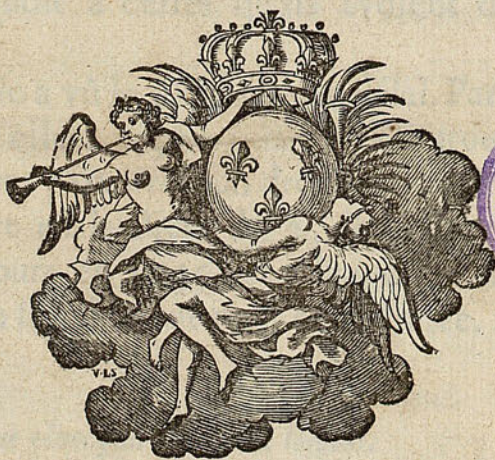
RM 77

123

PIECES
QUI ONT REMPORTÉ
LE PRIX
DE L'ACADÉMIE ROYALE
DES SCIENCES,
EN M. D C C. XLVII.

*Sur la meilleure maniere de trouver l'heure
en Mer.*

Selon la fondation faite par feu M. ROUILLE' DE
MESLAY, ancien Conseiller au Parlement.



A PARIS, rue S. Jacques.
Chez GABR. MARTIN, J. B. COIGNARD,
& H. L. GUERIN, Libraires.

M. D C C. L.

P L E C E

QUI ONT REMPORTÉ

LE PRIX

DE L'ACADEMIE ROYALE
DES SCIENCES.

AN M D C C L V I I

Sur le calcul de la durée de la vie humaine
ou de la mort.

Par M. DE LA PIERRE, Secrétaire de l'Académie.
Paris, chez la Citoyenne Lesclapart, Palais National, ci-devant des Arts, ci-devant de la Liberté, ci-devant de la Nation.



A Paris, chez la Citoyenne Lesclapart,
Citoyenne Martin, à la Citoyenne
A. L. L. Guerin, Libraire.

M D C C L V I I



AVERTISSEMENT.

L'ACADEMIE avoit proposé pour sujet du Prix de 1745, *La meilleure maniere de trouver l'heure en Mer, par observation, soit dans le jour, soit dans le crépuscule, & surtout la nuit, quand on ne voit pas l'horison.* Mais n'étant pas entierement satisfaite des Pieces qui lui avoient été adressées, elle n'en couronna aucune, & proposa une seconde fois le même sujet pour cette année, avec un Prix double, c'est-à-dire, de 4000 liv. dans la vûe de donner aux Scavans le loisir de composer de nouvelles Pieces, ou de suppléer ce qui manquoit à celles qu'ils avoient déjà envoyées.

L'Académie a vû le succès de ce délai. Parmi les Pieces qu'elle a reçues, il s'en est trouvé deux qui lui ont paru avoir un droit égal au Prix.

La premiere est la Piece N° 2, de celles qui avoient concouru en 1745, & à laquelle l'Auteur a joint un supplément pour cette année. La Devise est :

Et quandoque olitor fuit opportuna locutus.

Elle est de M. Daniel Bernoulli, Professeur en Medecine en l'Université de Bâle.



La deuxieme est N° 2 , de 1747. Elle a pour Devise :

Arbor non uno sternitur ictu.

L'Auteur ne s'est pas encore fait connoître.

Quoique ces deux Pieces soient remplies de recherches très-curieuses , & de vûes , qui , perfectionnées , pourroient être utiles à la Navigation , cependant l'Académie se croit obligée de renouveler la déclaration qu'elle a faite en diverses autres occasions , qu'en couronnant les Pieces qui méritent le Prix , elle ne pretend pas adopter généralement tout ce qui y est contenu.

Dans le nombre des autres Pieces qui ont concouru , il y en a trois dans lesquelles on a trouvé des machines ou des vûes utiles , & qui ont à cet égard , mérité les éloges de l'Académie.

La premiere est N° 4 , de 1745 , avec son addition. La Devise est :

Nihil umquam invenietur , si contenti fuerimus inventis.

La deuxieme est N° 5 , de 1745 , qui a pour Devise :

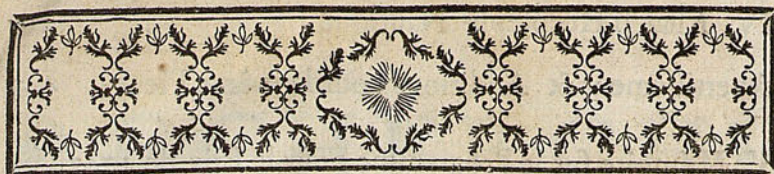
Nautam ne pigeat cæli convexa tueri.

Et la troisieme est N° 1 , de 1747 , dont la Devise est :

Semper id melius quod optimo propinquius est.

L'Académie propose pour le sujet du Prix qu'elle donnera à Pâques 1749 :

La meilleure maniere de déterminer en mer les Courans ; leur force & leur direction.



CATALOGUE

des Ouvrages contenus dans ce Recueil.

PIECES de 1745 & 1747.

I. Recherches Mécaniques & Astronomiques sur la question proposée par l'Académie des Sciences pour l'Année 1745. sur la meilleure maniere de trouver l'heure en mer par observation, soit dans le jour, soit dans les crépuscules, & sur-tout la nuit quand on ne voit pas l'horison : par M. DANIEL BERNOULLI, des Académies des Sciences de Paris, de Londres, de Petersbourg, de Boulogne, &c. & Professeur de Medecine en l'université de Bâle. page 1

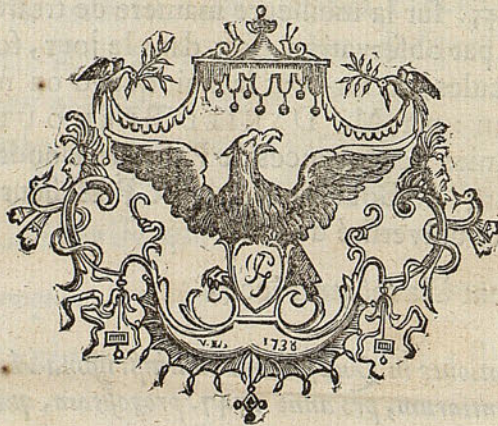
Supplément à la même Piece, 79

II. *Meditationes in Quæstionem ab illustrissima Academia Paris. Scientiarum, pro anno 1747. propositam, quibusnam observationibus mari, tam interdiu quàm noctu, itemque durante crepusculo verum temporis momentum commodissimè & certissimè determinari queat.* 111

III. De la meilleure maniere de trouver l'heure en mer ; par observation, soit dans le jour, soit dans les crépuscules, & sur-tout dans la nuit quand on ne voit pas l'horison, 169

Corrections & Additions à la même Piece, 202

IV. Essai d'Horolepse Nautique ,	217
Avertissement & Additions pour la même Piece ,	443
V. Mémoire sur le Programme pour le Prix de 1747. La meilleure maniere de trouver l'heure en mer , par ob- servation , soit dans le jour , soit dans les crépuscules , & sur-tout la nuit quand on ne voit pas l'Horison ,	457
Additions à la même Piece ,	511



RECHERCHES MECHANIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

Sur la Question proposée par l'Académie Royale
des Sciences pour l'année 1745.

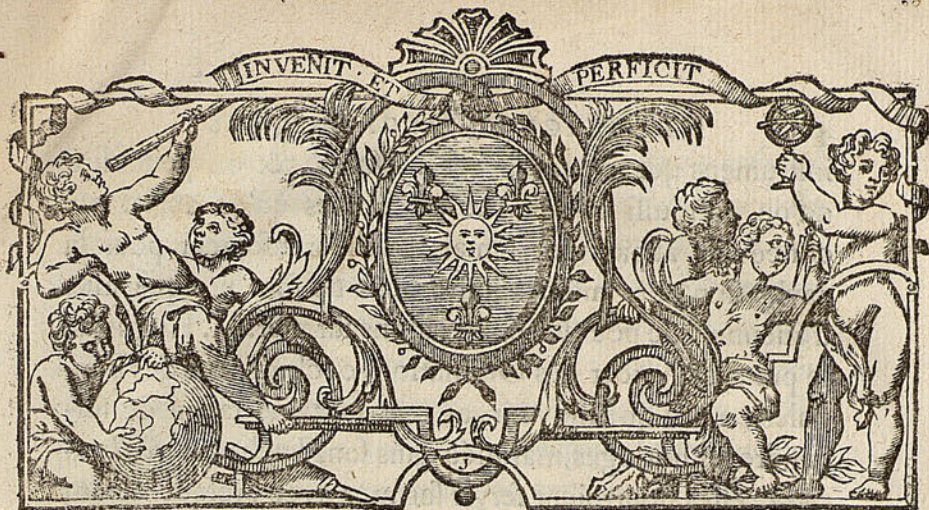
*La meilleure maniere de trouver l'heure en Mer,
par observation, soit dans le jour, soit dans
les crépuscules, & sur-tout la nuit, quand on
ne voit pas l'horison.*

Et quandoque Olor fuit opportuna locutus.

Par M. DANIEL BERNOULLI, des Acad. des Sciences
de Paris, de Londres, de Petersbourg, de Bologne, &c.
& Professeur de Médecine en l'Université de Basle.

Prix. 1745.

A



RECHERCHES MÉCANIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

Sur la Question proposée par l'Académie
Royale des Sciences, pour l'année 1745.

*La meilleure maniere de trouver l'heure en Mer, par
observation, soit dans le jour, soit dans les crépuscules, &
sur-tout la nuit, quand on ne voit pas l'horison.*

Et quandoque Olitor fuit opportuna locutus.

AVANT-PROPOS.



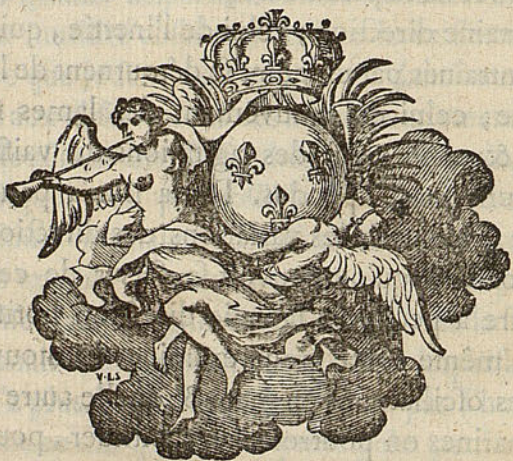
Le plus grand nombre des Observations Af-
tronomiques, demandent une exacte mesure
du tems & des hauteurs verticales des Astres :
c'est pourquoi on s'est appliqué avec un soin
extreme à mettre dans la dernière perfection possible les

Aij

instrumens qui servent à ces mesures , & on peut dire qu'on y a réussi au-delà des espérances qu'on auroit osé concevoir auparavant : mais malheureusement pour la navigation , ces mêmes instrumens ne sont presque plus d'aucun usage pour les observations sur mer. M. Huguens, le premier Auteur des Oscillations cycloïdiques des Pendules , a cru que moyennant une certaine façon de suspendre les horloges, marquée dans son *Horologium oscillatorium* , elles pourroient servir sur mer avec presque autant de justesse que sur terre : mais quand il n'auroit point été réfuté par l'expérience , la seule théorie auroit suffi pour démontrer la grande imperfection des Pendules en mer , & même leur inutilité absolue , lorsque le vaisseau seroit fort agité ; ce que je ferai voir en passant dans mon Mémoire. Quant aux observations des hauteurs apparentes des astres , elles souffrent des difficultés pour le moins aussi grandes , puisqu'il n'est pas possible de connoître exactement la direction verticale ou horisontale. On a tâché de remédier à ce terrible inconvénient , en prenant pour la direction horisontale la ligne visuelle , qui rase la surface de la mer : mais cet expédient , déjà fort imparfait par lui-même , n'a plus lieu lorsqu'on ne voit pas l'horison ; c'est cependant ce cas qui fait la principale partie de la question proposée par l'Académie Royale des Sciences , pour l'année 1745 , & conçue en ces termes : *Donner la meilleure maniere de trouver l'heure en mer , par observation , soit dans le jour , soit dans les crépuscules , & sur-tout la nuit , quand on ne voit pas l'horison.* Il me semble donc que la question de l'Académie revient principalement , sinon uniquement à celle-ci : Quelle seroit la meilleure maniere de connoître en mer la direction horisontale la nuit , quand on ne voit pas l'horison. De cette question dépend absolument la mesure des hauteurs verticales ; & de celle-

ci, la maniere de trouver l'heure en mer. Je ne prétend pas de pouvoir satisfaire à cette question fondamentale avec une entière précision, & la chose sera sans doute impossible : la meilleure méthode sera la moins imparfaite. Ce que je puis assurer par avance, est que j'ai examiné cet article avec toute l'attention nécessaire, selon toutes les loix de mécanique, sans lesquelles on auroit grand tort de hasarder aucune conjecture, quelque fondée qu'elle paroisse ; j'en parle par expérience, étant revenu de plusieurs idées que je m'étois formées là-dessus autrefois, & que je croyois assez bonnes alors. J'ai examiné l'effet de la pesanteur qui tend à donner aux corps une certaine direction ; celui de l'inertie, qui fait que les corps entraînés par un point se détournent de leur position naturelle ; celui du mouvement des lames sur les vaisseaux ; & enfin celui des agitations du vaisseau sur les corps qui y sont suspendus. De-là il m'a paru qu'il étoit possible d'assujettir les variations des directions à de certaines loix, & qu'on pouvoit se servir de ces loix pour connoître à peu près la vraie direction horizontale. J'ai tenu la même route pour examiner le mouvement des horloges oscillatoires en mer, & quelle autre sorte d'horloges marines on pourroit leur substituer, pour connoître la mesure du tems le plus exactement qu'il est possible, puisque sans cette connoissance, notre question seroit tout-à-fait inutile, & que souvent il faut connoître un intervalle de tems pour pouvoir trouver l'heure. Ce n'est qu'après ces recherches préliminaires, que je traiterai des moyens que l'Astronomie nous fournit pour connoître l'heure. Je diviserai donc mon Mémoire en quatre chapitres. Le premier contiendra les recherches Mécaniques qui conviennent à notre sujet. Le second traitera de la perfection des Horloges & des Montres en général, &

des Horloges marines en particulier. Dans le troisieme , j'examinerai jusqu'où on peut aller dans l'établissement d'une direction horifontale , sans le secours de l'horifon visible. Et enfin dans le quatrieme , je donnerai pour les diverses circonstances où l'on peut se trouver , plus ou moins favorables , les meilleures manieres pour trouver l'heure , moyennant le secours des instrumens dont j'aurai donné la description.



CHAPITRE PREMIER.

Contenant les Recherches préliminaires de Méchanique.

§. I.

SI le vaisseau alloit sur mer avec une vitesse uniforme & d'un mouvement parallele, ce mouvement ne pourroit faire aucun effet, & tout resteroit dans le même état que si le vaisseau étoit en repos; un pendule feroit ses oscillations avec la même régularité que sur terre; un corps attaché & suspendu par un fil, retiendrait constamment ce fil dans sa situation verticale, & toutes les observations pourroient se faire avec la même facilité & autant de précision que par terre; mais lorsque le vaisseau est agité, tout cela change de face: ce n'est donc point le sillage qu'il faut considérer ici, mais simplement les agitations & les balancemens du vaisseau; c'est pourquoi nous pourrons considérer le vaisseau comme flottant, mais agité par les lames & par les vents.

§. II.

TOUT corps flottant dans un fluide en repos, a une certaine situation d'équilibre, excepté les corps sphériques & homogènes: s'il est détourné de sa situation naturelle, il la reprendra aussi-tôt qu'il sera libre de le faire; mais en le faisant il fera plusieurs allées & venues; il fera des balancemens de même qu'un pendule simple; & il continueroit ses balancemens sans fin, sans plusieurs

résistances qui les diminuent peu à peu ; cependant les grandes & les petites agitations se feront à peu près dans le même tems. M. Euler a proposé le Problème de trouver la longueur du pendule simple isochrone, avec les balancemens d'un corps flottant quelconque : & quoique ce problème soit extrêmement embrouillé, les solutions qu'on en a données se sont parfaitement rencontrées. Je ne sçauois entrer ici dans le détail de ces solutions : il me suffira d'en faire remarquer quelques propriétés essentielles à notre sujet.

(a) Si le corps flottant est forcé de faire ses balancemens dans un plan donné, le pendule isochrone pour le même corps sera plus ou moins long, suivant le plan des balancemens : ainsi un vaisseau tanguant de la prouë à la poupe, ne fera pas ces balancemens dans le même tems que le même vaisseau roulant d'un bord à l'autre. On peut remarquer aussi, qu'un corps flottant peut être balancé en même tems dans plusieurs plans, & alors les premiers balancemens sont extrêmement irréguliers, mais ils deviennent bien-tôt réguliers, & se font ensuite tous avec harmonie, commençant & finissant chacun au même moment, & on peut encore déterminer la longueur du pendule simple isochrone, avec tous ces balancemens, composés après qu'ils sont devenus réguliers.

(b) Tous ces balancemens peuvent être réduits à deux classes, desquelles on sçait déterminer les conditions. Dans la premiere classe, le centre de gravité du corps flottant & balançant reste immobile : dans la seconde, le centre de gravité souffre des balancemens lui-même ; mais sans sortir de la verticale ; il ne fait que monter & descendre alternativement, & toujours verticalement : un vaisseau qui roule d'un bord à l'autre & également des deux côtés, conserve son centre de gravité au même point
à peu

à peu près : mais s'il étoit couché en même tems sur un de ses côtés , ou s'il tanguoit , son centre de gravité ne fera plus en repos : cependant il restera toujours dans la même ligne verticale.

(c) Les mêmes propriétés subsisteront , si au lieu des corps flottans on considéroit des corps mûs uniformément ; le sillage ne peut donc déranger sensiblement les balancemens du vaisseau.

(d) Les montées & descentes verticales du centre de gravité seront toujours fort petites par rapport aux excursions circulaires d'un point éloigné du centre de gravité , & d'ailleurs elles ne peuvent faire aucun effet sensible sur le corps suspendu dans le vaisseau.

§. I I I.

LE mouvement des lames est la première & principale cause des agitations du vaisseau ; les vents n'y concourent que très-peu , excepté les bouffées ; un vent fait & uniforme ne feroit que pencher le vaisseau , & ne l'agitéroit point , si la surface de la mer restoit unie. Les lames sont formées par des eaux qui montent & descendent alternativement , & ces balancemens des eaux se font suivant les loix des oscillations d'un pendule simple. Les eaux sont agitées jusqu'à une certaine profondeur , au-dessous de laquelle elles sont entièrement calmes. Une théorie que je me suis formée là-dessus , indique que la durée d'un ondoyement est isochrone avec l'oscillation d'un pendule simple , dont la longueur est à peu près égale à la profondeur des eaux agitées. Ainsi si la durée d'une lame , depuis sa plus grande élévation jusqu'à son plus grand abaissement étoit de dix secondes , on en pourroit conclurre que les eaux sont agitées jusqu'à la profondeur

d'environ 306 pieds. La hauteur des lames & leur distance mutuelle, paroît dépendre de la profondeur de la mer & de la force du vent, & leur direction pareillement de celle du vent ; d'où je conclus qu'en pleine mer, & lorsque les vents sont faits sans être trop pesans, les lames seront fort semblables, d'une grande étendue en longueur, & paralleles entre elles. Plus les lames, qui sont la principale cause des agitations du vaisseau, sont irrégulieres, plus le vaisseau sera tourmenté & agité irrégulièrement.

§. I V.

IL semble d'abord que les agitations du vaisseau ne peuvent qu'être extrêmement irrégulieres : un vaisseau peut être balancé en tout sens, mais sur-tout de prouë à pouppe, & d'un bord à l'autre ; outre ces balancemens, il en souffre encore par rapport à son centre de gravité, qui monte & descend alternativement ; il en souffre d'autres, qui sont relatifs au mouvement des lames. Chaque balancement influe l'un sur l'autre, ils se dérangent mutuellement ; chacun peut finir & recommencer brusquement.

Nous voyons arriver tout cela dans les premieres oscillations de plusieurs corps attachés & suspendus par le même fil : mais aussi toutes ces oscillations se composeront bien-tôt à un état de permanence & d'harmonie, & alors elles commenceront & finiront toutes au même instant, & ces oscillations composées, ne feront plus que des oscillations simples, uniformes & régulières. Je pousserai cet exemple plus loin. Prenez par les doigts un bout de fil chargé de poids quelconques, à des distances quelconques ; faites avec la main des excursions réciproques, en imitant le plus que vous pourrez le mouvement d'un pendule : & vous verrez tous ces corps enfilés, suivre

parfaitement le mouvement de la main, chacun commençant & finissant ses balancemens avec ceux de la main. On observera la même chose dans les balancemens de toutes les parties d'un système composé, quelque irréguliers qu'ils soient d'abord. Qu'on balance un seul bassin d'une grande balance, & on verra que l'autre bassin, le fléau & toutes les parties se mettront en mouvement, & se composeront à un simple balancement isochrone. Au reste cet état de permanence arrivera tantôt plutôt, tantôt plus tard, suivant les circonstances, & dans de certains systèmes, il n'arrive que très-difficilement.

§. V.

Ces considérations m'ont conduit à ce grand principe, qui est, que dans tout système composé de tant de parties qu'on voudra, agissant toutes les unes sur les autres, si chaque partie est agitée par des mouvemens oscillatoires réciproques, quelque différentes que soient d'abord ces oscillations entre elles, tous ces mouvemens extrêmement embrouillés, tendront bien vite à un mouvement régulier & permanent, auquel étant parvenus, toutes les oscillations commenceront leurs allées & venues au même instant; les unes seront accélérées, & les autres retardées, jusqu'à ce que cela arrive. Mais comme tout mouvement finit bien-tôt par plusieurs obstacles qu'il rencontre, & qu'il pourroit finir avant que cet état de permanence soit sensible, il faut alors supposer une cause qui entretienne le mouvement, & la supposer constante, uniforme & permanente.

§. V I.

Je ne sçaurois exprimer assez l'utilité de ce principe

dans la Physique mécanique ; la nature ne s'en écarte jamais, elle produit souvent des effets sensibles par des tremoussemens insensibles. Sur ce principe, j'ai réduit au calcul, des phénomènes sur les sons, qui pourroient peut-être paroître inexplicables. Les propriétés principales de la lumière, doivent se déduire de ce principe. Le calcul de tous les mouvemens sensibles, qu'on peut rapporter à cette classe, s'accorde toujours merveilleusement avec l'expérience. Sur ces réflexions, je n'ai plus hésité d'employer ce même principe pour expliquer en gros la nature des agitations d'un vaisseau en mer, & pour en tirer tout le fruit qu'il seroit possible, tant pour la perfection & l'usage des Horloges marines, que pour la manière de connoître la direction horizontale sur mer.

§. VII.

IL est certain que si les lames étoient des sillons d'une grande étendue en longueur, paralleles & parfaitement égaux, si le vaisseau conservoit constamment sa vitesse & sa route, si le vent & la manœuvre restoient parfaitement les mêmes, il est certain, dis-je, que les agitations du vaisseau seroient tout-à-fait régulières, uniformes, & surtout isochrones avec les balancemens des lames ; quand même le vaisseau seroit agité irrégulièrement, il se remettrait bien-tôt dans cet état. J'avoue que ces suppositions sont un peu libres : mais elles ne le sont pas tant qu'on pourroit le croire, & j'en parle par ma propre expérience ; il suffit qu'on se trouve souvent dans le cas de ces suppositions, & pendant des intervalles de tems considérables, & je demande qu'on les saisisse pour faire ses observations. On y peut aussi contribuer beaucoup par la manœuvre assez connue. Dans cet état d'uniformité & de régularité,

le vaisseau peut souffrir plusieurs sortes d'agitations, mais qui feront toutes harmonieuses; & en même tems tout ce qui est mobile dans le vaisseau fera des allées & venues correspondantes. Des fluides dans des vases, d'autres dans des tuyaux communiquans; des pendules simples ou composés, quelque inégaux qu'ils soient, & dans quelque plan qu'ils puissent balancer des lames à ressort qui se courberoient, & tel autre sorte de mouvement qu'on puisse s'imaginer: on y remarquera un accord d'autant plus parfait, que nos suppositions seront plus vraies. Tous ces mouvemens peuvent être extrêmement inégaux en grandeur absolue: mais ils se feront toujours avec une proportion constante. Au même instant qu'un pendule aura fait le tiers ou le quart de sa digression totale, tous les autres pendules se trouveront dans le même cas, quoique les digressions angulaires de tous ces pendules soient fort inégales. Un pendule qui feroit naturellement ses oscillations dans le même tems que le vaisseau fait ses agitations, fera remarqué faire des mouvemens exorbitans, pendant qu'un autre n'en fera que de très-médiocres. Si le vaisseau faisoit ses agitations chacune pendant deux secondes, un pendule simple de 12 pieds fera extrêmement jetté de côté & d'autre, par les plus petites agitations du vaisseau, pendant que les autres pendules simples n'auront qu'un très-petit mouvement, tant ceux qui sont plus longs, que ceux qui sont plus courts: une horloge qui battroit à chaque double seconde, s'arrêtera tout aussi-tôt, pendant qu'une autre continuera sa marche. Ces considérations si essentielles à notre sujet, m'engagent à entrer dans quelque détail sur cette matiere, quoique peut-être ennuyant; je le ferai avec toute la brièveté qui me sera possible.

§. VIII.

SOIT A un point fixe, (*Fig. 1.*) M & m des corps attachés au fil vertical Am , & qu'on suppose la masse du corps M infinie par rapport à l'autre masse m ; cette supposition convient à notre sujet, & elle abrège les calculs & les expressions. Il s'agit de trouver quel sera le mouvement du corps m , lorsque le système sera balancé.

Il est clair d'abord que le corps supérieur M fera ses balancemens exactement, suivant les loix d'un pendule simple, à cause de sa masse infinie: mais le corps inférieur m pourra faire d'abord des mouvemens fort irréguliers, plus ou moins, suivant la première impression qu'on lui aura donnée; cependant cette irrégularité cessera bientôt, de même que dans une corde de musique, les premières vibrations ne peuvent qu'être extrêmement embrouillées, quoiqu'à en juger par leur son, il semble qu'elles se soient mises tout aussi-tôt à leur état naturel & permanent. Dans cet état de permanence, voici quelle sera la nature des oscillations du corps m , dans la supposition qu'on emploie ordinairement pour ces questions, que les oscillations puissent être censées infiniment petites.

(*a*) Soit la longueur du fil $AM = L$, celle du fil $Mm = l$, supposez le système dans la situation ABC ou $AB'C'$; prolongez AB ou AB' jusqu'en D ou D' ; je dis qu'on aura l'angle CBD ou $C'B'D' = \frac{l}{L-l} \times B A M$ ou $= \frac{l}{L-l} \times B' A M$. On peut donc déterminer un angle par l'autre, par le simple rapport des longueurs des fils.

(*b*) Plus la longueur l est petite, plus l'angle CBD fera petit aussi. Si les fils AM & Mm sont égaux, l'angle CBD deviendra infiniment plus grand que l'angle BAM ,

ou plutôt celui-ci infiniment plus petit que l'autre, puisque nous supposons l'un & l'autre fort petit ; & enfin si la longueur Mm est plus grande que la longueur AM , l'angle CBD deviendra négatif, & toujours plus grand que BAM . La seconde figure, marquée avec des lettres analogues, éclaircira la nature de ces oscillations.

§. I X.

CE que nous venons de dire doit être changé & étendu, pour pouvoir être appliqué à notre sujet, notre dessein étant de représenter par le point M un point fixe du vaisseau agité autour du point A , qui sera son centre de gravité ; & alors Mm fera un pendule suspendu dans le vaisseau : il convient donc de supposer le point M plus haut que le point A ; comme aussi les balancemens du vaisseau ne seront pas précisément de la même durée que feroient les oscillations naturelles d'un pendule de la longueur AM ; il faudra étendre l'hypothèse de la pesanteur naturelle à une pesanteur quelconque, pour pouvoir éga-
ler les balancemens du vaisseau, & les oscillations du pendule AM par rapport à leur durée. Supposons pour cet effet une verge AM (Fig. 3.) sans poids mobile autour du point A , & chargée à son extrémité d'une masse infinie M ; que cette masse soit animée par une pesanteur négative, qui agisse toujours parallèlement à la direction AM . Supposons encore un pendule Mm suspendu au point M , dont le poids m soit animé par la pesanteur naturelle parallèlement à la direction Mm . Si après cela la verge AM vient à balancer autour du point A , il est question de déterminer les balancemens du pendule Mm , après qu'ils seront devenus réguliers & correspondans à ceux de la verge AM . Voici donc ce qui doit arriver dans ces hypothèses.

(α) Concevons la verge dans la situation AB ou AB' , & le pendule en BC ou $B'C'$, & supposons premierement la pesanteur négative, qui anime la masse infinie M , précisément égale à la pesanteur naturelle. Soit encore $AM = L$, & $Mm = l$, & tirez les verticales BE & $B'E'$, je dis que l'angle CBD fera $= \frac{2L-l}{L-l} \times BAM$, & l'angle $CBE = \frac{L}{L-l} \times BAM$; la même chose fera des angles du côté opposé.

(β) Si la pesanteur négative qui anime la masse M est à la pesanteur naturelle, comme p à 1, je dis qu'on aura l'angle $CBD = \frac{L+pL-pl}{L-pl} \times BAM$, & l'angle $CBE = \frac{pL}{L-pl} \times BAM$.

On peut abrégér ces formules & les rendre plus sensibles, en introduisant la longueur d'un pendule simple λ , isochrone, avec les agitations du vaisseau ou de la masse M : on aura alors cette analogie; $p:1 = L:\lambda$, & par conséquent $p = \frac{L}{\lambda}$, & substituant cette valeur, on aura l'angle $CBD = \frac{\lambda+L-l}{\lambda-l} \times BAM$, & l'angle $CBE = \frac{L}{\lambda-l} \times BAM$.

(γ) Cette dernière expression marque, que l'angle que le fil du pendule fera avec la verticale est d'autant plus petit, que la distance AM est plus petite, que le pendule est plus court, & que le point de suspension M est balancé plus lentement. Donc si un pendule court est suspendu dans le vaisseau près de son centre de gravité, & que le vaisseau soit agité fort lentement, ce pendule ne s'écartera jamais sensiblement de la verticale; & moins on aura satisfait à ces conditions, plus le pendule sera jetté de côté & d'autre, par les agitations du vaisseau. Un pendule infiniment long conserveroit sa position verticale, malgré
les

les balancemens finis du point de suspension : mais on ne peut pas faire sur mer , que la longueur l soit beaucoup plus grande que λ ; ainsi cette dernière remarque ne seroit pas dans sa place , par rapport au but que je me propose ; mais comme la première remarque peut nous être utile , je vais l'éclaircir par deux exemples opposés.

I. Supposons dans un vaisseau un pendule d'un pied , suspendu un pied au-dessus du centre de gravité du vaisseau , & que ce vaisseau emploie quatre secondes à chaque balancement , que nous supposerons de 20 degrés , ou dix degrés de chaque côté , nous aurons $L = l = 1$; $\lambda = 49$; le plus grand angle BAM de dix degrés , & cela donne le plus grand angle $CBE = \frac{1}{48}$ degré , ou d'une minute & 15 secondes.

II. Supposons à présent que tout le reste étant égal , le pendule soit long de 30 pieds , & suspendu 20 pieds plus haut que le centre de gravité du vaisseau , & nous trouverons que la plus grande digression du pendule sera d'environ dix degrés & demi , & plus de cinquante fois plus grande que dans le premier cas. Cependant l'un & l'autre pendule feroit ses oscillations dans le même tems , & toujours avec les balancemens du vaisseau.

§. X.

LE précédent article sert à déterminer les balancemens d'un pendule simple , suspendu verticalement au-dessus du centre de gravité du vaisseau , pourvu que le vaisseau soit droit dans la position moyenne de ses balancemens. Mais si dans cette position moyenne le vaisseau étoit couché sur un de ses côtés , il faudra un peu changer les théoremes que nous venons d'indiquer.

Soit AM (*Fig 4.*) la situation d'équilibre d'une verge

Prix. 1745.

C

mobile autour du point A , & du point M soit suspendu un pendule simple Mm ; qu'on tire la verticale AF , & l'horizontale MF ; qu'on suppose ensuite le point M faire des oscillations réciproques BMB' ; que BC & $B'C'$ marquent les positions du pendule, le point M se trouvant en B & B' ; tirez les verticales BE & $B'E'$; je dis qu'en retenant toutes nos dénominations précédentes, on aura l'angle $CBE = \frac{AF}{AM} \times \frac{L}{L-l} \times BAM$. Il n'y a donc qu'à multiplier l'angle trouvé pour le premier cas, par le rapport du cosinus de l'angle de l'inclinaison du vaisseau, au sinus total, pour avoir ce même angle qui convienne au cas présent. Même la formule précédente sera générale, pourvu qu'on entende par L , non la distance AM , mais la hauteur AF , c'est-à-dire la hauteur verticale du point de suspension du pendule, par-dessus le centre de gravité du vaisseau. Il s'ensuit de-là, que plus le vaisseau fera couché sur un de ses côtés, mieux le pendule gardera sa situation verticale. Au reste, ces théorèmes supposent à la vérité, que les balancemens angulaires du point M soient fort petits; cependant ils pourront être considérablement grands, sans que nos théorèmes s'éloignent sensiblement de la vérité. Il est facile aussi de les confirmer par des expériences; puisque par le moyen d'un contre-poids, on pourra donner à la verge AM telle position d'équilibre qu'on voudra; on pourra ensuite suspendre du point M un pendule, & puis faire balancer le système, & on remarquera toujours entre les angles CBE & BAM , la relation que nous leur avons assignée, pourvu que les oscillations soient devenues harmonieuses, & elles ne tarderont gueres à le devenir.

§. XI.

Je serois trop prolix, si je voulois donner une

démonstration rigide de ces propositions : cependant pour en donner quelque idée, je m'attacherai, par exemple, à la Note (C) du §. IX. auquel répond la troisième Figure. Considérons donc que la masse M se trouvant en B , sa force accélératrice sera $= \frac{BM}{BA} \times p$, puisque le poids m infiniment plus petit, ne sauroit la déranger. Quant à la force accélératrice du petit poids m posé en C , le transport du point de suspension B ne sauroit la faire varier, parce que l'angle CBM est censé droit; ainsi sa force accélératrice sera simplement $= \frac{CE}{CB}$, & comme le corps en B doit arriver en M , dans le même tems que le petit corps en C arrive en m , il faut faire que les forces accélératrices $\frac{BM}{BA} \times p$, & $\frac{CE}{CB}$ soient proportionnelles aux espaces à parcourir, BM & Cm . De cette proportionnalité, on tirera $Cm = \frac{BA}{BA - CB \times p} \times BM$, & $CE = \frac{CB \times p}{BA - CB \times p} \times BM$, ou $\frac{CE}{CB} = \frac{BA \times p}{BA - CB \times p} \times \frac{BM}{BA}$, c'est-à-dire l'angle $CBE = \frac{BA \times p}{BA - CB \times p} \times BAM = \frac{pL}{L - pl} \times BAM$; tout comme nous avons trouvé dans l'endroit cité. On trouvera les autres démonstrations, pour peu qu'on y supplée.

§. XII.

Les propriétés que nous venons d'indiquer, ne serviront pas seulement pour déterminer les balancemens d'un pendule simple suspendu dans un vaisseau agité, mais encore pour en tirer plusieurs éclaircissemens sur le mouvement des pendules appliqués aux horloges, pour les employer sur mer avec plus de sûreté & plus de succès, s'il est encore possible de s'en servir; & s'il ne l'est pas, pour leur substituer d'autres horloges marines, dont la marche soit bien assurée. C'est dans cette vûe que je ferai encore

remarquer la proposition suivante, quoique connue de tout le monde.

§. X I I I.

TOUT corps suspendu & entraîné d'une façon quelconque par son centre de gravité, conserve constamment une position parallele, par rapport à toutes ses parties. Ainsi si le centre de gravité d'un corps quelconque est au point *B*, (*Fig 5.*) attaché à l'extrémité du fil *AB*, & que *CD* soit une ligne quelconque, passant par deux points donnés du corps; si l'on conçoit l'extrémité du fil *A* transportée d'un mouvement quelconque en *a*, & que par ce mouvement, la ligne *CBD* parvienne en *cbd*, ces deux lignes *CD* & *cd* feront toujours paralleles entre elles.

Avant que de finir ce Chapitre, je prierai encore le Lecteur de remarquer que dans les quatre premieres Figures, le point *m* peut être pris pour le centre d'oscillation d'un corps d'une étendue finie quelconque; la ligne *Mm* marquera toujours la distance entre le point de suspension & le centre d'oscillation. Cette vérité n'est pourtant pas claire par elle-même, quoique l'on suppose tous les theoremes ordinaires du centre d'oscillation; mais on peut la démontrer par de nouveaux principes, & elle ne subsiste, que lorsque le corps fait avec la ligne *Mm* un système roide, sans pouvoir tourner autour du point *m*, de sorte que tout le système fasse un même mouvement angulaire autour du point de suspension *M*.



CHAPITRE II.

Contenant quelques réflexions sur la meilleure maniere de mesurer sur mer le Tems absolu.

§. X I V.

C E qui m'engage à ces recherches, c'est que souvent on ne peut trouver l'heure sur mer, sans connoître de certains intervalles de tems. A quoi serviroit d'ailleurs le plus souvent, de connoître pour un moment l'heure par observation, si l'on ne pouvoit conserver cette connoissance par le moyen des horloges marines, pendant un certain tems? La question proposée par l'Académie seroit d'assez peu d'utilité, si l'on ne pouvoit rapporter l'heure trouvée à l'heure marquée par l'horloge, & c'est ce rapport qui la rend extrêmement intéressante. La mesure du tems absolu sur mer étant donc toujours si utile, & souvent si nécessaire pour la solution de notre question, j'ai cru de mon devoir d'apporter toute l'attention possible à cet article. Il y a une œconomie dans la marche des horloges, qu'on n'a pas encore développée, que je sçache, & qui est cependant, à mon avis, de grande conséquence pour la perfection des horloges en général: & ces remarques jointes à celles que nous fournira le précédent Chapitre, pourront, à ce que j'espere, nous mener plus loin qu'on n'a encore été sur ce sujet. Je partirai encore des premiers principes.

§. X V.

LES pendules mesurent le tems sur terre avec tant de

C iij



justesse, qu'on peut se passer aisément d'une plus grande perfection. Ce qui peut encore un peu déranger le mouvement égal des pendules, est l'inégalité du pendule, causée par les changemens du froid & du chaud, & puis l'inégalité des arcs décrits par le pendule. On pourroit éviter le premier inconvénient (qui est en même tems le seul dont on se mette encore en peine) de plusieurs façons, pourvu qu'on fit le pendule de deux métaux différens, qui s'allongent & se racourcissent inégalement, par des changemens égaux du froid & du chaud, & qu'on scût bien la proportion de ces allongemens & racourcissements d'un métal à l'autre. La meilleure maniere de trouver cette proportion, consiste dans les pendules mêmes. Par exemple, M. Graham a trouvé qu'un changement de froid répondant à 11 degrés sur son thermometre, faisoit accélérer ou retarder sa pendule de 6" pendant 24 heures, ce qui fait 0,06 lignes, sur 441 lignes; & s'il avoit fait les mêmes expériences sur des pendules faits d'autres métaux, il auroit pû trouver de cette façon, la proportion des allongemens de différens métaux, causés par la même augmentation de chaleur; & sachant cette proportion, je dis qu'on pourroit donner différentes constructions pour les pendules, telles que leurs oscillations ne se ressentent plus des changemens du froid & du chaud. Je me contenterai pour le présent, d'avoir indiqué ce remede, fort simple dans l'exécution, d'autant qu'une ample déduction pourroit me mener trop loin. Si les circonstances rendoient ces petites variations intéressantes, on pourra suppléer à ce défaut par un thermometre, après en avoir fait l'expérience de M. Graham, que je viens de citer: on pourra remarquer l'état du thermometre de deux heures en deux heures, & on en déduira facilement la petite correction qu'il convient de faire sur l'heure marquée

par l'horloge. C'est M. de Maupertuis qui nous a rapporté l'expérience de M. Graham, dans son excellent Ouvrage sur la Figure de la Terre, p. 165, Edit. de Paris; cependant on ne sçauoit encore en faire tout l'usage, sans une description plus exacte du thermometre dont s'est servi M. Graham. M. de Maupertuis dit simplement après M. Graham, que le thermometre étoit de mercure; que le degré de chaleur qui répond à l'eau bouillante, étoit marqué par 0; que lorsque ce thermometre étoit sur 138, la pendule accéléroit sur le tems moyen de 4' 4" par jour, & lorsqu'il étoit à 127 (degré de chaleur que Messieurs les Académiciens ont imité à Pello) la pendule n'accéléroit plus que de 3' 58" par jour, & qu'ainsi une différence de 11 degrés sur le thermometre, produisoit une différence de 6" par jour dans la marche de la pendule. Mais quels sont les degrés sur ce thermometre? c'est ce qui n'est point marqué. On peut cependant le déduire de ce que M. de Maupertuis marque aux pages 169 & 172, où il dit que le thermometre de M. Prins étoit sur 61, lorsque celui de M. Graham étoit sur 127. Or, le thermometre de M. Prins parcourt environ 180 degrés, depuis le terme de la congélation de l'eau de pluie, marqué 32, jusqu'au terme de l'eau bouillante, marqué par 212 dans l'état moyen du barometre (car on sçait que les différentes hauteurs du barometre font varier le degré de chaleur de l'eau bouillante). Donc 180 degrés du thermometre de M. Prins, valent 152 degrés environ, sur le thermometre dont s'est servi M. Graham, puisque 212—61, c'est-à-dire, 151 du premier thermometre, répondoient à 127 du second: il suit de-là, que le terme de la congélation de l'eau de pluie étoit marqué par 152 sur le thermometre dont se sont servis M. Graham, & ensuite Messieurs les Académiciens; d'où je conclus que ce

thermometre étoit construit & divisé suivant les regles de M. de l'Isle de Peterfbourg, qui commence par 0 depuis la chaleur de l'eau bouillante, & qui divise le volume du mercure qu'il occupe dans l'eau bouillante en 10000 parties, & qui a remarqué que le mercure se resserre de 152 parties, lorsqu'il est réduit au terme de la congélation de l'eau. Cet éclaircissement peut être de conséquence, pour tirer tout le fruit qu'on peut des importantes & très-exactes Observations faites par Messieurs les Académiciens au Cercle Polaire; c'est pourquoi je n'ai pas hésité de faire cette remarque en passant, d'autant qu'elle nous met en état de calculer jusqu'où peuvent aller les inégalités dans la marche des pendules, par les variations du thermometre. On a remarqué que le plus grand froid observé en Irlande, & le plus grand chaud observé au Pérou, fait une différence d'environ 83 degrés sur le thermometre de M. Prins, qui valent 70 degrés de celui de M. de l'Isle: cette différence de chaleur en peut produire une de 38" par jour sur le mouvement des pendules, & dans un même climat un peu Septentrional, où les variations du froid & du chaud sont plus grandes, les variations des pendules peuvent aller pour le moins jusqu'à 30" par jour, de l'été à l'hyver, & souvent jusqu'à 8" ou 10" dans un même jour. Ces grandes différences marquent combien on doit être attentif aux degrés du thermometre dans les observations exactes qu'on entreprend, comme M. de Maupertuis le remarque aussi, p. 167. On doit donc construire & diviser les thermometres avec une attention proportionnée, en remarquant que le degré de chaleur de l'eau bouillante n'est pas tout-à-fait fixe, mais qu'il dépend de la hauteur du barometre; que l'eau boit d'autant plus facilement, que la pression de l'atmosphère est moindre, & qu'un pouce de différence dans la hauteur du barometre,

fait

fait varier d'environ 3 degrés la chaleur de l'eau bouillante sur le thermometre de Fahrenheit, qui font environ deux degrés & demi sur le thermometre de M. de l'Isle. Ces précautions ne seront jamais entierement inutiles sur mer, & souvent elles seront très-utiles.

§. X V I.

D I S O N S aussi quelques mots sur l'inégalité dans la marche des pendules, causée par l'inégalité des arcs décrits par le pendule. Il y a ici deux forces à considérer; celle qui anime la pendule, & celle qui lui est opposée. La premiere consiste ou dans l'action d'un poids, ou dans celle d'un ressort: l'action d'un poids moteur ne sçauroit qu'être constamment la même sur terre, & est par conséquent beaucoup préférable à celle d'un ressort, qu'on n'emploie que dans les petites pendules; lors donc que l'horloge est animée par un poids moteur, il n'y a que l'inégalité des résistances qui puisse faire varier les arcs décrits par le pendule. On a douté autrefois, si les horloges accéléroient ou retardoient, en faisant décrire au pendule de plus grands arcs; & on peut voir sur cette question un Mémoire de M. Saurin, inferé dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, de l'année 1720: mais de la façon qu'on construit aujourd'hui les pendules, on ne peut plus douter là-dessus; & toutes les expériences font voir que les bonnes horloges en sont retardées. La Géometrie démontre, que plus les arcs circulaires sont grands, plus ils demandent de tems pour être décrits par un pendule libre; & les oscillations d'un pendule appliqué aux horloges bien construites, ne peuvent s'écarter assez de cette règle, pour faire un effet contraire. M. Huguens a introduit les oscillations cycloïdiques;

Prix. 1745.

D.

elles sont fort utiles dans les petites pendules, qui décrivent de grands arcs & fort inégaux, mais assez inutiles dans les horloges à secondes, dont les pendules ne décrivent que des arcs de 3 à 4 degrés : peut-être même que l'usage des lames cycloïdiques pourroit faire plus de mal que de bien, étant impossible de leur donner la juste figure, à cause qu'elle dépend de la juste grandeur des rayons oscilateurs, qui diffèrent extrêmement d'un point à l'autre, étant nul au sommet, & fort grand dans les points suivans. D'ailleurs ce bout de fil qu'on est obligé d'employer pour la suspension du pendule, est un grand inconvénient, à cause des allongemens & raccourcissens considérables qu'il souffre, outre que cette suspension est fort mauvaise par elle-même. La façon de M. Graham de suspendre les pendules, décrite par M. de Maupertuis, p. 164, est infiniment préférable. De-là je conclus, qu'il faut retenir les oscillations circulaires, mais fort petites, & prendre toutes les mesures possibles pour leur égalité & uniformité. Le Théoreme suivant nous fournira ensuite les corrections qu'il faudra employer, pour les observations qu'on prétend faire avec la dernière exactitude.

Théoreme. Pour trouver les différences de tems entre des oscillations circulaires inégales, soit la durée d'une oscillation tout-à-fait infiniment petite $= T$: le sinus total $= 1000000$; le petit sinus verse de la moitié de l'arc, décrit par le pendule $= b$, je dis que la durée de l'oscillation sera $= T + \frac{b}{8000000} T$.

Pour être donc tout-à-fait sûr de la mesure exacte du tems, on n'a qu'à observer exactement les arcs décrits par le pendule : il est vrai que ce Théoreme suppose que le tems d'une oscillation soit le même dans un pendule

détaché ou appliqué à une horloge, mais aussi cette supposition peut être admise sans peine aux bonnes horloges, ce que je vais confirmer par l'exemple qui suit.

Exemple I. Soit $T=1''$; que le pendule décrive premierement des arcs de $3^{\circ} 0'$, & ensuite des arcs de $4^{\circ} 20'$; c'est l'exemple que M. de Maupertuis rapporte p. 166, disant que les dernières oscillations retardoient sur les premières de $3''\frac{1}{2}$ ou $4''$ par jour. Notre Théoreme donne pour les premières $b=343$, & le tems d'une oscillation $1''$ & $\frac{343}{8000000}$ parties de seconde, & toutes ces parties donnent pendant 24 heures $3''\cdot 7$: pour les dernières oscillations, on a $b=715$, & alors la pendule fera retardée de $7''\cdot 7$ par jour; la différence de ces retardemens fait précisément $4''$ par jour; tout comme on a trouvé par l'expérience, dont on doit admirer la grande justesse. Cette conformité m'engage à ajouter encore un autre exemple, qui nous fournira une petite correction à faire sur le calcul d'une autre expérience, faite par Messieurs les Académiciens, pour déterminer l'accélération du pendule de Paris à Pello.

Exemple II. Messieurs les Académiciens ont établi par des observations faites avec la dernière précision, que de Paris à Pello, pendant une révolution des fixes, la pendule accéléroit de $59''\cdot 1$. Dans ces observations, on avoit eu soin d'entretenir jour & nuit une même température de l'air, tant à Pello qu'à Paris; on s'étoit servi de la même pendule; enfin toutes les circonstances étoient parfaitement les mêmes de part & d'autre, excepté celle-ci: A Paris les oscillations du pendule étoient $2^{\circ} 10'$ de chaque côté, & à Pello $2^{\circ} 5'$. (Voyez le livre de M. de Maupertuis, p. 170, 171 & 172.) Cette inégalité des arcs produit une retardation par jour de Pello à Paris de $0''\cdot 58$, en vertu de notre Théoreme, & cette quantité

doit être retranchée de $59''{,}1$, & on trouvera la vraie accélération de Paris à Pello, pendant une révolution des fixes, de $58''{,}52$. Je fais si grand cas de la merveilleuse précision de toutes ces observations, que je n'ai pas voulu supprimer cette remarque, qui auroit été ridicule sans cela : rien n'est trop petit, pourvu qu'il soit bien sûr.

§. X V I I.

APRÈS avoir fait voir de quelle façon on pourra subvenir aux petits défauts qui peuvent encore apporter quelque incertitude à la mesure du tems, je tâcherai de réduire toute l'œconomie des horloges à ses vrais principes, que je ne sçache pas avoir encore été développés : j'espère que les conséquences que j'en tirerai pour notre sujet, excuseront cette digression, sur une matiere si importante par elle-même.

Si le pendule n'étoit pas appliqué à l'horloge, ses oscillations diminueroient peu à peu, par deux raisons : premièrement, à cause du petit frottement du pendule contre le point de suspension ; & en second lieu, à cause de la résistance de l'air. La maniere avec laquelle M. Graham soutient les pendules, & que M. de Maupertuis décrit p. 164, rend le frottement tout-à-fait insensible, comme on peut le démontrer ; il n'y a donc alors que la simple résistance de l'air à considérer. Supposons l'arc entier décrit par le pendule $= 2A$, & le petit arc, insensible de diminution $= \alpha$, de sorte que l'arc de descente ayant été A , l'arc de montée soit $A - \alpha$; soit encore la longueur du pendule $= l$, la descente verticale du poids du pendule peut être censée, les oscillations étant petites, $= \frac{A^2}{2l}$, & la montée verticale suivante $= \frac{A(A - 2\alpha)}{2l}$, & la différence $= \frac{A\alpha}{l}$: nommons encore p le poids du

pendule, & nous aurons $\frac{A}{l} \alpha p$, pour mesure de la quantité de la perte à chaque oscillation, qui, dans toutes les occasions, doit être mesurée par le produit de la hauteur verticale par la masse. Lors donc que le même pendule est appliqué à l'horloge, cette perte est continuellement réparée par l'action du poids moteur : nommons ce poids P , & supposons qu'il descende à chaque vibration du pendule d'une quantité insensible ϵ ; il est certain que si le poids moteur entretient la pendule dans une marche uniforme, nous aurions, sans le frottement, $\epsilon P = \frac{A \alpha}{l} p$: mais ce frottement ne doit pas être négligé; il est même la cause principale de l'inégalité des balancemens du pendule, parce qu'il est inégal lui-même, principalement à cause de l'inégale ténacité de l'huile. Pour considérer donc l'effet du frottement entier de toutes les roues, nous supposerons qu'il soit en équilibre avec un poids F , appliqué au même point avec le poids moteur. Il est clair que la véritable force motrice sera $P - F$, & qu'une telle force motrice, sans le frottement, feroit le même effet que le poids moteur P avec le frottement : la vraie équation est donc celle-ci.

$$\epsilon (P - F) = \frac{A}{l} \alpha p.$$

Avant que de tirer de cette équation les nouvelles lumières qu'elle répand sur cette matière, il sera bon de dire un mot sur le petit arc de diminution, exprimé par α . Dans les pendules bien suspendues, il est certain que cette diminution provient, sinon pour le tout, du moins pour la plus grande partie, de la résistance de l'air; il dépend donc d'une infinité de circonstances, comme de la grandeur de la lentille, de sa pesanteur spécifique, de sa figure, &c. comme on le démontre dans la théorie des

résistances des fluides sur différens corps: mais si le pendule & l'air qui l'environne restent les mêmes, si la résistance de l'air est en raison quarrée des vitesses, comme elle l'est certainement à fort peu près, & que le corps décrive de petits arcs, on démontre alors que les diminutions insensibles α sont en raison quarrée des arcs A : nous poserons donc $\alpha = \frac{A A}{C C} \gamma$, en prenant pour C un arc arbitraire, & pour γ , la diminution qui répond à cet arc, & là-dessus nous aurons:

$$\mathcal{C}(P - F) = \frac{A^3}{C C l} \gamma p.$$

Si l'air qui environne le pendule étoit variable, on démontre que la quantité γ est proportionnelle à la densité de l'air, & le rapport des densités de l'air peut se déterminer par l'inspection du thermometre & du barometre, gradués pour cet effet. Voici à présent les Corollaires principaux qui découlent de nos équations.

(a) Toutes les valeurs de notre dernière équation peuvent être déterminées: les poids P & p sont connus; le frottement F se trouvera, si, après avoir ôté le pendule & le poids moteur, on met à la place de ce poids, un autre beaucoup plus petit d'abord, & qu'on l'augmente peu à peu, jusqu'à ce qu'il fasse tourner toutes les roues, & ce poids sera exprimé alors par F ; la quantité \mathcal{C} , qui marque la descente verticale du poids moteur à chaque oscillation du pendule, se détermine aisément, en mesurant sa descente au bout de 24 heures, & en divisant cette descente par $24 \times 60 \times 60$ ou 86400; l marque la distance du centre de gravité du pendule, depuis son point de suspension; elle sera un peu plus petite dans les horloges à secondes que 441 lignes: A est la moitié de l'arc décrit par le centre de gravité du pendule; C un arc pareil, arbitraire; & enfin γ marque la diminution insensible, que le pendule

détaché de l'horloge souffre , lorsqu'il décrit dans sa descente ledit arc C ; & on pourra déterminer pareillement ce petit arc γ , en mesurant la diminution actuelle après mille balancemens , & en prenant la millieme partie de cette diminution. Prenons pour exemple la pendule de M. Graham , que l'on conserve encore à l'Académie : le poids moteur ordinaire y est de 11 liv. $14 \frac{1}{2}$ onces ; la pendule ne se remonte qu'au bout d'un mois , & doit descendre , à ce que l'on m'a marqué , de $3 \frac{1}{2}$ pieds pendant ce tems ; nous avons donc $C = \frac{1}{5,143}$ lignes , $P = 11$ liv. $14 \frac{1}{2}$ onces : je démontrerai ci-dessous , que F doit y être à peu près $= \frac{1}{4} P$; par les dimensions de la lentille , qu'on me marque être de cuivre jaune , le poids du pendule p doit être à peu près $= \frac{3}{2} P$: le pendule faisoit de chaque côté un arc de $2^{\circ} 10'$, ce qui fait $\frac{A}{C} = 0,0378$: mettons l'arc arbitraire $C = A$, & nous trouverons $\gamma = \frac{1}{3,89}$ lignes ; d'où je conclus que le centre de gravité du pendule détaché de l'horloge , descendant sur un arc de $2^{\circ} 10'$, perdrait dans sa montée $\frac{1}{3,89}$ lign. ou la quarante-neuvieme partie d'une minute , en supposant la distance du centre de gravité au point de suspension , de 3 pieds. Ces valeurs étant connues dans un cas , on peut en déduire ce qui doit arriver dans d'autres cas , & sur-tout , toutes les variations que le pendule souffrira en changeant le poids moteur , en supposant le frottement plus ou moins grand , & l'air qui environne le pendule devenu plus ou moins dense , par rapport à la densité de l'air du tems de l'observation fondamentale.

(b) Si le frottement des roues exprimé par F étoit nul , les arcs décrits par le pendule seroient , en raison soustriplee , des poids moteurs , tout le reste étant égal.

(c) En considérant le frottement , ces mêmes arcs sont

en raison des racines cubiques, des excès du poids moteur par-dessus les frottemens. Ce Corollaire m'a fait connoître quel étoit le frottement dans la pendule de M. Graham; car M. de Maupertuis dit, p. 165 & 166, qu'avec le poids ordinaire le pendule décrivait des arcs de $4^{\circ} 20'$, & avec la moitié de ce poids, des arcs de $3^{\circ} 0'$; ces arcs sont en raison de 13 à 9: donc $P - F : \frac{1}{2}P - F = \text{Cub. } 13 : \text{Cub. } 9 = 2197 : 729$, ce qui donne $F = \frac{739}{2936}P$; ou à peu près $F = \frac{1}{4}P$, tout comme j'ai mis dans la note (a). Si on suppose le plus petit frottement égal au quart du poids moteur, & le plus grand frottement égal à sa moitié, les plus grandes oscillations seront aux plus petites, comme $\sqrt[3]{3}$ à $\sqrt[3]{2}$, ou comme 1144 à 1000: le plus grand arc étant donc de $4^{\circ} 20'$, le plus petit fera de $3^{\circ} 47'$, & cette différence des arcs ne fera qu'une seconde & demie par jour dans la marche de la pendule (§. xvi.); d'où l'on voit combien ces changemens sont peu à craindre dans les bonnes horloges.

(d) Une autre source de variations des arcs décrits par le pendule, est la différente densité de l'air, & tout le reste étant égal, les arcs sont réciproquement proportionnels aux racines cubiques des densités de l'air: or la plus grande densité de l'air est à la plus petite dans nos climats, environ comme 6 à 5; donc le plus grand arc sera au plus petit à cet égard, comme $\sqrt[3]{6}$ à $\sqrt[3]{5}$, ou comme 1062 à 1000: le plus grand arc étant donc de $4^{\circ} 20'$, le plus petit fera à cet égard de $4^{\circ} 5'$, & cette différence vaut environ trois quarts de seconde par jour dans la marche de la pendule.

(e) Comme le froid augmente en même tems la ténacité de l'huile & la densité de l'air, outre qu'il raccourcit le pendule, il concourt par toutes ces trois raisons, à accélérer la pendule; mais les deux premières sont presque insensibles,

insensibles, par rapport à la troisième dans les bonnes pendules, puisqu'en vertu du §. xv, celle-ci toute seule peut aller jusqu'à 30" par jour, du plus grand chaud au plus grand froid dans un même climat, pendant que les deux autres jointes ensemble, ne vont que jusqu'à 2" d'une extrémité à l'autre. Ce raccourcissement & allongement de la verge du pendule est donc le seul inconvénient qui reste aux bonnes pendules; & comme on peut y remédier par l'inspection fréquente du thermomètre, ou bien en faisant la verge de deux pièces de différens métaux, & en la chargeant d'un double poids, le tout avec de certaines proportions, fondées sur les différentes extensions de ces métaux, causées par la même augmentation de chaleur (cet éclaircissement suffira, tant que je n'aurai d'autres Lecteurs que mes Juges); je crois qu'il ne reste plus rien à désirer sur la perfection des pendules pour les observations sur terre.

(f) La construction de l'échappement & de la roue de rencontre, est telle que les oscillations du pendule ne peuvent être diminuées au-delà d'un certain degré, sans arrêter la marche de l'horloge: cela fait que le poids moteur ne sauroit non plus être diminué au-delà d'un certain degré; & voici comme on pourra le déterminer. Soit a la moitié du plus petit arc possible, & π le plus petit poids moteur, on aura $\frac{A^3}{a^3} = \frac{P-F}{\pi-F}$ ou $\pi = \frac{a^3 P - a^3 F + A^3 F}{A^3}$.

Supposons dans la pendule de M. Graham, $F = \frac{1}{4} P$, [voyez la note (c)] & $a = \frac{1}{2} A = 1^\circ 5'$, nous trouverons $\pi = \frac{11}{32} P = 4 \text{ liv. } 1 \frac{1}{2} \text{ once}$, puisque P étoit de 11 liv. 14 $\frac{1}{2}$ onces.

(g) Une remarque que je souhaite sur-tout qu'on fasse, est que la résistance de l'air est une chose très-nécessaire à la marche de la pendule, & que quand même on pourroit

l'éviter entierement, il faudroit se donner bien de garde de le faire; & cela pour être paradoxe, n'en est pas moins vrai: si la résistance que l'air apporte au mouvement du pendule étoit nulle, nous aurions $\gamma = 0$, & $A = \infty$, c'est-à-dire que le pendule décrirait nécessairement des arcs infiniment grands. Cette conclusion ne doit pas nous surprendre, car sans la résistance de l'air, le poids moteur n'aurait que le frottement à vaincre, & comme le frottement demeure le même, il faudroit alors que par l'action continuée du poids moteur, il se fit une augmentation continue dans les balancemens du pendule. Mais quant au frottement, il faut l'éviter avec toutes les attentions possibles, car il ne peut que nuire à tous égards.

(h) Le poids de la lentille, quel qu'il soit, ne change pas les arcs du pendule, pourvu que la lentille conserve la même surface, qui donne toujours à l'air une prise égale; autant que le poids p devient plus grand, autant le petit arc γ devient plus petit, & la quantité γp dans notre équation, reste toujours la même, comme on le démontre dans la théorie des milieux résistans; donc l'arc A n'est point changé par la variation du poids p . Si dans la pendule de M. Graham, la lentille avoit été deux ou trois fois plus pesante sous le même volume & la même surface, le même poids moteur de 11 liv. 14 $\frac{1}{2}$ onces lui auroit fait décrire les mêmes arcs de $4^{\circ} 20'$: cela suppose pourtant que le pendule ne souffre dans ses balancemens aucun frottement, ce qui ne sçauroit être exactement vrai. Ainsi comme le point principal est, que le pendule libre & le pendule appliqué à l'horloge fassent leurs oscillations suivant les mêmes loix, j'en conclus qu'il faut faire le poids de la lentille aussi grand que la matiere & les autres circonstances accidentelles le permettront: il faut aussi que la pesanteur spécifique de ce poids soit fort grande, afin que les

changemens de la pesanteur spécifique de l'air ne puissent pas être sensibles sur le tems absolu d'une oscillation : dans le cuivre jaune , cette raison peut retarder ou accélérer la pendule de deux tiers de seconde par jour.

(i) Plus le poids moteur est grand , plus il fait décrire au pendule de grands arcs ; il faut donc augmenter le poids , jusqu'à ce qu'il fasse décrire au pendule les arcs qu'on veut qu'il décrive ; cela détermine le poids moteur exactement à cet égard : mais il y a encore une autre considération à faire. On pourroit augmenter davantage le poids moteur , sans que le pendule décrive de plus grands arcs , en faisant que la lentille souffre en même tems une plus grande résistance de l'air. Si , par exemple , on eût augmenté dans la pendule de M. Graham le poids moteur en raison de 4 à 7 , la quantité $P - F$ en seroit devenue deux fois plus grande ; & si on avoit donné à la lentille une figure à souffrir deux fois plus de résistance de l'air , la quantité γ en seroit devenue aussi deux fois plus grande , & l'arc A seroit resté le même : par-là on obtiendrait que l'inégalité des arcs A , produite par l'inégalité du frottement F , subsistât entre les termes du rapport de $\sqrt{6}$ à $\sqrt{5}$, au lieu du rapport beaucoup plus inégal $\sqrt{3}$ à $\sqrt{2}$, marqué dans la note (c) , ce qui seroit un avantage. Il est vrai qu'on pecherait par-là contre la regle , que les oscillations du pendule libre , & celles du même pendule appliqué à l'horloge , doivent être conservées égales le plus qu'il est possible ; cependant je crois la première raison plus importante que la seconde , qui lui est contraire. Cette réflexion nous apprend du moins qu'on doit être attentif à déterminer cette proportion la plus avantageuse , par un grand nombre d'expériences , & qu'il est bien sûr qu'il ne faut pas vouloir diminuer trop la résistance de l'air.

(l) J'ai supposé dans mes calculs , que l'augmentation

du poids moteur P n'augmente point le frottement des roues F ; je crois ce principe vrai à peu près, mais non pas exactement: on peut distinguer ici le frottement mutuel des dents qui s'engrenent, d'avec le frottement du mouvement des axes: le premier frottement doit être augmenté par le poids moteur, parce que les dents sont plus pressées les unes contre les autres, mais je le crois beaucoup plus petit que l'autre, parce que ce mouvement n'est pas un mouvement glissant, mais une application successive des parties mutuelles qui se répondent, lequel mouvement on peut démontrer ne souffrir presque aucun frottement; aussi faut-il être bien attentif dans la construction des roues, qu'il ne puisse s'y faire le moindre mouvement glissant. Le second frottement provient d'un mouvement extrêmement glissant, c'est pourquoi il doit être beaucoup plus grand que le premier, & je suppose que ce frottement n'est pas augmenté par le poids moteur.

Il seroit à souhaiter que cette mécanique des horloges, & cette économie entre leurs forces & leurs résistances, fût à la portée de tous les habiles ouvriers, pour pouvoir mieux diriger leurs vûes & leurs attentions: mais c'est sur-tout dans la construction des montres qu'on doit être attentif à nos principes, comme je me propose de faire voir ci-dessous.

§. XVIII.

LA grande perfection des pendules ne doit pas nous permettre de renoncer à leur usage sur mer, tant qu'il est possible de les employer; & je suis sûr qu'il y a des saisons & des mers où l'on peut les employer utilement pendant long-tems: peut-être même que moyennant les règles que je vais donner, on pourra s'en servir tant que le vaisseau n'est pas fortement agité.

I. Il faut suspendre la pendule de maniere qu'elle puisse se tourner en tout sens, & il faut sur-tout la suspendre au centre de gravité du vaisseau, puisque c'est cet endroit qui est le moins agité, & on trouvera cet endroit par plusieurs observations faites sur le mouvement des pendules suspendus au vaisseau.

II. Tout corps d'une étendue finie, ayant un certain point par lequel étant suspendu, il fait ses balancemens dans moins de tems, que s'il étoit suspendu par tout autre point (on a déterminé ce point) : il faudra faire passer les axes du mouvement de la pendule par ce point.

III. Il faut encore employer un petit pendule, qui batte tout au plus les demi-secondes. Voyez par rapport à ces trois regles, les notes (ϵ) & (γ) du §. IX ; mais par rapport à la dernière, il y a encore une réflexion particulière à faire que voici.

Un pendule simple tend à faire ses balancemens harmonieusement avec les agitations du vaisseau ; mais ce pendule appliqué à l'horloge, est entretenu dans ses balancemens naturels par le poids moteur. Comme il y a donc ici deux causes permanentes différentes entre elles, le principe du §. v. ne trouve plus lieu. Dans ces cas, une cause maîtrisera ordinairement l'autre, & prévaudra ; ce que je pourrois éclaircir par plusieurs exemples, tirés de la Méchanique & de la Physique. Si les agitations du vaisseau étoient isochrones avec les balancemens naturels du pendule, ces mouvemens deviendroient bien-tôt harmonieux, mais aussi le pendule feroit bien-tôt des excursions énormes, & la marche de la pendule feroit ou arrêtée, ou extrêmement dérangée. La même chose arriveroit, si les deux classes de balancement étoient à peu près isochrones ; mais si elles sont fort inégales, les balancemens les plus foibles & les plus tardifs ne peuvent influencer

sensiblement sur les autres. Or les balancemens du vaisseau, quand ils sont uniformes & réguliers, sont fort lents; c'est pourquoi je demande que les pendules soient courts, pour les rendre moins sensibles aux agitations du vaisseau.

IV. Cette Réflexion nous fournit encore cette quatrième règle, qui est qu'on fasse faire au pendule de grandes oscillations; alors le poids moteur maîtrisera entièrement le pendule, & celui-ci ne pourra plus être dérangé dans ses balancemens par les agitations du vaisseau; & quand même chaque balancement du pendule seroit tant soit peu dérangé, toutes les petites erreurs insensibles se détruiraient mutuellement au bout d'un certain tems. Il est vrai que par ces deux dernières règles, on s'écarte des maximes qu'on doit avoir sur terre, mais cette raison ne mérite presque aucune attention sur mer. Je suis sûr qu'avec ces précautions, on pourra se servir utilement des pendules, tant que le vaisseau n'est pas tourmenté; & j'ai fait plusieurs expériences sur des pendules suspendues par des cordes & balancées, qui m'ont fait connoître la validité de mes remarques.

§. X I X.

Si le vaisseau commence à être agité plus fortement, il faudra employer d'autres horloges, en substituant au poids moteur un ressort, & au pendule un balancier, c'est-à-dire, des horloges faites en grand sur le modèle des montres. Je crois que ces horloges serviront sur mer avec autant de précision, ou peu s'en faut, que sur terre; & toute la question sera, dans quel degré de perfection on croit pouvoir mettre les horloges à balancier, en les tenant entièrement en repos. Comme cette matière est fort importante, non-seulement pour les horloges marines,

mais encore pour les montres ; je l'ai examinée scrupuleusement , & je mettrai ici mes réflexions tout au long.

§. X X.

REMARQUONS d'abord que pourvû que chaque pièce mobile dans une horloge ne puisse tourner qu'autour de son centre de gravité, cette horloge ne peut être aucunement dérangée, de quelque façon qu'on l'agite : c'est une conséquence qui découle immédiatement du §. XIII. Et comment se pourroit-il sans cela, qu'une montre ne fût pas extrêmement dérangée par les secousses & les cahos d'un cheval & d'une chaise ? Il sera donc fort important pour la perfection des horloges marines, que les pièces tournent parfaitement sur un même point, & que l'axe du mouvement passe par leur centre de gravité, avec la dernière précision possible. Cette remarque regarde sur-tout le balancier ; il faut y mettre toute son attention, & quand on y aura bien réussi, la marche de l'horloge ou de la montre sera aussi uniforme sur mer, qu'elle seroit sur terre : ainsi ce que j'ajouterais sera indépendant des agitations du vaisseau, auxquelles je ne ferai plus aucune attention.

§. X X I.

LES horloges marines doivent avoir au fonds la même construction que les montres de poche, puisqu'il est nécessaire qu'elles soient animées par l'action d'un ressort, & réglées par les oscillations d'un balancier : mais pour pouvoir travailler toutes les pièces avec une grande exactitude, il faudra faire ces horloges aussi grandes qu'on fait les bonnes pendules. J'avoue que les horloges à balancier sont beaucoup moins parfaites que les bonnes

pendules, mais je crois que c'est faute d'avoir bien examiné le mécanisme & toute l'économie de ces horloges. Je vais donc examiner les horloges à balancier, sur le même pied & les mêmes principes que j'ai employés pour les pendules.

§. X X I I.

LA première & principale source de l'imperfection des montres & autres horloges à balancier, vient des grandes excursions du balancier & de leurs grandes inégalités. La seconde, est que le balancier ne maîtrise pas assez le mouvement des roues & l'action de la force motrice : nous tâcherons de nous mettre en état de remédier à ces grands inconvéniens, & ce sera encore en partant des premiers principes.

§. X X I I I.

DANS les horloges à balancier, il y a à considérer, comme dans les pendules, 1°. La force du ressort moteur. 2°. Le frottement des roues. 3°. Les résistances que souffre le balancier dans ses balancemens. Mais ces dernières résistances different beaucoup de celles que souffre le pendule dans une horloge aussi parfaite que celle de M. Graham, qui nous a toujours servi d'exemple. Le pendule n'y souffre presque aucune autre résistance que celle de l'air, sans avoir aucun frottement sensible; au lieu que les balanciers souffrent fort peu de la résistance de l'air, & beaucoup du frottement. Je ne crois pas qu'on ait remarqué avant moi, que c'est-là presque l'unique cause pourquoi on n'a pû jusqu'ici venir à bout de faire décrire au balancier de petits balancemens, si nécessaires à la

la marche uniforme de l'horloge. Si la résistance de l'air étoit tout-à-fait nulle, & le ressort de la spirale parfait, alors le grand ressort n'auroit à vaincre que le frottement: s'il ne le surpassoit que fort peu, l'horloge s'arrêteroit au moindre accident; & s'il venoit à le surpasser de beaucoup, le balancier en décroiroit tout aussi-tôt de grands arcs, parce que les grands mouvemens du balancier n'apportent pas plus de résistance au ressort moteur que les petits mouvemens. C'est-là la nature du frottement; rien ne pourroit même empêcher le balancier de prendre continuellement plus d'effort, si la résistance de l'air étoit entièrement nulle, & l'élasticité de la spirale parfaite. Voyez la note (g) du §. XVII.

§. X X I V.

PAR-là il arrive que le moindre changement, soit dans le grand ressort, soit dans le frottement, cause de très-grandes variations dans les excursions du balancier; & plusieurs essais que j'ai faits sur les montres, m'ont fait voir clairement que je ne me trompois point. Il suffira d'alléguer une seule expérience, que j'ai faite sur une assez bonne montre, que je n'avois pas fait nettoyer depuis très-long-tems. L'huile s'y étoit tellement épaissie, qu'un froid tel que marque le 34 degré du thermometre de Fahrenheit, la faisoit arrêter: je remarquois que dans cet état, le balancier faisoit encore des excursions de 60 degrés; j'ai mis ensuite cette montre contre le fourneau, & le thermometre à côté de la montre; le thermometre montoit jusqu'à 94 degrés, & le balancier de la montre en a augmenté ses balancemens de près de 30°, faisant dans ses excursions presque 90°, & cette augmentation a retardé la montre d'environ 26' par jour. Je regarde donc comme un très-grand, & le principal défaut dans les

montres, que le ressort moteur n'ait presque d'autre obstacle à vaincre que le frottement, puisqu'il en arrive nécessairement que le balancier fait de très-grandes excursions, & des excursions fort inégales, pour peu que le frottement varie, & enfin dont l'inégalité est d'autant plus grande conséquence, que les balancemens sont grands par eux-mêmes. On renverse par-là entièrement le principe de l'uniformité dans la marche.

§. X X V.

IL est clair par ces remarques, 1^o Qu'il faut éviter autant qu'il est possible tous les obstacles, qui n'agissent pas plus fortement dans les grands balancemens que dans les petits, & ces obstacles sont précisément le frottement, qu'on doit tâcher de diminuer avec toutes les attentions imaginables, sur-tout dans le balancier. 2^o. Qu'il faut nécessairement apporter d'autres obstacles au mouvement du balancier, sans quoi ses balancemens croîtroient continuellement. 3^o. Que ces obstacles doivent être d'une nature à causer, sans l'action du grand ressort, une plus grande diminution aux grandes excursions du balancier, qu'aux petites : les frottemens produisent des diminutions toujours égales, parce que ces diminutions sont comme les tems des balancemens, qui peuvent être censés les mêmes aux grandes & aux petites oscillations, pendant que la résistance de l'air cause des diminutions, qui sont proportionnelles à peu près aux quarrés des arcs entiers.

§. X X V I.

JE prends donc pour une conséquence nécessaire, quelque paradoxe qu'elle paroisse, qu'il faut à dessein

augmenter la résistance de l'air contre le balancier, & l'augmenter considérablement, jusqu'à ce qu'elle devienne du moins égale au frottement total, puisque nous avons vu dans la note (e) du §. XVII, que dans la pendule de M. Graham, la résistance de l'air faisoit seule trois fois autant que le frottement entier, celui-ci n'étant que le quart du poids moteur. Pour cet effet je conseillerois d'ajouter au balancier trois ou quatre petites aîles, qui donnent directement contre l'air. Je suis sûr que par ce moyen on pourra entretenir sûrement la marche de l'horloge, par des balancemens beaucoup plus petits qu'on n'a pu faire jusqu'ici, & que ces balancemens seront beaucoup moins inégaux.

§. X X V I I.

APRÈS avoir diminué ainsi très-considérablement les grandes variations dans les excursions du balancier, il faut encore tâcher de rendre ses balancemens isochrones, malgré une petite inégalité qui restera toujours. Supposons que le balancier détaché de l'horloge pût tourner avec une liberté entière, & que l'action de la spirale rendît alors ses grands & ses petits balancemens parfaitement tautochrones entre eux, il est certain que ce tautochronisme ne subsistera plus entierement, lorsque ce balancier, quoique modéré par la même spirale, fera ajouté à l'horloge ou à la montre; car il faudroit que l'accélération causée par la roue de rencontre, détruisît à chaque instant la résistance de l'air & celle du frottement, & cette condition est du tout impossible à remplir: on fait seulement que la somme des accélérations & la somme de toutes les résistances momentanées, se détruisent à chaque balancement; mais cela ne suffit pas pour conserver parfaitement le tautochronisme. Tout ce qu'il y a donc à faire, est que

l'effet de toutes ces petites forces soit insensible sur le balancier, de même qu'il est insensible sur les pendules. Cette considération demande que l'inertie du balancier soit augmentée autant que les circonstances le permettent, & la force de la spirale à proportion. On peut doublement augmenter l'inertie du balancier, premièrement en augmentant son poids, & en second lieu, en lui donnant un plus grand rayon, sans le charger davantage; la première manière cause en même tems plus de frottement au balancier, & ne seroit d'aucune utilité, si on n'avoit augmenté la résistance de l'air en même tems; la seconde manière sera toujours utile à tous égards. Les réflexions que j'ai faites dans la note (h) du §. XVII, à l'égard du poids de la lentille, doivent aussi être appliquées au balancier. Cette seconde remarque ne contribuera pas moins que la première à la perfection des horloges marines, où rien ne nous gêne sur cet article; on y pourra augmenter & charger le balancier tant qu'on jugera à propos, & renforcer la spirale à proportion. Il s'en faut de beaucoup qu'on satisfasse à cette condition dans les montres ordinaires autant qu'on pourroit, & j'ai remarqué souvent qu'une montre n'étoit meilleure qu'une autre, quoique mieux travaillée, que parce qu'elle avoit un balancier plus grand & plus chargé. Je crois donc que moyennant ces précautions, les balancemens ne pourront différer sensiblement de ceux que le balancier feroit, s'il étoit entièrement libre.

§. XVIII.

IL s'agit d'examiner encore quelles mesures on peut prendre pour régler le balancier, considéré comme entièrement libre, mais faisant des balancemens inégaux en grandeur. Or, on sçait que la spirale doit pour cet effet

exercer sur le balancier un effort proportionnel à sa distance au point d'équilibre : la théorie nous fourniroit assez de moyens pour satisfaire à ce principe, si seulement il étoit possible de les exécuter avec une précision suffisante ; faute de cela, on a recours à un principe connu dans la Physique expérimentale, que tout ressort changeant sa figure naturelle, le fait par des causes proportionnelles aux changemens, tant que ceux-ci sont fort petits ; c'est donc une nécessité absolue que la spirale change fort peu sa figure pendant les agitations du balancier, & moyennant cela les balancemens, quoiqu'un peu inégaux, feront sensiblement tautochrones entre eux. Cette condition nous fait voir premièrement, qu'on doit prendre toutes ses mesures, pour que les balancemens du balancier soient toujours fort petits, & je suis persuadé qu'on y pourra réussir, en évitant avec tous les soins imaginables, le frottement du balancier, & en rendant la résistance de l'air plus sensible ; en second lieu, qu'il faut qu'un mouvement considérable du balancier produise peu de changement dans la figure de la spirale. Cette condition nous fourniroit un grand nombre de réflexions sur la construction & la figure naturelle de la spirale, si nous pouvions nous y arrêter : il me semble qu'il convient sur-tout, que l'extrémité mobile de la spirale soit fort proche de l'axe du mouvement du balancier, & que la spirale agisse sur le balancier, toujours sous une même direction & sur un même levier. Je dirai aussi en passant, qu'il est de grande conséquence que les deux extrémités de la spirale soient bien fermes, & que l'axe du mouvement du balancier ne puisse branler en aucune façon ; en troisième lieu, qu'il faut que la spirale, étant en repos, soit entièrement dans sa figure naturelle, sans être bandée ou gênée en aucune façon, c'est-à-dire, que sa figure soit parfaitement la

même que si les deux extrémités étoient entièrement libres ; que cet équilibre soit *oisif* & non *forcé*. Ce sont les termes dont se sert M. Jean Bernoulli, Docteur en Droit, dans ses Recherches Physiques sur la Propagation de la lumière, p. 17 & suivantes, où, par un raisonnement fort solide par lui-même, mais établi sur un faux principe, il prétend précisément le contraire.

Pour éclaircir cette question, imaginons-nous la courbe AEP (Fig. 6.) sur l'axe MP telle, que PG marquant le changement dans la figure de la spirale, depuis sa figure naturelle, l'appliquée GE exprime la force qui tend à remettre la spirale dans son état d'équilibre : n'est-il pas évident que PG devenant négatif en changeant la figure de la spirale en sens contraire, l'appliquée GE doit devenir négative aussi ? c'est-à-dire qu'une inflexion en sens contraire, est produite par une force en sens contraire ; & cela étant, ne faut-il pas que la continuation de la courbe AEP soit représentée par Pea ? Il est donc nécessaire que la courbe APa ait au point P une inflexion contraire, & cela étant, le rayon osculateur y fera infini. Or une petite portion EPe approche d'autant plus d'une ligne droite, que le rayon osculateur est plus grand, & elle en approche le plus qu'il est possible, lorsque le rayon osculateur est infini ; & si cette portion EPe étoit entièrement une ligne droite, la spirale conserveroit un tautochronisme parfait, parce que les forces seroient proportionnelles aux éloignemens du point de repos. M. Bernoulli, au lieu de continuer la courbe du côté opposé de l'axe MN , l'a continuée du même côté, comme le marque la figure septième, qui est la même que la figure seconde de son discours, & c'est sur cette inattention qu'il a bâti son raisonnement, qu'on ne peut s'empêcher de trouver solide & fort ingénieux par lui-même, si l'inconvénient étoit tel

qu'il le suppose : mais il est certain qu'une spirale contrainte feroit beaucoup de mal, & je demande qu'on évite cette contrainte avec beaucoup d'attention. Je crois bien que deux spirales égales & appliquées en sens contraire pourroient faire quelque bien, pourvû qu'elles soient l'une & l'autre dans un équilibre parfaitement *oisif*, car la courbure des branches AEP & aeP sera d'autant plus grande nécessairement, que les deux spirales exerceroient plus de force l'une sur l'autre.

§. X X I X.

VOILA mes réflexions principales sur les horloges à balancier : après avoir bien pesé toute l'œconomie de ces horloges, je trouve que c'est presque le seul frottement du balancier, qui empêche de les mettre dans un aussi haut degré de perfection, que l'on sçait mettre les pendules. Que l'on redouble donc ses attentions à rendre ce frottement insensible ; je suis sûr qu'on y réussira, pourvû qu'on convienne de l'importance de la chose : mais peut-être faudra-t-il de toutes nouvelles manieres d'appliquer les balanciers aux horloges : je m'étendrois volontiers sur cet article, si je ne craignois d'être trop prolix. Je crois qu'il conviendra aussi, de ne donner au plus qu'une demi-seconde aux balancemens, même dans les grandes horloges ; la spirale en aura plus de force, ce qui est un avantage, comme nous avons vû au §. XXVII ; & si les agitations du vaisseau étoient encore capables de faire quelque impression sur ces horloges, leur effet en sera moins sensible, en vertu de la troisième note du §. XVIII.

§. X X X.

Je ne dois pas omettre une circonstance qui peut

préjudicier aux horloges à balancier ; c'est qu'on prétend dans la Physique expérimentale, avoir remarqué quelque changement dans les forces élastiques des ressorts, par les changemens de la température de l'air : si cela étoit, la spirale ne pourroit pas régler uniformément le balancier ; mais je ne suis pas encore entièrement convaincu du fait : quoi qu'il en soit, ce que j'ai dit au §. xv, suffira parfaitement pour s'en éclaircir, & pour connoître ensuite les corrections à faire, par le moyen du thermometre.

§. X X X I.

JE finirai ce Chapitre par une nouvelle maniere de régler davantage les balancemens, soit d'un pendule, soit d'un balancier. Soit AB (*Fig. 8.*) la direction moyenne du pendule, ou d'un rayon du balancier, qui, dans ses plus petits balancemens, vienne jusqu'en AC & AD , & qu'on mette à chaque côté un petit ressort fort foible, tels que mn & qp , dont les extrémités n & p soient légèrement touchées, lorsque le pendule ou le balancier fait ses plus petites excursions. Si ensuite ces balancemens deviennent plus grands, & par eux-mêmes plus tardifs, ils seront un peu accélérés par les petits ressorts mn & qp , & on pourra facilement régler leur action d'une façon que la plus grande oscillation devienne parfaitement tautochrone avec la plus petite, & alors les oscillations moyennes ne pourront manquer d'être pareillement tautochrones, avec beaucoup de précision. Je n'aurois pas hasardé cette nouvelle idée, si plusieurs expériences préliminaires ne m'en avoient garanti le succès. Je me contenterai cependant de l'avoir indiquée, laissant à d'autres le soin de la perfectionner, s'ils trouvent qu'elle le mérite.

CHAPITRE

CHAPITRE III.

Contenant quelques réflexions sur la meilleure maniere de connoître à chaque instant la direction horisontale ou verticale dans les vaisseaux agités.

§. XXXII.

QUAND on voit l'horison, on prend la ligne visuelle qui le rase pour la direction horisontale ; & alors pour prendre hauteur, on se sert de l'Arbalète, ou du Quartier Anglois : ce dernier instrument a été fort perfectionné depuis quelque tems par M. Grand-Jean de Fouchi (Voyez les Mémoires de l'Académie R. des Sc. pour l'année 1740, p. 468), dont les nouveaux quartiers de réflexion mesureront les angles avec toute la précision qu'on peut souhaiter. Ils seront sur-tout très-utiles pour mesurer les distances de la Lune à deux étoiles fixes, & pour déterminer par-là la longitude du lieu. Quand on se trouve à même de se servir de cet instrument, il ne faut pas douter qu'il ne soit infiniment préférable à la fleche ; mais je ne sçais si on pourra s'en servir pendant que le vaisseau est fort agité, au lieu qu'on peut toujours faire ses observations avec l'Arbalète, qui est moins exact, mais plus facile & plus commode. On sçait assez tous les défauts de cette méthode de prendre hauteur sur mer, en prenant pour la vraie direction horisontale, la ligne visuelle qui rase ou paroît raser l'horison visible. Je ne m'arrêterai donc point à les décrire ; cependant malgré tous

Prix. 1745.

G

ses inconveniens , je doute fort qu'on en puisse jamais trouver une meilleure , à moins que la mer ne soit presque calme , auquel cas on pourra peut-être lui préférer la méthode que j'exposerai ci-dessous.

§. X X X I I I.

QUAND on ne voit l'horison ou la surface de la mer que de fort près dans les crépuscules , ou qu'on ne la voit pas du tout pendant la nuit , on se trouve entièrement hors d'état de suivre la méthode ordinaire pour observer les hauteurs ; c'est pourtant le cas principal de la question proposée par l'Académie. Que faire dans ces fâcheuses circonstances ? Il faut sans doute avoir recours à des principes tout nouveaux , à moins qu'on ne voulût se contenter de jeter dans la mer des signaux enflammés , ou de les faire transporter sur l'esquif : ce seroit plutôt couper que défaire ce nœud Gordien. Je ne promets pas de satisfaire à cette question avec toute la précision qu'on pourroit souhaiter : mais peut-être que ce que je proposerai fera d'autant moins imparfait , que je l'ai examiné avec plus d'attention , & qu'il est fondé sur les vrais principes de la mécanique , que j'ai exposés au premier chapitre. Voici mes réflexions sur cette matiere.

§. X X X I V.

IL est évident que lorsqu'on se trouve réduit à ne pouvoir mettre à profit ce qui se passe hors du vaisseau , on ne peut plus avoir d'autres moyens pour connoître la direction verticale ou horisontale , que ceux - là mêmes dont on se sert sur terre , tels que sont les pendules , les niveaux , &c. Tous ces instrumens reviennent au même ,



étant fondés sur le même principe, qui est l'action de la pesanteur, toujours perpendiculaire à la surface de la terre. Mais les agitations du vaisseau dérangeront continuellement l'état naturel de ces instrumens : il faudroit que la pesanteur fût infinie, pour qu'elles ne le fissent pas, ou que l'inertie fût infiniment petite ; & n'étant pas en notre pouvoir de changer ces choses, il me semble que tous nos efforts ne peuvent aboutir qu'à diminuer autant qu'il est possible, l'effet des agitations du vaisseau sur les pendules simples, & puis à déterminer la vraie verticale, qu'il est du tout impossible d'observer immédiatement, par d'autres circonstances qu'on pourra observer. Il est souvent impossible de connoître une chose par elle-même, qu'il est facile de déterminer par d'autres observations.

§. X X X V.

Si les agitations du vaisseau étoient tout-à-fait irrégulières en tout sens, il seroit sans doute impossible de satisfaire à notre second point, & on seroit réduit à se contenter du premier. Mais je dois répéter ici ce que j'ai exposé au long dans le premier chapitre, sçavoir, que les agitations du vaisseau sont une espece de balancemens, qui se font suivant les loix du mouvement d'un pendule simple ; je ne prétens pourtant pas que cela soit ainsi à la rigueur ni toujours : quand la mer est male ; quand deux mers se battent, en un mot, quand les lames & le vent sont tout-à-fait irréguliers, les agitations du vaisseau ne peuvent qu'être irrégulières, inégales & fort incommodes : j'avoue que ce n'est pas alors le tems de mettre en pratique les regles que je vais donner ; mais ces cas arrivent rarement, & quand on s'y trouvera, on pourra du moins saisir les intervalles les plus favorables.

§. XXXVI.

QUANT à notre premier point, qui est de diminuer les agitations d'un pendule suspendu dans un vaisseau, nous avons marqué dans le premier Chapitre tout ce qu'il convient de faire. Voyez sur-tout la note (γ) du §. 1x; & les deux exemples que j'y ai donnés, montrent combien il est important d'observer le plus près qu'on peut les règles que j'y ai données. Je ne me flatte pourtant pas qu'on puisse diminuer par-là les balancemens d'un pendule au point de pouvoir être négligés, & de pouvoir prendre la direction du pendule pour la vraie verticale. Je viens donc à l'examen de notre second point, & c'est sur-tout ici que j'ai besoin de notre hypothese, touchant l'uniformité des balancemens du vaisseau; plus on se trouvera dans le cas de cette hypothese, plus on pourra déterminer exactement la vraie verticale.

§. XXXVII.

SOIT donc dans la quatrième Figure, A le point autour duquel le vaisseau est supposé faire ses balancemens: AF une ligne verticale; que l'angle MAF marque l'inclinaison moyenne du vaisseau couché sur un de ses bords, quelle que soit cette inclinaison. Supposons ensuite que la ligne AM fasse des balancemens de côté & d'autre, & que pendant ces agitations elle se trouve dans une position quelconque AB . Soit au point M attaché un pendule Mm , & supposons que le point M se trouvant en B , le pendule Mm ait pris la situation BC , & qu'on tire la verticale BE ; il s'agit de déterminer l'angle CBE par des quantités qu'on pourra observer. Cet angle CBE ne doit

donc pas être déterminé par l'angle BAM , ni par MAF , qu'on ne sçauroit jamais connoître que fort grossièrement; je ne veux pas même que l'on suppose la distance AM connue, car on ne pourroit déterminer le point A assez exactement, & ce point ne sçauroit être exactement tel que nous le supposons, c'est-à-dire, entierement en repos pendant les agitations du vaisseau; il suffit qu'il doit y avoir nécessairement un endroit qui soit agité fort peu.

§. XXXVIII.]

AVANT que de marquer comment on pourra s'y prendre pour résoudre ce Problème, je prierai le Lecteur de se rappeler les propriétés que j'ai démontrées dans le premier Chapitre, sur l'angle en question CBE , sçavoir qu'il ne sçauroit manquer d'être toujours à peu près proportionnel à l'angle BAM , & que dans nos hypotheses il est parfaitement $= \frac{AF}{AM} \times \frac{L}{\lambda - l} \times BAM$, en faisant $AM = L$, la longueur du pendule $Mm = l$, & la longueur du pendule simple isochrone avec les balancemens du vaisseau $= \lambda$. Voyez le §. x. Si les oscillations du pendule Mm ne se font pas dans le même plan avec les balancemens de la ligne AM , & que le pendule soit obligé de balancer dans un autre plan quelconque; si l'on suppose encore que la ligne AM fasse plusieurs sortes de balancemens, mais pourtant harmonieux entre eux, l'angle absolu CBE en fera à la vérité changé, mais il restera toujours proportionnel à $\frac{L}{\lambda - l} \times BAM$. Il nous sera donc permis de supposer.

$$CBE = H \times \frac{L}{\lambda - l} \times BAM.$$

en entendant par H une quantité constante quelconque,

qui sera la même, de quelque façon que le vaisseau soit agité, pourvu qu'il le soit uniformément pendant un petit espace de tems.

§. X X X I X.

Si nous supposons à présent qu'il y ait trois pendules tous attachés au point M , dont les longueurs différentes soient l , l' & l'' , & que ces pendules ne puissent balancer qu'autour d'un même axe, il est clair que la quantité H , comme indépendante de la longueur du pendule, sera pour chacun de ces pendules la même : outre cela, quel que soit le point A , la distance AM ou L sera pareillement la même, comme aussi la longueur λ , & enfin l'angle BAM , qui ne dépend que des agitations du vaisseau. Soit à présent l'angle CBE pour le premier & le plus court pendule $l=A$, pour le pendule $l'=A'$, & pour le pendule $l''=A''$, & nous aurons, en vertu de l'équation du précédent article, $A = H \times \frac{L}{\lambda - l} \times BAM$

$$A' = H \times \frac{L}{\lambda - l'} \times BAM$$

$$A'' = H \times \frac{L}{\lambda - l''} \times BAM.$$

De ces trois équations on peut tirer ces deux analogies :

$$A : A' - A = \lambda - l' : l' - l$$

$$A : A'' - A = \lambda - l'' : l'' - l,$$

dans chacune desquelles le second terme peut être considéré comme connu, puisque $A' - A$ est l'angle compris entre le premier & le second fil, & $A'' - A$ est l'angle compris entre le premier & le troisième fil, & que ces angles pourront être observés à chaque moment : faisons donc $A' - A = M$, & $A'' - A = N$, & nous aurons ces deux équations :

$$A = \frac{\lambda - l''}{l' - l} \times M, \text{ \& } A = \frac{\lambda - l''}{l'' - l} \times N;$$

moyennant lesquelles on aura en quantité purement connues :

$$\lambda = \frac{M(l' \times l'' - l \times l') - N(l' \times l'' - l \times l')}{M(l'' - l) - N(l' - l)}$$

$$A = \frac{(l'' - l') MN}{(l' - l)N - (l'' - l)M}.$$

Donc la question de connoître la verticale, dépend entièrement de la manière d'observer les angles que font à chaque moment les trois pendules entre eux.

§. X L.

SI nous avons voulu considérer la quantité λ comme connue, nous n'aurions eu besoin pour connoître la vraie verticale, que des deux premiers pendules l & l'' , avec l'angle intercepté M , puisque nous avons trouvé $A = \frac{\lambda - l''}{l' - l} \times M$. Cette formule seroit beaucoup plus commode pour le calcul, elle rendroit l'instrument pour prendre hauteur plus simple, & elle seroit souvent plus exacte. Il ne fera donc pas hors de propos de remarquer, que la quantité λ pourra se connoître assez au juste; elle marque la longueur du pendule simple isochrone avec les agitations du vaisseau, quelque compliquées que soient ces agitations; pourvû qu'elles soient devenues harmonieuses, elles seront tautochrones, quoiqu'elles puissent être plus tardives dans un tems que dans un autre; cela dépend sur-tout du plus ou moins de lenteur dans le mouvement des lames. Or, on peut compter combien de tems emploient 20 ou 30 balancemens du vaisseau, par le moyen des battemens d'une montre, & par-là on connoitra la longueur λ pour tel tems qu'on voudra; & on la connoitra assez exactement.

§. X L I.

Ces deux derniers articles montrent la manière de déterminer la direction verticale par le calcul, & de la déterminer à chaque moment. Lorsqu'on voudra se contenter de reconnoître la position verticale pour un seul moment à chaque balancement du vaisseau, il sera très-facile de le faire sans aucun calcul, puisqu'on n'aura qu'à remarquer le moment auquel tous les pendules se trouvent réunis dans une même ligne, & leur direction commune sera la direction verticale. Un seul pendule même y peut suffire, en remarquant l'excursion entière du pendule, & en en prenant la moitié; car le pendule sera vertical, lorsqu'il sera au milieu des points extremes.

§. X L I I.

VOILA les principes qui pourront nous conduire à la manière de prendre hauteur sur mer pendant la nuit, quand on ne voit pas l'horison. Mais examinons auparavant quelles sont les circonstances les plus favorables à ces méthodes.

(*a*) Quant à la méthode des trois pendules, exposée au §. xxxix, il faut remarquer que pour rendre les angles *M* & *N* sensibles, les pendules doivent être fort inégaux en longueur, & que le pendule le plus long ne doit pas différer beaucoup de la longueur λ , qu'on peut connoître par la méthode du §. xl. Le pendule le plus court, indiqué par *l*, doit être fort petit, & enfin le pendule moyen *l'* pourra être pris un peu plus petit que $\frac{1}{2} \lambda$. Cette remarque est d'autant plus importante, qu'une petite erreur dans les angles *M* & *N* peut causer, sans cette précaution,

une

une grande erreur sur l'angle cherché A , & on ne doit pas espérer que lesdits angles M & N soient entièrement justes, tant faute d'observation, que faute de précision dans les hypothèses. J'éclaircirai cette remarque par deux exemples opposés.

1°. Supposons premièrement $\lambda = 16$ pieds; $l = 1$ pied; $l' = 2$ pieds, & $l'' = 4$ pieds: le vrai angle $M = 1^\circ$; le vrai angle $N = 3^\circ 30'$, & nous trouverons que le vrai angle A doit être de 14° ; & il seroit tel, si les hypothèses étoient exactement vraies, & qu'on n'eût commis aucune erreur dans les observations: mais si l'on avoit pris l'angle N trop petit de $15'$ on trouveroit pour les mêmes hypothèses, l'angle A de 26° , au lieu de le trouver de 14° , qui est sa juste valeur. Cette erreur seroit énorme, & devroit faire rejeter toute la méthode, si l'on ignoroit la source de l'erreur.

2°. Supposons en second lieu que les longueurs l, l', l'' & λ aient été prises en raison de 1, 2, 4 & 5, en donnant toujours 16 pieds de longueur à λ : soit le vrai angle $M = 1^\circ$, le vrai angle $N = 9^\circ$, & on trouvera le vrai angle $A = 3^\circ$. Posons derechef une erreur de $15'$ dans la mesure de l'angle N , au-dessous de sa juste valeur, & on trouvera l'angle A de $3\frac{1}{23}$ degrés, de sorte que l'erreur ne seroit en ce cas que d'environ $3'$. Ce dernier exemple nous est donc aussi favorable, que le premier nous a été contraire.

(C) Pour la seconde méthode du §. XL, je remarque que le pendule l' doit être un peu plus petit que λ , pendant que le premier pendule l doit être fort petit: par-là l'angle A deviendra d'autant plus petit, & l'angle M plus grand, & une erreur dans l'angle M sera presque insensible sur le vrai angle A , au lieu que sans cette précaution elle pourroit être fort grande. C'est ce que je vais encore

éclaircir par ces deux exemples, choisis pour notre dessein.

1°. Soit encore $\lambda = 16$ p. $l = 7$ p. $l' = 8$ p. le vrai angle $M = 1^\circ$, & le vrai angle A fera de 9° ; mais si on avoit pris ce vrai angle M de $15'$ trop petit, l'angle A en feroit devenu trop petit de $2^\circ 15'$, ce qui feroit encore une erreur beaucoup trop grande.

2°. Mais si on avoit pris $l = 1$ p. $l' = 15$ p. & qu'on suppose le vrai angle M de 14° , (car il fera beaucoup plus grand qu'auparavant) le vrai angle A ne feroit plus que d'un degré, & ensuite une erreur de $15'$ dans l'angle M , ne feroit plus qu'une erreur d'environ une minute pour l'angle A .

(γ) Comme l'angle M fera d'autant plus grand que la longueur l est plus petite, & que la longueur l' approche davantage de λ , on pourra rendre cet angle aussi grand qu'on voudra, & par-là on distinguera mieux le moment que les deux pendules se réunissent, & qu'ils auront pris l'un & l'autre la direction verticale, & cette remarque concerne la troisieme méthode du §. XLI. Il ne faut pourtant jamais approcher la longueur d'un pendule de trop près de la longueur λ , parce que nos hypotheses n'étant pas entierement justes, leur défaut deviendrait en ce cas trop sensible.

§. XLIII.

CE que nous avons dit jusqu'ici, nous servira à l'intelligence des manieres que je proposerai tantôt, pour prendre hauteur sur mer quand on ne voit pas l'horison, & qu'on se trouve par-là destitué de tous secours ordinaires: mais il conviendra de faire auparavant quelques remarques sur les pendules dont il faudra se servir. Comme ces pendules ne doivent être susceptibles d'autre

mouvement, que parallèlement au plan du quart-de-cercle, ou du demi-cercle, on voit bien que les fils chargés de poids, ne rempliroient pas cette condition, & qu'on doit leur substituer des pendules solides, qui ne puissent tourner qu'autour d'un axe perpendiculaire audit plan, & alors on doit entendre par la longueur du pendule, la distance entre le centre d'oscillation & le point d'appui. (§. XIII.)

Il y a deux manieres d'augmenter ces distances; la premiere est d'éloigner beaucoup le centre de gravité du point de suspension, & la seconde de l'en approcher beaucoup. Il faut adopter cette seconde maniere, pour ne pas allonger inutilement la verge du pendule, ce qui seroit sujet à plusieurs inconvéniens; on pourra donc rendre les longueurs l , l' & l'' aussi grandes qu'on voudra, avec des verges aussi petites qu'on voudra. On peut aussi diminuer tant qu'on veut lescites longueurs, sans raccourcir les verges, en jettant presque toute leur matiere autour de leur centre de gravité, & en les suspendant près du centre de gravité; ce qui découle du théoreme des balance-mens brachistochrones des corps, qu'on a démontré dans les

Les verges qui doivent servir de pendules, pourront être examinées avant que de les appliquer au demi-cercle, en les faisant balancer, & en comptant le nombre de leurs oscillations pendant un certain tems, d'où l'on connoitra fort exactement la distance de leur centre d'oscillation au point d'appui.

Comme on peut se trouver dans des circonstances différentes, qui demandent les longueurs l , l' & l'' , & surtout les deux dernieres, tantôt plus petites, tantôt plus grandes, (voyez les notes du §. XLII.) on pourra ajoûter aux verges une piece mobile tout le long de la verge, par le moyen de laquelle on pourra donner telle valeur qu'on

voudra à ces longueurs, après avoir marqué les points où il faudra arrêter cette piece mobile pour cet effet, & ces points pourront être déterminés, soit par le calcul, ou par des expériences préalables.

§. X L I V.

IL est encore à remarquer, que lorsqu'une des distances l , l' ou l'' seroit plus grande que λ , l'angle que le pendule feroit avec la verticale, en deviendroit négatif, comme dans la seconde Figure; & si elle étoit infinie, le pendule resteroit par lui-même constamment dans sa situation verticale; comme les valeurs des angles A , A' & A'' , données au §. xxxix le marquent. Nous obtiendrons par-là immédiatement tout notre but, s'il étoit possible de se mettre dans le cas; mais on ne peut pas sans doute avoir des pendules infiniment longs, & il seroit inutile de suspendre les pendules par leur centre de gravité, puisqu'ainsi suspendus, ils seroient indifférens à toute situation, pendant qu'ils devroient affecter constamment leur situation verticale. Cette remarque peut pourtant être en quelque façon utile pour une autre vûe, que nous dirons ci-dessous.

Si l'on faisoit $l' = 2\lambda - l$, l'angle A' deviendrait négatif, & précisément égal à l'angle A , de sorte que les deux pendules l & l' feroient constamment un angle égal avec la verticale, & pour avoir cette verticale, il n'y auroit qu'à partager en deux également, l'angle compris entre ces deux pendules: il n'est pas difficile d'imaginer une construction qui oblige un rayon de se trouver toujours au milieu des deux pendules, & alors ce rayon seroit de lui-même constamment vertical. Il est vrai que les angles négatifs, qui proviennent en prenant la longueur l' plus

grande que λ , ont beaucoup d'inconvéniens, & sur-tout celui de se composer difficilement dans cet état d'harmonie que nous supposons; mais il est bon de ne pas ignorer les ressources que la théorie pure fournit, pour sçavoir bien diriger ses vûes dans ces recherches.

§. X L V.

VOICI à présent comme on pourroit satisfaire à nos principes. AHB est un demi-cercle gradué (*Fig. 9.*), mobile, par le moyen d'une genouilliere, en tout sens sur son centre C , qui doit être en même tems son centre de gravité. AD & BE sont les deux pinnules percées en F & G , pour laisser passer les rayons de l'astre qu'on veut observer. Il faut ajoûter au demi-cercle un petit axe perpendiculaire, qui passe par le centre C , & qui doit soutenir trois regles librement mobiles autour de cet axe; ces trois regles sont destinées à faire l'usage des trois pendules du §. xxxix, indiquées par l , l' & l'' , & dont par conséquent les centres d'oscillation doivent avoir les propriétés marquées au §. xlii. J'ai représenté ces trois regles par MN , $M'N'$ & $M''N''$; enfin, je demande qu'il y ait un ressort, auquel, si l'observateur touche, les trois regles s'arrêtent tout aussi-tôt dans la situation qu'elles auront eue au moment de l'observation: après cela on examinera à loisir l'angle $N'CN$, que nous avons appelé M , & l'angle $N''CN$, que nous avons nommé N , sur quoi la dernière formule du §. xxxix, donnera l'angle A compris entre la regle NM & la verticale CH , c'est-à-dire, l'angle NCH , & si on ôte cet angle de l'angle BCN , qu'on pourra mesurer, on aura la vraie hauteur de l'astre O . Si les regles $M'N'$ & $M''N''$ se trouvoient du côté opposé, par rapport à la regle MN , tous ces angles deviendroient

negatifs, & il faudroit ajoûter l'angle NCH à l'angle NCB , pour avoir la hauteur de l'astre. Au reste, l'Observateur après avoir dirigé le demi-cercle vers l'astre, aura la précaution de ne toucher au ressort qu'au bout d'un certain tems, pour donner aux regles le tems de se mettre dans leurs balancemens réguliers.

§. XLVI.

Si l'on croit connoître la longueur λ avec assez de précision, pour pouvoir mettre en usage la méthode du §. XL, on pourra se passer de la troisieme regle $M''N''$, & simplement observer l'angle $N'CN$, & alors l'angle NCH fera $= \frac{\lambda - l}{l - l'} \times N'CN$, & la hauteur de l'astre observé fera $BCN \mp \frac{\lambda - l}{l - l'} \times N'CN$.

§. XLVII.

On pourroit encore profiter du §. XLI, en employant deux Observateurs, dont l'un observeroit le moment que les deux pendules se croisent, & le marqueroit à chaque fois à haute voix, & il ne sera pas difficile à l'autre Observateur, d'observer l'astre précisément dans un de ces instans, pouvant s'y préparer par la succession uniforme de ces momens, & les balancemens du vaisseau se faisant assez lentement. Mais le premier Observateur ne doit pas seulement remarquer le moment que les deux pendules se croisent, il doit encore observer sur le demi-cercle, le point H où ils se croisent, & le second Observateur poursuivra l'astre, non avec le demi-cercle, mais avec une alidade mobile, en prenant garde de ne pas toucher au demi-cercle; on pourroit mettre à l'alidade mobile,

une lunette garnie d'un micrometre, dont les fils seroient de différentes couleurs, & après s'être bien préparé, on observera, sans toucher davantage à l'alidade, le fil qui répondra à chaque fois à l'astre, & quand on auroit observé l'astre deux ou trois fois de suite, à peu près au même fil, & que l'autre Observateur auroit pareillement observé le point *H* à peu près au même endroit, on pourroit compter beaucoup sur cette observation. Cette méthode demande sans doute que les deux Observateurs concertent ensemble la maniere de faire leurs observations, & de s'avertir mutuellement, pendant l'observation, de plusieurs points; & elle a cet avantage par-dessus les deux premières, qu'elle n'a pas besoin de ce ressort qui arrête les pendules.

§. XLVIII.

ENFIN les §§. XIII & XLIV nous fournissent une quatrième maniere de prendre hauteur : elle est fondée sur ce que les corps suspendus par leur centre de gravité, conservent d'eux-mêmes une situation parallele à elle-même. Il est certain qu'une grande masse, librement mobile sur son centre de gravité, ne se détournera pas sensiblement de sa position pendant un tems considérable, de quelque façon qu'elle soit transportée par son centre de gravité : cette considération m'a fait naître une telle idée. On pourroit unir le demi-cercle *AHB*, garni d'une alidade mobile, à une piece fort lourde & pesante, en faisant que le centre de gravité du système soit précisément en *C*. Supposons que *AB* se trouvât pour un moment dans sa situation horisontale, il est sûr qu'elle ne s'en éloignera pas sensiblement pendant assez long-tems, & que l'Observateur pourroit cependant prendre hauteur à son aise. Je demande donc encore l'aide d'un autre Observateur, qui

dirige continuellement le demi-cercle, de façon que le pendule s'éloigne toujours également, dans ses balancemens de chaque côté, du point de 90° . J'ose assurer que cela lui sera fort facile, & qu'il n'aura pas beaucoup à faire pour cela : il pourra aussi, s'il l'aime mieux, employer le secours de deux pendules, & faire qu'ils se croisent au point de 90° . De l'une & de l'autre façon, il pourra être sûr que *AB* aura été constamment dans sa situation horizontale, & rien ne gênera cependant l'autre Observateur, de prendre hauteur tout comme sur terre. Cette méthode sera peut-être la plus facile pour la pratique.

Remarquons enfin que dans toutes ces méthodes, il faut être attentif à retenir le demi-cercle à peu près dans le plan vertical, sur-tout quand la hauteur de l'astre est un peu grande.

§. XLIX.

JE finirai ce Chapitre par une réflexion générale sur ce qu'il renferme. On aura remarqué sans doute, que je n'ai rien avancé avec précipitation, ou sur de légères apparences. J'avoue que nos méthodes sont encore sujettes à quelques imperfections ; mais je doute si l'on pourra jamais aller beaucoup plus loin, si ce n'est peut-être qu'on pourra perfectionner davantage ce que j'ai dit, & que je n'ai presque fait qu'indiquer. J'ai tâché de mettre à profit toutes les circonstances favorables, & cela en suivant toujours les principes incontestables de mécanique, qui m'ont fait reconnoître en même tems, combien étoient trompeuses les premières apparences de quelques autres manières, que je m'étois imaginées autrefois. Mais si d'un côté un amour sincère de la vérité m'empêche de parler avec trop de prédilection de nos manières de prendre hauteur sur mer, quand on ne voit pas l'horison, je me flatte

flate d'un autre côté, qu'on ne leur voudra rien ôter de ce qu'elles ont de réel & bien fondé. Elles soutiendront l'examen le plus rigoureux de la théorie, & tout leur succès dans l'exécution, dépendra particulièrement de cette question : Si on ne se trouve pas souvent dans le cas que le vaisseau balance presque régulièrement & uniformément, pendant quelque petit intervalle de tems. Les raisons que j'ai alléguées au premier Chapitre, jointes à l'expérience que j'en ai faite moi-même, doivent nous engager à regarder cette hypothese avec quelque complaisance ; & plus on se trouvera dans le cas, plus j'aurai de confiance à recommander nos méthodes, sur-tout si les agitations du vaisseau sont en même-tems peu sensibles. Je suis sûr même que souvent les circonstances seront si favorables, que ces manieres de prendre hauteur pourront être préférées dans le jour, aux manieres ordinaires, puisqu'enfin le secours de l'horison visible souffre plusieurs inconvéniens. Dans un calme parfait, nos méthodes seroient absolument les mêmes que par terre, pendant qu'on ne s'avisera jamais sur terre, de prendre pour la vraie horizontale la ligne qui rase la surface de la mer, sans parler de plusieurs autres défauts de l'Arbalète, & même du Quartier Anglois employés à cet usage.



CHAPITRE IV.

*Contenant les Considérations Astronomiques
nécessaires à notre sujet.*

§. L.

JE ne m'arrêterai pas ici aux premiers préliminaires ; on sçait que toute la question dépend de la maniere de déterminer le passage d'un *astre connu* quelconque, au méridien du lieu où l'on se trouve ; il faut donc que l'on connoisse la position de l'astre qu'on veut observer, & c'est en quoi notre sujet differe de celui que l'Académie a proposé pour l'année 1729 : car on peut trouver la hauteur du pole, que l'on demandoit alors, moyennant un astre dont on ignore entierement la position, en observant trois fois sa hauteur verticale avec les deux intervalles de tems, d'où on peut déduire la hauteur du pole, la déclinaison de l'astre, & le moment de son passage au méridien, comme j'ai démontré dans le IV vol. des Mémoires de Peterbourg, pag. 89. quoiqu'un sçavant Géometre crût ce Problème indéterminé ; ainsi cette condition ne restreint pas notre présent Problème plus qu'il ne faut : il faudra toujours supposer, que l'astre qu'on veut observer, le Soleil & le pole, fassent un triangle entierement connu ; après quoi nous aurons deux cas à considérer : le premier est de supposer la hauteur du pole connue, & le second, de traiter cette hauteur comme entierement inconnue.

§. L I.

Il est facile de voir, qu'en supposant l'élévation du

pole donnée, on n'a qu'à observer une seule fois la hauteur d'un astre connu, pour en déterminer l'heure; car l'arc du méridien, depuis le Zénith jusqu'au Pole, sera donné, puisque c'est le complément de l'élévation du Pole; l'arc vertical, depuis le Zénith jusqu'à l'astre, sera pareillement connu par l'observation; & enfin l'arc compris entre le pole & l'astre, est donné par la déclinaison de l'astre connue; les trois arcs forment donc un triangle connu, & on y trouvera par la Trigonométrie sphérique, l'angle au pole, qui mesure le tems qu'il faut à l'astre pour arriver jusqu'au méridien.

On ne sçauroit douter que ce ne soit ici la meilleure méthode Astronomique, & la plus simple; car on n'a pas toujours le tems de prendre de bonnes hauteurs correspondantes, & d'ailleurs celles-ci n'ont aucun autre avantage ici, que celui d'abrégier le calcul, qu'on doit compter pour rien, quand il s'agit de perfectionner les Arts & les Sciences: au reste, elle est trop facile pour qu'elle ait pû échapper aux Astronomes: mais je ne sçache pas qu'on ait examiné de même ce qu'il faut faire, pour mettre cette méthode dans sa plus grande perfection; il ne m'est donc pas permis de me dispenser de cette recherche.

§. L I I.

LE grand but doit être ici, qu'une même erreur commise dans l'observation, influe le moins sur l'heure cherchée. Or il est évident que pour cet effet, il faut choisir de tous les astres qu'on peut observer, celui qui demande le moins de tems pour s'élever ou se baisser d'un petit arc vertical donné, à moins qu'il n'y ait d'autres inconvéniens de plus grande conséquence. Supposons premierement un astre dont on veuille prendre la hauteur, & examinons

dans quel point de son parallele il doit se trouver, pour être dans sa situation la plus avantageuse. Pour cet effet, soit le sinus total $= 1$, le sinus de l'élévation du pole $= s$, & le sinus de la déclinaison de l'astre $= t$, & qu'il s'agisse de déterminer la hauteur verticale de l'astre, telle que le moment de l'observation soit le plus favorable; je dis qu'il faut ici distinguer deux cas.

Le *premier cas* est quand s est plus petit que t , & dans ce cas, il faut que l'astre se trouve au point où le vertical touche le parallele, c'est-à-dire, dans le point où l'angle compris entre le vertical, qui passe par l'astre & l'arc tiré du pole à l'astre, soit un angle droit, & un tel point existe toujours dans le cas présent, & le calcul m'a fait voir, que l'astre se trouve audit point, lorsque le sinus de la hauteur de l'astre est $= \frac{s}{t}$. Le Théorème enseigne le moment qu'il faut attendre pour observer un astre donné, ou quel est de tous les astres d'une même déclinaison, celui qu'il faut observer dans un tems donné. Il nous fait voir aussi, que les astres qui se trouvent du même côté avec le pole, doivent être préférés aux astres qui sont dans l'hémisphère opposé, ceux-ci ne nous permettant pas de profiter de cet avantage; & la regle nous dit alors simplement, qu'il faut observer l'astre le plus près de l'horison que l'on peut. Soit, par exemple, l'élévation du pole de 30° , la déclinaison de l'astre de 45° , on aura $\frac{s}{t} = \frac{1}{2}$, qui marque qu'il faudroit observer la hauteur de cet astre, lorsqu'elle est à peu près de 45° ; ou s'il y avoit plusieurs astres de la même déclinaison, & qu'on voulût faire l'observation sur le champ, il faudroit choisir celui qui approche davantage de cette hauteur.

Le *second cas* est celui qui fait s plus grand que t ; il n'y a alors aucun vertical qui touche la parallele de l'astre, &

il faut recourir à la méthode des plus grands & des plus petits, en exprimant analytiquement l'angle compris entre le vertical tiré à l'astre, & l'arc tiré du pôle à l'astre, & en faisant que cet angle soit le plus grand qu'il est possible. En satisfaisant à cette condition, j'ai trouvé qu'il faut que le sinus de la hauteur de l'astre soit $= \frac{t}{s}$. Si donc l'élévation du pôle étoit, par exemple, de 45° , & la déclinaison de l'astre de 30° du côté du pôle, on trouveroit encore $\frac{t}{s} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, & il faudroit derechef attendre que la hauteur de l'astre fût d'environ 45° pour l'observer, ou choisir de tous les astres de la même déclinaison, celui qui approcheroit davantage de cette hauteur, si on ne vouloit pas différer l'observation.

Les Théorèmes que je viens de donner sont souvent de grande conséquence, & les observations de jour, à faire sur le Soleil, demandent la même attention. On peut bien avoir quelques raisons pour ne les pas suivre ponctuellement : mais il ne faudra jamais s'en éloigner beaucoup. Si on vouloit prendre la hauteur d'un astre qui seroit près du méridien, dans la vûe de trouver l'heure, la moindre erreur dans l'observation, jetteroit une erreur énorme sur l'heure. Les Théorèmes sont même utiles sur terre, pour prendre à propos les hauteurs correspondantes du Soleil, ou d'un autre astre, autant que les réfractions permettent d'y être attentif. En examinant les observations qui sont rapportées par M. le Monnier, dans son Histoire céleste, Ouvrage que le Public ne sçaura jamais reconnoître autant qu'il le mérite, j'ai remarqué qu'on n'a pas toujours assez bien choisi le tems de prendre ces hauteurs correspondantes, pour régler la pendule, ni celles des étoiles, dont on vouloit déterminer l'ascension droite. J'avoue que ces remarques sont de fort petite

conséquence à l'égard des observations sur terre, à cause de la grande précision des observations : mais il me semble aussi que la grande perfection de l'Astronomie, de laquelle nous sommes redevables aux auspices de l'Académie, ne doit plus nous permettre de négliger le moindre avantage.

S. L I I I.

Nous venons de déterminer le point du parallele donné le plus avantageux : il reste à déterminer quel est le parallele le plus utile pour l'exactitude de l'observation principale. Je dis donc à cet égard, & la chose est facile à voir, que tout le reste étant égal, il faut choisir de tous les astres, celui qui a la moindre déclinaison, & un tel astre doit toujours être observé le plus près de l'horison qu'il est possible : l'incertitude des réfractions est à la vérité un obstacle à cette regle ; mais il faudroit sur mer, se trouver dans des circonstances extrêmement favorables, pour porter quelque attention à cet inconvénient. Supposé cependant qu'on ne veuille, ou qu'on ne puisse observer aucun astre au-dessous d'une certaine hauteur, dont le sinus soit $= q$, je dis que la déclinaison la plus utile aura pour son sinus $s q$; si donc l'élévation du pole étoit de 30° , & qu'on prenne pour q le sinus de 10° , la déclinaison la plus utile seroit de $4^{\circ} 59'$ du côté du pole.

On peut remarquer encore, qu'il faudra éviter les astres, qui, dans leur culmination, passent près du Zénith, ou dont la déclinaison est à peu près égale à la hauteur du pole, parce que ces astres devroient être observés, selon nos regles, près du Zénith, & que ces observations sont incommodes, & plus incertaines sur mer.

§. LIV.

EXAMINONS à présent quelle sera la meilleure manière de trouver l'heure, en supposant la hauteur du pôle inconnue. Le secours des hauteurs correspondantes est excellent sur terre, mais il ne l'est pas toujours sur mer, où l'on doit profiter quelquefois d'un moment de beaux tems; d'autres fois on se trouvera trop près de l'aube du jour, pour pouvoir exécuter cette méthode avec tant soit peu de succès pendant la nuit: j'en parlerai cependant en son lieu. Voici donc deux autres méthodes plus générales, dont la première renfermera celle des hauteurs correspondantes, comme un cas particulier. La *première méthode* est de prendre deux fois la hauteur d'un même astre, en remarquant aussi l'intervalle de tems d'une observation à l'autre. La *seconde méthode* consiste à prendre la hauteur de deux astres différens, soit en même tems, soit successivement l'une après l'autre, en observant encore l'intervalle de tems.

§. LV.

VOICI le calcul pour la première méthode. Soit HZH le Méridien (*Fig. 10.*); Z le Zénith; P le Pôle; HH l'horison; a la position de l'astre à la première observation; b sa position à la seconde observation: qu'on tire au pôle les arcs aP & bP , comme aussi les arcs verticaux Za & Zb ; il y aura de connu l'arc aP ou bP , qui fait le complément de la déclinaison de l'astre; ensuite l'angle aPb , qui fait l'angle horaire d'une observation à l'autre; & enfin les arcs Za & Zb , qui sont les complémens des hauteurs de l'astre observées: qu'on joigne les points a & b par l'arc de grand cercle ab , qui se trouvera comme faisant

la base du triangle aPb , duquel on connoîtra les deux côtés égaux avec l'angle intercepté; de-là on connoîtra aussi tout le triangle aZb : dans ces deux triangles connus, on cherchera l'angle Pba , & l'angle Zba , dont la différence donnera l'angle ZbP . On connoîtra donc dans le triangle ZbP , les deux côtés Zb & Pb , avec l'angle intercepté ZbP , & ainsi on pourra calculer l'angle ZPb , qui fait l'angle horaire cherché entre la seconde observation, & le moment du passage de l'astre par le méridien. Si l'on cherche aussi le côté ZP , on en connoîtra en même tems le complément de l'élévation du pole.

§. L V I.

J'AJOUTERAI ici les remarques les plus essentielles qu'on peut faire, sur cette maniere de trouver l'heure.

(a) Il faut toujours faire les deux observations fort éloignées l'une de l'autre, & si les circonstances ne permettoient pas d'accorder pour le moins une heure d'intervalle entre les deux observations, il vaudroit mieux sur mer, suivre la méthode du §. LI, sur une simple estime de la hauteur du pole, qu'on connoît toujours à peu près.

(b) Comme la premiere observation sert proprement à déterminer l'heure, & la seconde à déterminer la hauteur du pole, on pourra faire l'une des observations, lorsque l'astre se trouve à peu près dans cette situation, que nous avons déterminée au §. LII, & la seconde, lorsque l'astre est près du méridien: cette seconde observation déterminera immédiatement la hauteur du pole, à cause de la déclinaison donnée de l'astre, après quoi la premiere observation donnera l'heure encore, par la méthode du §. LI; on abrégera par-là le calcul. Si depuis la premiere observation

observation jusqu'à la seconde, le vaisseau avoit fait beaucoup de chemin en latitude, il faut en faire l'estime, & réduire la hauteur du pôle de la seconde observation, à celle qui répondroit à la premiere.

(c) Quand on a tout le loisir d'observer l'astre des deux côtés du méridien, sous un grand intervalle de tems, on pourra encore éviter toute la peine du calcul, en suivant la méthode des hauteurs correspondantes, qui est comprise dans cette méthode générale. On pourra encore avoir besoin ici d'une petite correction, par rapport au chemin du vaisseau, depuis la premiere jusqu'à la derniere observation, tant en longitude qu'en latitude. Cette correction se fera, en supposant que le moment de la culmination de l'astre réponde à l'endroit où le vaisseau se sera trouvé au milieu entre les deux observations; c'est-à-dire, que le méridien trouvé par la regle, ne sera pas pour l'un des deux endroits où l'on aura fait l'observation, mais pour le milieu de ces deux endroits.

§. L V I I.

LA méthode précédente servira particulièrement pour les observations de jour, où on ne voit que le Soleil, & où on ignore en même tems la hauteur du pôle: mais pour les observations de nuit, on fera presque toujours dans des circonstances à pouvoir suivre la seconde méthode du §. LIV; & par-là on évitera l'inconvénient de ce grand intervalle de tems entre les deux observations, nécessaire à la méthode précédente.

Supposons qu'on ait pris la hauteur de deux différens astres en même tems, le calcul pour en trouver l'heure, sera entierement le même que celui du §. LV. Car, supposé l'un des astres en *a*, l'autre en *b* dans la même Figure,

expliquée audit §. LV, alors ab marquera la distance des deux astres connus, qu'on peut calculer par leur position en longitude & en latitude, marquées l'une & l'autre dans les Tables; Pa & Pb seront les complémens de leurs déclinaisons données, quoiqu'inégales; Za & Zb sont les complémens de leurs hauteurs observées. On connoît donc encore entierement les triangles aPb & aZb , & on trouvera l'angle ZbP , en prenant la différence des angles Pba & Zba , après quoi on connoît tout le triangle ZPb , & par conséquent l'angle ZPb , qui détermine le moment du passage de l'astre b par le méridien.

§. LVIII.

COMME il est cependant impossible de prendre deux hauteurs en même tems, on pourra les prendre immédiatement l'une après l'autre, & un petit intervalle de tems ne peut être de conséquence dans les observations sur mer, si sujettes à un grand nombre d'imperfections: si cependant on veut, ou si on croit y devoir faire attention, il faudra observer l'intervalle de tems de la premiere observation à la seconde, & puis faire le calcul comme il suit.

Supposons qu'à la premiere observation on ait observé l'astre en a , & qu'au même moment l'autre astre se soit trouvé en b : considérons ensuite, que du moment de la premiere observation jusqu'à la seconde, l'astre soit venu de b en c , & tirons les arcs cP , cZ & ca , l'angle cPb sera donné par l'intervalle de tems observé; qu'on ajoute cet angle à l'angle bPa , qui est toujours connu par la position mutuelle de deux astres, & la somme marquera l'angle cPa ; de-là on pourra calculer le côté ca , & ensuite l'angle cherché cPZ , tout comme dans le précédent article.

§. L I X.

POUR bien choisir les deux astres, on pourra faire le même raisonnement que nous avons fait dans la note (b) du §. LVI. On choisira l'astre *a*, qui contribue le plus à déterminer l'heure, conformément aux règles des §§. LII & LIII, & l'autre astre *b*, qui doit servir particulièrement à trouver la hauteur du pôle près du méridien, sans se mettre beaucoup en peine de sa déclinaison. Ce sont là les positions les plus avantageuses.

Si l'astre *b* a été observé assez près du méridien, pour que sa hauteur observée ne puisse pas différer sensiblement de sa vraie hauteur méridienne, elle déterminera par sa déclinaison donnée immédiatement, la hauteur du pôle, & nous mettra en état de calculer le passage de l'astre *a* au méridien, par le calcul fort simple du §. LI : mais hors de ce cas, il faudra faire le calcul comme nous avons dit au §. LVII, si les deux observations ont été prises fort près l'une de l'autre ; ou conformément au §. LVIII, si les deux observations ont été éloignées.

Cette méthode a ce grand avantage sur la précédente, qu'un moment de beau tems suffit pour la pratiquer : on ne craint ici ni les nuages, ni un trop prompt retour du jour ; elle ne demande non plus cette correction toujours douteuse, que demande le chemin que le vaisseau a fait d'une observation à l'autre.

§. L X.

VOILA nos méthodes générales de déterminer le moment du passage d'un astre au méridien, qui, par le moyen des Tables des ascensions droites, fera connoître

le passage du Soleil au méridien, & par conséquent l'heure cherchée. On n'a qu'à faire toutes les combinaisons des conditions, qui font de notre sujet un Problème déterminé, & qu'à connoître très-superficiellement la nature des observations Astronomiques qu'on peut faire sur mer avec quelque succès, pour être persuadé d'abord que nos méthodes de trouver l'heure sur mer, sont les meilleures qu'on puisse donner dans l'Astronomie, & cela tant relativement aux autres, que par rapport à elles-mêmes. Il seroit facile d'en imaginer un grand nombre d'autres, mais ce seroit s'alembiquer inutilement l'esprit. J'en dirai cependant encore une, qui me paroît pouvoir mériter quelque attention particulière.

§. L X I.

VOICI cette dernière méthode, pour le cas où la hauteur du pôle est connue. Elle consiste simplement à attendre & observer le moment, que deux astres connus quelconques se trouvent dans un même vertical; après quoi on fera le calcul comme il suit.

Soit P le pôle; (*Fig. 11.*) Z le zénith; HH l'horison, Zc le vertical qui passe par les deux astres a & b , & qu'on tire les arcs aP & bP ; on cherchera d'abord dans le triangle connu aPb , l'angle abP , dont le complément à deux droits donnera ensuite l'angle ZbP , qui déterminera le triangle ZbP , de sorte qu'on y pourra trouver l'angle cherché bPZ .

Si la hauteur du pôle n'étoit pas connue, on pourroit faire une pareille observation sur deux autres astres, en remarquant aussi l'intervalle de tems entre les deux observations: car on en peut encore déduire le passage de l'un des astres par le méridien, & cela par la simple résolution

de plusieurs triangles , ce que je me contenterai d'avoir simplement indiqué , pour n'être pas trop prolix ; je ne dirai rien non plus , par la même raison , sur le choix des astres , qu'il faudroit faire , quoique très-essentiel à cette méthode. Mon but principal , n'est ici que de faire voir , que sans connoître immédiatement aucune hauteur , on peut trouver l'heure & même l'élevation du pôle , uniquement par le passage de deux astres à un même vertical ; je dis sans connoître *immédiatement* aucune hauteur , parce que les hauteurs des astres observés , peuvent se déterminer par le calcul. Voilà donc en même tems une maniere de prendre hauteur sans aucun instrument gradué , sans connoître aucun angle , & par le seul secours de la direction verticale , quoique cette direction ne soit connue que par des momens interrompus. Ces sortes de méthodes particulieres méritent donc d'autant plus d'attention , que par nos méthodes exposées au troisieme Chapitre , on peut à chaque balancement du vaisseau , reconnoître la situation verticale des regles MN & $M'N'$. Le §. XLVIII nous fournit même une maniere facile & assez exacte de conserver la direction AB (*Fig. 9.*) constamment dans sa direction horisontale , de sorte que si on y ajoute une regle immobile perpendiculaire , celle-ci conservera constamment sa direction verticale. Je suis sûr même que dans les tourmentes violentes , on pourroit trouver l'heure à peu près , sur la simple estime du passage de deux astres à un même vertical ; l'homme se formant une habitude naturelle à reconnoître la position verticale avec une grande exactitude , qui sera même surprenanté & incroyable , dans ceux qui s'y seront habitués & perfectionnés ; & si l'on vouloit faire estimer par un grand nombre de personnes ainsi habituées , le moment d'un tel passage , & puis prendre l'estime moyenne , en rejetant les estimes manifestement

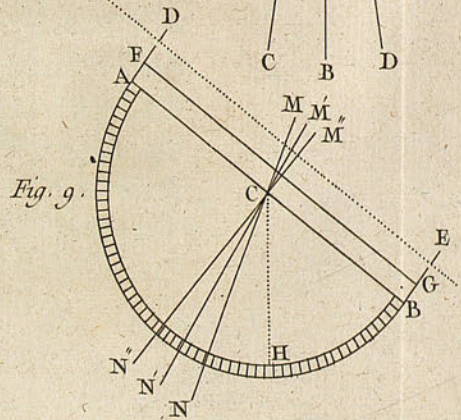
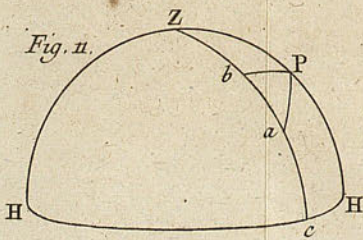
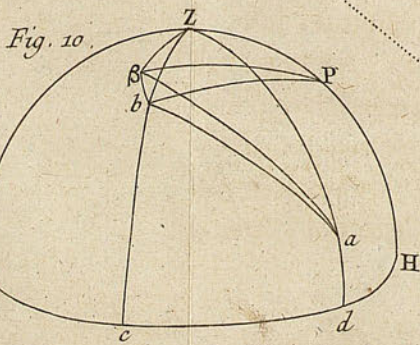
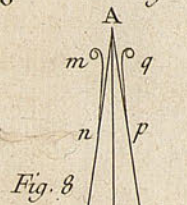
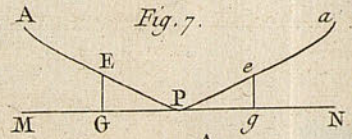
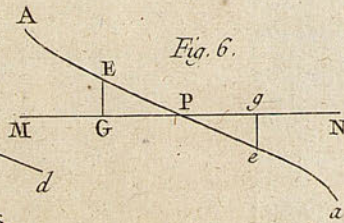
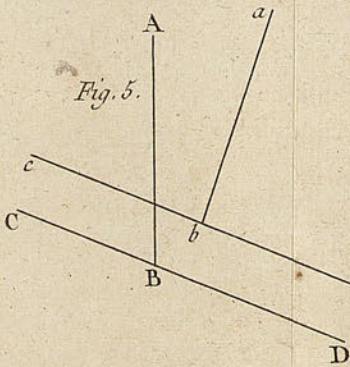
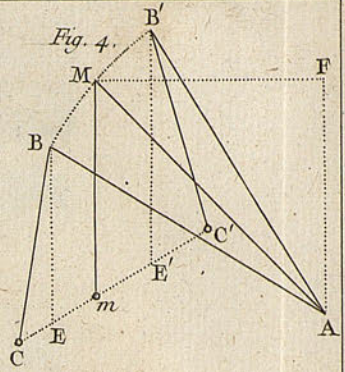
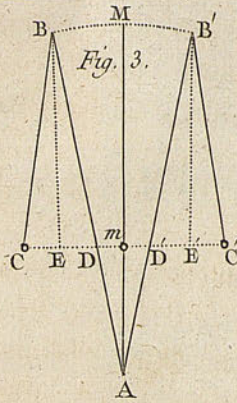
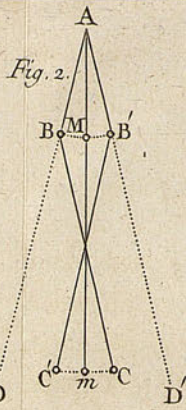
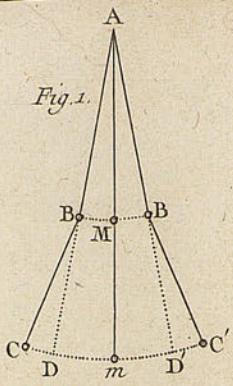
fausses , elle ne pourroit manquer d'être fort juste , n'y ayant absolument point de raison pourquoi on devroit se tromper , plutôt d'un côté que d'un autre.

§. L X I I.

Je ne sçais si les méthodes que je viens de donner sont toutes nouvelles : si d'autres les ont remarquées & décrites avant moi , comme cela se peut très-facilement , je n'aurois pas manqué de les citer , si je l'avois sçu. Mon intention n'a pas tant été de donner de nouvelles méthodes , que d'exposer les meilleures.

Je ne dirai rien d'un grand nombre de réductions & de corrections qu'il faut faire , tant par terre que sur mer : elles sont connues de tous les Astronomes , & devroient l'être de tous les bons Pilotes. Toutes les questions Astronomiques dépendent absolument les unes des autres , & on ne sçauroit bien traiter l'une , sans un examen exact de toutes les autres. On m'excusera donc , si je n'entre pas dans un plus grand détail , puisque pour le faire , il faudroit tout un cours tant d'Astronomie , que de Navigation. S'il m'étoit cependant arrivé d'omettre quelques éclaircissemens essentiels , je tâcherai d'y suppléer , si on vouloit bien me faire l'honneur de me les demander. C'est dans cette vûe que j'ajouterais mon nom dans un billet cacheté , qu'on pourra ouvrir à tout événement , si on le trouve à propos.







SUITE DES RECHERCHES

MECHANIQUES

ET ASTRONOMIQUES, &c.

MARQUEES PAR LA DEVISE

Et quandoque Olitor fuit opportuna locutus.

Qui tend principalement à fournir aux Navigateurs les moyens Mécaniques les plus sûrs pour faire en mer, malgré l'agitation du vaisseau, les observations dont on peut conclurre l'heure.

Est aliqua prodire tenus, si non datur ultra.

§. 1. **L**A recherche des moyens les plus sûrs pour faire en mer, malgré l'agitation du vaisseau, les observations Astronomiques, m'a toujours paru des plus intéressantes pour la Navigation. J'en ai fait l'objet de mes méditations déjà depuis l'année 1728, que l'Académie avoit proposé pour sujet : *Quelle est la meilleure méthode d'observer les hauteurs sur mer, par le Soleil, & par les Etoiles, soit par des Instrumens déjà connus, soit par des Instrumens de nouvelle invention, sur lequel j'ai eu l'honneur d'envoyer à l'Académie un Discours, qui portoit la même devise que j'ai prise il y a deux ans. Je croyois alors que les fluides dans des tuyaux communicans, conserveroient mieux le niveau, qu'un fil chargé d'un poids ne*

conserve sa situation verticale : mais je n'avois pas assez examiné cette idée ; & y ayant renoncé bien-tôt après, j'ai souvent pensé depuis, pour ma propre satisfaction, à d'autres moyens plus sûrs & plus exacts, de pouvoir faire en mer les observations Astronomiques, mais toujours sans aucun succès, jusqu'à ce qu'animé par le sujet proposé par l'Académie pour l'année 1745, je me suis appliqué de nouveau à cette matiere, ne désespérant pas d'imaginer enfin quelque expédient, d'autant que je m'étois exercé avec toute l'application possible, à connoître les loix mécaniques qui m'y pouvoient conduire. Ces efforts réitérés m'ont enfin mené aux expédiens que j'ai exposés au long, dans les recherches que j'ai eu l'honneur d'envoyer à l'Académie il y a deux ans. Les trois quarts de ces recherches ne tendent qu'à cette fin, que je prévoyois bien devoir être principalement celle de l'Académie, puisque les théories Astronomiques sont assez connues. Depuis ce tems, j'ai toujours été, je l'avoue, fort satisfait des principes, sur lesquels sont fondés les moyens que je propose. J'ose dire plus, & je l'ose dire avec confiance, que ces principes sont les seuls qu'on puisse mettre à profit pour notre sujet ; mais j'avoue aussi que j'ai été moins content de l'usage que j'en ai fait. Si quelque autre a suivi la même route, il peut avoir proposé de meilleurs moyens pour faire ces observations la nuit, quand on ne voit pas l'horison ; sinon il n'aura rien fait du tout, & se sera laissé tromper par de fausses apparences, comme cela m'est arrivé autrefois. J'ai fait ces mêmes réflexions au §. XLIX de mes recherches. N'étant donc pas persuadé qu'il fût impossible de faire une application plus heureuse de nos principes, je n'ai cessé d'y penser, même après avoir déjà envoyé à Paris ma piece, quoique je ne crusse pas alors qu'un plus grand succès pût m'être de quelque utilité

utilité auprès de l'Académie, n'ayant plus pour but que l'avancement des Sciences & des Arts, si j'étois assez heureux d'y pouvoir contribuer. Il m'a paru que ces derniers efforts n'avoient pas été tout-à-fait sans succès, & j'en ai eu d'autant plus de plaisir, d'apprendre le jugement de l'Académie sur le prix de 1745, qui me met à même de soumettre encore mes nouvelles idées à ses lumières. Je me propose donc de mettre mes principes & leur nécessité dans un plus grand jour; de faire quelques remarques sur l'application que j'en ai faite, & d'exposer surtout, les nouvelles idées que je me suis formées. Tout cela fera une espece de Commentaire de ma premiere Dissertation, que je prie par conséquent le Lecteur d'honorer de son attention, avant que de commencer la lecture de ces additions.

§. 2. Il est évident que pour faire les observations la nuit, quand on ne voit pas l'horison, il faut nécessairement avoir recours aux mêmes instrumens qu'on emploie sur terre. Car ni l'Arbalète, ni le Quartier Anglois, ne peuvent être en ce cas d'aucun usage. Tous ces instrumens sont destinés à la mesure de certains angles que les astres font, soit relativement au ciel, soit relativement à l'horison de la terre; & ces derniers, qui sont toujours requis pour pouvoir trouver l'heure, demandent tous qu'on connoisse la direction horizontale. Le seul principe pour connoître cette direction, est l'action de la pesanteur, toujours perpendiculaire à l'horison: mais l'action de la pesanteur est continuellement troublée & dérangée par l'agitation du vaisseau; & c'est à cet inconvénient qu'il faut tâcher de remédier. Voilà un Problème bien vague; on ne sçait par où commencer. On se formera mille idées, & après les avoir examinées chacune à part, on les rejettera toutes l'une après l'autre. J'ai donc d'abord tâché de

couper le chemin à toutes les tentatives inutiles, & voici comme je m'y suis pris.

§. 3. Tout ce qui est affermi au vaisseau fait les mêmes mouvemens angulaires, & ne sçauroit servir à donner une certaine direction : la pesanteur alors n'agit en rien, & le corps est simplement emporté par l'agitation du vaisseau ; il faut donc laisser au corps une certaine liberté de recevoir & de suivre l'impression de la pesanteur. Pour recevoir entierement l'impression de la pesanteur, il n'y a qu'un moyen, sçavoir de le détacher du vaisseau, & de le laisser tomber : mais la vitesse initiale & incertaine, que l'agitation du vaisseau auroit donnée au corps au premier moment qu'on l'eût détaché, lui feroit décrire une parabole indéterminée, de laquelle on ne pourroit rien conclurre pour la direction verticale. Il est vrai que si l'agitation du vaisseau pouvoit être censée uniforme pour un petit intervalle de tems, la route parabolique du corps tombant, ne laisseroit pas de faire une ligne droite verticale, par rapport aux objets unis au vaisseau ; & la considération de ce principe m'a fait penser qu'on pourroit ajouter au quart-de-cercle, une clepsidre à mercure, dont le filet serviroit à mettre le quart-de-cercle à chaque moment dans sa juste situation, ou à en connoître l'inclinaison. J'ai même examiné quelles précautions on pourroit prendre pour tirer le plus grand avantage de ce moyen, & je suis sûr qu'on pourroit perfectionner assez cette méthode, pour rendre les erreurs fort peu sensibles : mais j'ai meilleure opinion des methodes que j'ai déjà données dans le troisieme Chapitre de mes Recherches, & beaucoup meilleure encore de celle que je donnerai ci-dessous. Cela m'a engagé à abandonner ce principe, de connoître la direction horisontale en mer pendant la nuit. Il faut donc dès-lors, que le corps qui doit concourir

à déterminer une certaine direction tienne au vaisseau, & y tienne avec une certaine liberté de recevoir & de suivre l'impression de la pesanteur en partie : mais tout corps qui tient au vaisseau, de quelque façon que ce soit, doit être emporté par le vaisseau ; & comme il lui reste une certaine liberté de se mouvoir, les parties du système auront une inertie relativement à ce mouvement ; cette inertie se joint à l'action de la pesanteur, & la force résultante est tout-à-fait variable & incertaine, s'écartant de la direction verticale tantôt plus, tantôt moins.

§. 4. On voit aisément par ce que je viens de dire, que si on veut considérer les agitations du vaisseau comme tout-à-fait irrégulières, & irrégulières en tout sens, qui ne soient absolument assujetties à aucune loi, il faut renoncer à toute espérance de pouvoir faire en mer les observations avec une certaine exactitude, sans le secours de l'horison visible. Comment prétendrait-on faire les observations sur terre, si la pesanteur changeoit continuellement de force & de direction, sans observer aucune loi dans ses variations ? C'est cependant là le cas où l'on se trouveroit sur mer. Ces réflexions serviront de pierre de touche, pour juger de toutes les méthodes qu'une imagination trop fertile pourroit suggérer, & qui, examinées selon les vraies loix de la mécanique, pourront toujours être démontrées fausses, avec la même facilité qu'on pourra toujours démontrer la fausseté d'un mouvement perpétuel purement mécanique, qui souvent ne laisse pas d'avoir quelque apparence de réalité. Je dis donc qu'en ce cas, il faudroit recourir à l'Arbalète, ou au Quartier Anglois, & si la nuit étoit obscure, tâcher de rendre l'horison visible, ce qu'on pourroit faire par plusieurs moyens.

§. 5. Je crois donc avoir démontré la nécessité absolue

de chercher quelque circonstance dans les agitations d'un vaisseau, qui permette de déterminer la direction de la pesanteur, & d'en séparer l'effet d'avec celui de l'inertie des corps; & par un bonheur admirable, une telle circonstance se trouve dans les agitations du vaisseau, puisque j'ai démontré que deux ou trois balancemens de suite, qui puissent être censés égaux, suffisent pour déterminer la direction verticale. Une condition si simple, & en même tems si conforme à la nature, auroit surpassé infiniment toute mon attente, si le hasard ne m'avoit conduit auparavant à rechercher la nature des balancemens harmonieux des parties différentes d'un système, qui fait un des plus importans sujets que je connoisse dans la Mécanique, & sur-tout dans la Physique.

§. 6. Puisque c'est-là le seul principe utile que la théorie admette, & que rien n'est faisable dans la pratique, qui soit démenti par une bonne théorie, nous sommes réduits à tourner toute notre attention du côté de ce principe, pour voir de quelle utilité il peut être dans la pratique. Cet examen se réduit à deux points, qui sont la réalité du principe dans les agitations du vaisseau, & la construction d'une machine fondée sur ce principe, s'il est trouvé juste.

§. 7. Si la mer étoit unie, & qu'on eût imprimé au vaisseau quelque balancement, on conviendra avec moi, que le vaisseau ne manqueroit pas de continuer de lui-même ses balancemens pendant un tems considérable, & que ces balancemens ne diminueroient que peu à peu, & même insensiblement, à cause de la masse énorme du vaisseau. Si au contraire le vaisseau est supposé entièrement en repos dans une mer agitée, il ne fera balancé que peu à peu, & il lui faudra un tems considérable pour être agité dans toute sa force. Une seule lame peut bien élever le

vaisseau, mais non pas le faire rouler ou tanguer dans toute sa force, ni lui faire changer brusquement ses roulis ou tangages, qui lui seront déjà imprimés, & il n'est question ici que de ces deux mouvemens. L'action successive des lames de la mer, ne fait qu'entretenir les agitations du vaisseau, & en prévenir les diminutions, tout comme dans une horloge chaque coup de dent dans la roue de rencontre, ne produit pas tout le balancement du pendule, mais ne fait que prévenir une diminution insensible, qu'il souffriroit sans cela. Cette raison me paroît suffisante, pour dire que les balancemens d'un vaisseau sont naturellement tels que nous les supposons, & qu'il faut un grand concours de causes accidentelles, pour que les balancemens qui se suivent immédiatement, soient fort différens entre eux. J'ai vû des lames se briser contre le vaisseau, sans que ses roulis en fussent changés considérablement; j'ai vû aussi tous les branles & autres choses suspendues sous le pont, faire leurs allées & venues avec beaucoup d'harmonie, au lieu qu'elles auroient été jettées, l'une d'un côté, l'autre d'un autre, si les agitations du vaisseau étoient toujours tout-à-fait irrégulières. Ceux-là même qui n'auront vû que de dessus les côtes les vaisseaux balancer, conviendront de notre principe, aurant confirmé par toutes sortes d'expériences, qu'il est fondé sur la raison. Cependant je demande simplement qu'on suppose arriver quelquefois, & si l'on veut par hasard, ce qui doit arriver presque toujours, & par un mécanisme naturel : car deux ou trois balancemens de suite, pleins & égaux, qu'on reconnoît facilement, & que l'Observateur peut toujours mettre à profit, suffisent pour notre dessein, & feront le même effet que s'il y en avoit eu mille; & ces deux ou trois balancemens pourroient être encore assez inégaux, sans que cette inégalité causât une erreur

considérable dans l'observation à faire. Je conclus donc qu'on peut admettre, sans le moindre scrupule, le principe en question, pour l'usage que je me propose d'en faire.

§. 8. Après avoir si bien établi, tant dans ces Additions, que principalement dans ma premiere Dissertation, la réalité du principe qui doit faire la base de toutes les machines, dont on peut encore espérer quelque succès; je ne dois pas douter que l'Académie n'accorde son approbation aux recherches que j'ai faites dans la premiere partie de ma Dissertation, qui contient des Théorèmes purement mécaniques, tirés d'une théorie beaucoup plus générale, que j'avois trouvée depuis quelques années. Ces Théorèmes nous mettent en état de tirer un plus grand usage des horloges en mer, & sur-tout, de connoître à chaque instant la direction verticale, de laquelle dépend uniquement notre question principale. Ces Théorèmes sont d'ailleurs d'une nature à pouvoir être facilement confirmés par des expériences. Je ne m'arrêterai donc pas à une plus ample exposition, n'étant plus question que de voir si nos Théorèmes peuvent être appliqués avec quelque succès, au but que nous nous proposons. Je dirai donc d'abord quelques mots, sur l'application que j'en ai déjà faite dans mes recherches antérieures, & puis je proposerai une nouvelle maniere de mettre ces Théorèmes à profit, dans la pratique, que je crois plus sûre & plus facile à remplir pour les Observateurs.

§. 9. Les moyens que j'ai donnés pour connoître la vraie direction verticale en mer, malgré l'agitation du vaisseau, & sans le secours de l'horison, sont fondés sur la mesure des angles, que font entre eux plusieurs pendules mobiles autour d'un même axe; & j'ai décrit la machine qu'on pourroit construire pour connoître lesdits angles. (§. XLV.) C'est-là le fondement de ma méthode générale, sur

laquelle je ferai quelques réflexions, en priant le Lecteur de voir dans mes Recherches les méthodes particulieres, & les réflexions que j'ai déjà faites sur toutes mes méthodes.

J'ai considéré d'abord qu'un pendule conserveroit parfaitement sa situation verticale dans un vaisseau non agité, & faisant voile uniformément; il faudroit donc en ce cas préférer l'usage des pendules appliqués au demi-cercle, à celui de l'Arbalète & du Quartier Anglois. Mais comme l'agitation du vaisseau jette nécessairement les pendules de côté & d'autre, j'ai marqué tout ce qu'on pouvoit & ce qu'il falloit faire, pour diminuer ces éloignemens, lesquels, avec ces précautions, ne seront pas fort considérables. Enfin, les formules que j'ai données au §. xxxix, servent à connoître ces éloignemens: si donc ces formules laissent quelque incertitude dans la pratique, (car elles sont tout-à-fait sûres selon la théorie) cette incertitude ne regarde pas l'angle principal, qui est la hauteur de l'astre, mais simplement l'angle de correction, & il me semble que ce seroit pousser la rigidité trop loin, que de demander dans ces angles de correction une certitude entiere, sur-tout lorsque tous les moyens connus jusqu'ici nous manquent.

J'ai donné au §. xxxix. deux formules; la premiere est:

$$A = \frac{\lambda - l'}{l' - l} \times M,$$

& la seconde est celle-ci:

$$A = \frac{(l'' - l') MN}{(l' - l) N - (l'' - l) M}.$$

Je n'ai donné la dernière formule, que pour résoudre la question suivant toute la rigueur de la théorie, & simplement pour éviter quelque incertitude qui pourroit rester

dans la quantité λ . Effectivement la seconde formule est préférable à la première, si l'on suppose nos principes sur les balancemens du vaisseau exactement vrais : mais s'ils ne le sont pas, il en rejaillira quelque incertitude sur les angles M & N , qui pourroit être de plus grande conséquence, que ne seroit l'incertitude qui pourroit rester sur la quantité λ . On pourroit donc en ce cas préférer la première formule, pour laquelle j'ai marqué au §. XL les précautions qu'on peut prendre : la machine en deviendra en même tems plus simple, & le calcul plus facile ; on pourroit même garder les trois pendules, en suivant toujours le calcul de la première formule, pour se mettre en état de s'assurer de la justesse de l'observation ; car si le calcul donne le même angle A , par les trois combinaisons qu'on peut faire sur deux pendules entre les trois, ce sera une marque infailible, tant de la bonté de la méthode, que de la justesse de l'observation.

Quant à la machine que je propose au §. XLV, je ne crois pas que ni la construction, ni la manière de s'en servir soient fort difficiles. Il sera sans doute facile d'imaginer un ressort, lequel venant à se débâter, par l'attouchement du doigt à quelque languette, arrête tout d'un coup les pendules appliqués au demi-cercle. Il ne faudra pas non plus beaucoup d'adresse à l'Observateur, pour peu qu'il s'y soit habitué, pour toucher la languette à propos & à point nommé ; on tire des coups de fusil, qui demandent incomparablement plus d'adresse. Je ne vois donc pas pourquoi on devroit renoncer à toute espérance de tirer quelque succès de ces idées, quoiqu'assez paradoxes à la première apparence. L'extrême difficulté, ou si je ne me trompe, l'impossibilité entière de donner des machines fondées sur d'autres principes, mérite que l'on ait quelque indulgence pour toutes celles que nos principes fournissent.

§. 10. Je viens aux nouvelles idées que j'ai conçues, depuis que j'ai eu l'honneur d'envoyer mes premières Recherches à l'Académie, mais toujours fondées sur les mêmes principes. Elles auront ce grand avantage, de retenir constamment le demi-cercle dans sa juste position, malgré l'agitation du vaisseau, par où on évitera tous les inconvéniens de nos méthodes précédentes, qui en rendent la pratique difficile. Mais pour mettre le Lecteur au fait, il est nécessaire de remonter à la source. On remarquera aussi que ce que je dirai d'abord ne peut être appliqué qu'aux balancemens d'un vaisseau, qui, dans sa position moyenne, se tient tout droit : mais je démontrerai ensuite, que le même raisonnement subsistera toujours, quoique le vaisseau soit couché sur un de ses côtés.

§. 11. Soit dans la première Figure (qui est presque la même que la troisième Figure de mes Recherches), A un point fixe; AM une verge verticale, dont l'extrémité M fasse des balancemens BMB' , dans le plan BAB' , suivant les loix des pendules simples; supposons au point M un petit axe perpendiculaire audit plan BAB' , autour duquel balance librement une autre verge mMn , dans le même plan BAB' , pendant que son axe en M balance autour du point A , je dis qu'on pourra faire en sorte, que pendant ces balancemens, l'extrémité n de la verge mMn reste toujours dans la même verticale nA , de manière que la verge AM ayant pris la situation AB ou AB' , la verge mMn se trouve dans la situation CBp , ou $C'B'p$, & que le point p ne décrive que de petites portions insensibles np , dans la verticale nA . Voici comment je détermine la longueur Mn , requise pour cette condition.

Soit $AM = L$; la longueur d'un pendule simple isochrone, avec les balancemens du point $M = \lambda$; la distance du centre d'oscillation de la verge mn , depuis son axe

en $M=l$, c'est-à-dire, que l marque la longueur d'un pendule simple isochrone, avec les balancemens que feroit la verge mn si son axe en M étoit fixe; qu'on tire ensuite les verticales BE & $B'E'$, j'ai démontré dans ma première Differtation, au §. 1x, à la note (C), que l'angle CBE ou $C'B'E'$ fera $= \frac{L}{\lambda-l} \times BAM$; on aura donc aussi $BpM = \frac{L}{\lambda-l} \times BAM$, d'où l'on tire cette analogie $BpM : BAM = L : \lambda - l$; & si on substitue au lieu de la raison de l'angle BpM à BAM , qui sont censés fort petits, celle de leur sinus, ou bien celle des lignes AB & pB , on aura $AB(L) : Bp = L : \lambda - l$, & par conséquent $Bp = \lambda - l$.

Donnant donc à la partie Bp ou Mn de la verge CBp ou mMn cette longueur $\lambda - l$, l'extrémité p ou n ne fera que des balancemens insensibles verticaux, exprimés par np , pendant que l'axe en M , par lequel la verge est suspendue, est supposé faire les balancemens exprimés par l'arc BMB' , qui sont comme infiniment plus grands que les premiers, pendant lesquels même l'extrémité n ou p ne sort jamais de la verticale prolongée AM . J'ai confirmé cette proposition par plusieurs expériences, dans lesquelles il est indifférent que le point A soit au-dessous ou au-dessus du point M ; la distance AM indiquée par L , n'y entre point en compte non plus: il n'y a qu'à examiner dans ces expériences, les longueurs λ & l .

§. 12. Si au lieu d'une seule verge telle que mMn , on en met plusieurs qui tournent toutes librement autour du même axe en M , & qui aient toutes la propriété marquée dans le précédent article, l'extrémité de chacune restera toujours, pendant les balancemens de leur axe commun, dans la même verticale prolongée AM ; on pourra cependant varier d'une façon quelconque, les longueurs

elle que Mn , en variant pour chaque verge la distance de son centre d'oscillation au point de suspension en M . La seconde Figure, où j'ai mis les lettres analogues pour un des côtés, explique assez ma pensée. La verge qui a sa distance l la plus petite, est représentée dans son plus grand éloignement par CBp , & celle qui a cette pareille distance la plus grande, est représentée par $C''Bp''$; mais je veux que la première CBp soit construite autrement que toutes les autres, qui auront une même structure entre elles.

§. 13. Je demande donc que la verge CBp ait au point p encore un axe perpendiculaire au plan de la Figure, qui soutienne une barre prismatique rectangulaire, librement mobile autour de cet axe, comme cela est marqué dans la troisième Figure, dans laquelle PQ représente cette barre. Il est clair que cette barre PQ , quand il n'y auroit que la seule verge CBp , demeurera verticale d'elle-même, pendant les balancemens de l'axe en M ou B autour du point A , & ceux de la verge CBp autour de l'axe en B : car cette barre PQ n'est emportée par l'axe en p , que par des balancemens très-petits, qui se font dans une direction verticale, lesquels ne sçauroient faire changer à la barre PQ sa direction naturelle, que je suppose verticale.

Il faut remarquer ici une circonstance très-essentielle; c'est que dans la détermination du centre d'oscillation de la verge CBp , le poids de la barre PQ & du demi-cercle qu'elle doit porter, est censé ici appartenir à la verge CBp , & tout concentré au point p , chaque partie de la barre ayant le même mouvement que le point p , auquel elle est soutenue.

La barre PQ demeurant déjà, par ce seul mécanisme, dans sa situation verticale, ce que je vais ajouter ne servira que pour l'y affermir davantage, & pour prévenir par-là

le danger , que le moindre attouchement ne la détourne de sa juste position. C'est dans cette vûe que je conseille encore de faire dans la barre PQ une coulisse, ou rainure 10, d'une largeur égale, & dont les côtés en dedans soient parfaitement polis, qui recevra les extrémités des autres verges $C'Bp'$, $C''Bp''$, &c. de la seconde Figure.

§. 14. Pour rendre le mouvement des extrémités de ces autres verges dans la coulisse parfaitement libre, on pourra garnir chacune de ces extrémités p' , p'' , &c. d'une poulie travaillée avec grand soin, dont le diamètre soit tant soit peu plus petit que la largeur de la rainure.

§. 15. Si l'on donne à toutes ces autres verges $C'Bp'$, $C''Bp''$, &c. la propriété marquée au §. 11, en faisant pour chacune la partie $Bp' = \lambda - l'$, il est clair qu'elles concourront toutes à retenir la barre PQ dans sa situation verticale, puisque leurs balancemens harmonieux ne laisseront pas de conserver une liberté entière, s'ils sont supposés se faire dans chacune à part, avec toutes les loix que la théorie exige; & si au contraire on supposoit aux verges une disposition à s'éloigner de ces loix, elles s'en empêcheraient les unes les autres, l'harmonie des balancemens se conservant dans toutes les verges, par la construction de la machine. Ce n'est pas là un des moindres avantages de la machine que je propose ici.

§. 16. Puisque la barre PQ ne sçauroit manquer d'être retenue par les verges, qui concourent toutes à cet effet, dans sa situation verticale, on n'aura qu'à affermir un demi-cercle à cette barre, tel que SRT , dont le diamètre ST soit perpendiculaire à la barre, avec une alidade mobile XZ , avec laquelle on pourra prendre la hauteur d'un astre tout-à-fait à son aise, & à peu près avec la même exactitude qu'on le feroit sur terre. Voici encore quelques précautions qu'il faudra prendre.

§. 17. L'axe en B , qui soutient tout le système, étant perpendiculaire au plan de la Figure, & naturellement horizontal, doit être mobile horizontalement, ce qui est facile à faire, & l'Observateur doit être mis en état de gouverner avec une main cet axe, pour pouvoir retenir à peu près le plan de la machine dans le plan vertical de l'astre qu'il veut observer; mais il prendra garde de ne toucher en aucune autre façon ni la barre, ni les verges, afin de leur laisser une liberté entière de se mettre dans leur juste position à chaque instant. Il est vrai que la machine gardera quelques balancemens dans le plan perpendiculaire à celui de la machine: mais ces balancemens ne sont d'aucune conséquence sensible, & je ne crois pas qu'on doive rendre la machine plus composée pour y remédier, comme on le pourroit faire si on y vouloit avoir égard. L'Observateur prendra aussi bien garde, en dirigeant de l'autre main l'alidade XZ , de n'y toucher que de l'extrémité du doigt, & simplement par de petits coups, sans y appuyer, & cela toujours pour ne pas déranger le système dans ses mouvemens naturels. Peut-être sera-t-il plus convenable d'employer deux personnes, dont l'un soit attentif à retenir l'axe en B dans sa juste position, & l'autre à diriger simplement l'alidade.

§. 18. Si j'ai supposé jusqu'ici la ligne AM verticale, ce n'a été que pour rendre mon système plus clair & plus intelligible. Je dis donc à présent, que tout mon raisonnement subsistera encore, quelque inclinée qu'on suppose la ligne AM . On n'a qu'à comparer ensemble la seconde & la quatrième Figure, pour voir toute la différence qu'il y aura d'un cas à l'autre. Voici donc comment je démontre qu'on aura encore pour ce second cas $Bp = \lambda - l$, en considérant les angles CBE & BAM comme fort petits, de même que nous l'avons fait pour le cas précédent.

Qu'on tire dans la quatrième Figure, les horizontales BG & MF avec la verticale AF , & le triangle BGM pourra être censé semblable au triangle AFM . Or, j'ai démontré au §. x. de mes premières Recherches, que l'angle $CBE = \frac{AF}{AM} \times \frac{L}{\lambda - l} \times BAM$. Mais $CBE = BpG = \frac{BG}{Bp} = \frac{BG}{BM} \times \frac{BM}{Bp} = \frac{AF}{AM} \times \frac{BM}{Bp}$. Donc $\frac{AF}{AM} \times \frac{BM}{Bp} = \frac{AF}{AM} \times \frac{L}{\lambda - l} \times BAM$, ou $\frac{BM}{Bp} = \frac{L}{\lambda - l} \times BAM = \frac{L}{\lambda - l} \times \frac{BM}{AM} = \frac{BM}{\lambda - l}$, & par conséquent $\frac{1}{Bp} = \frac{1}{\lambda - l}$, ou $Bp = \lambda - l$. C. Q. F. D.

Voilà encore une propriété extrêmement favorable à notre système, & sans laquelle il auroit été entièrement détruit, puisque l'inclinaison moyenne du vaisseau est toujours incertaine & inconstante. La nature nous donne ici du secours, où tout moyen nous eût manqué. Nous voyons donc que la barre PQ (Fig. 3.) conservera sa direction verticale, lors même que l'axe en M ou B , par lequel le système est soutenu, balance autour d'un point pris hors de la verticale PQM ; & ainsi la machine que je propose, servira également pour toutes les positions du vaisseau.

§. 19. Ce que je viens de dire suffit pour comprendre notre système, & toutes les raisons qui m'y ont conduit. Je ne m'arrêterai pas aux descriptions purement mécaniques; les machinistes y suppléeront d'eux-mêmes, aussitôt qu'ils se seront mis au fait. Mais il nous reste des remarques essentielles à faire, tirées de la théorie, touchant la construction des verges, qui soutiennent & dirigent la barre, à laquelle le demi-cercle est affermi, & touchant la façon de les préparer pour l'observation Astronomique, toutes les fois qu'on se propose de la faire.

§. 20. Je ne prétends pas que la quantité λ , qui

marque la longueur du pendule simple isochrone, avec les balancemens du vaisseau, soit toujours tout-à-fait la même pour toutes les circonstances : mais je crois bien qu'elle peut être censée telle pour les mêmes circonstances, & pour un petit intervalle de tems. Il faudra donc accommoder la machine aux circonstances où l'on se trouvera, & cela consistera à mettre les centres d'oscillation des verges CBp , $C'Bp'$, &c. dans leur juste position, de sorte que pour chacune la quantité Bp , Bp' , &c. devienne $= \lambda - l$. Cette condition demande que chaque verge soit garnie d'un poids, qu'on puisse monter & descendre tout le long de la verge, tout comme dans les pendules appliqués aux horloges ; moyennant ces poids, on pourra donner telle position qu'il conviendra aux centres d'oscillation des verges, sans changer les distances Bp , Bp' , Bp'' , &c. que je désignerai par a , a' , a'' , &c. pendant que je distinguerai les distances du centre d'oscillation, depuis le point de suspension M ou B pour chaque verge, par l , l' , l'' , &c. Ces dénominations nous donnent $a = \lambda - l$; $a' = \lambda - l'$; $a'' = \lambda - l''$, &c. ou bien ; $l = \lambda - a$; $l' = \lambda - a'$; $l'' = \lambda - a''$, &c. & ces dernières équations marquent les distances l , l' , l'' , &c. qu'on pourra obtenir pour chaque verge, moyennant le poids mobile dont elle est garnie.

§. 21. Il faut donc, pour se préparer à l'observation, commencer d'abord par connoître la quantité λ , pour les circonstances où l'on se trouve : pour cet effet, on comptera le nombre des balancemens du vaisseau pendant deux ou trois minutes ; on pourra se servir pour cet effet d'une montre de poche, dont on aura connu le nombre de battemens qu'elle fait dans une minute. Supposons que dans une minute de tems, le vaisseau ait fait autant de balancemens qu'il y a d'unités en n , & donnons 440 lignes à la

longueur d'un pendule simple à secondes, & on aura la longueur moyenne $\lambda = 440 \times \frac{3600}{nn} = \frac{1584000}{nn}$ lignes; & si de cette quantité on retranche pour chaque verge la longueur a , a' ou a'' , qui demeure toujours la même, & dont il faut avoir pris exactement la mesure, on connoîtra au juste les longueurs l , l' , l'' , &c. en lignes.

§. 22. Quant aux verges, il faut les régler une fois pour toutes, par des divisions exactes, & faites avec grand soin; ces divisions seront marquées par le nombre de lignes qui leur conviennent, & elles indiqueront de cette façon, les points où il faudra toujours mettre les poids à chaque observation, après avoir trouvé la quantité λ : on sçait que cela se peut faire avec toute la précision qu'on se propose. Si je veux, par exemple, trouver le point où il faut placer le poids mobile, afin que la distance l ou l' ou l'' , &c. soit de 1532 lignes, je n'ai qu'à chercher où il faut placer le poids pour faire balancer la verge autour de son axe dans une heure de tems, autant de fois qu'il y a d'unités en $3600 \sqrt{\frac{440}{1532}}$, c'est-à-dire, 1929 fois; les autres divisions se peuvent faire par le calcul. Il y a encore une remarque particuliere à faire sur cette construction, par rapport à la verge CBp , qui soutient seule la barre PQ ; c'est que tout le poids de cette barre, y compris celui du demi-cercle, doit être censé faire partie de la verge CBp , & être concentré au point p , comme j'ai démontré au §. 13 de ces Additions. C'est pourquoi pour faire les divisions sur la verge CBp , on ôtera la barre, & on mettra à sa place, à l'extrémité p , un poids parfaitement égal à celui de la barre & du demi-cercle, & si ce poids substitué, avoit un volume considérable, ce qui feroit un peu changer les balancemens que notre théorie suppose, il vaudroit mieux pour l'entiere justesse des divisions, les chercher

chercher par le calcul, tel que la règle de trouver le centre d'oscillation enseigne, après avoir pris le centre d'oscillation de la verge CBp à part, & reconnu toutes les proportions qu'il y a entre les poids de la verge du corps mobile & de la barre, aussi-bien qu'entre les distances depuis l'axe en B , jusqu'au point où la barre & le corps mobile sont appliqués à la verge. Il ne faut rien négliger pour l'exactitude que le mécaniste peut donner à la machine, & qui ne demande que beaucoup d'attention & d'application.

§. 23. Après avoir décrit toutes les précautions qu'il faut prendre pour la construction de la machine, il ne fera pas hors de propos de remarquer encore une circonstance, qui facilitera à l'Observateur le moyen de se préparer à l'observation: elle consiste à marquer par les mêmes nombres, les divisions correspondantes sur chacune des verges; & afin que l'Observateur sçache aussi-tôt les points où il faudra placer les poids, ces nombres seront ceux des balancemens que le vaisseau aura faits dans deux minutes de tems; car c'est simplement ce nombre qui règle chaque division, & ce que j'ai dit dans le précédent article, ne sert qu'à la construction des verges: mais l'usage qu'il en faut faire sera fort facilité, si ces divisions sont marquées par le nombre des balancemens que le vaisseau est supposé faire dans deux minutes de tems.

§. 24. Après qu'on aura placé les poids régulateurs sur le nombre des balancemens du vaisseau, qu'on aura comptés pendant deux minutes, on pourra se former une marque, pour connoître si ces poids sont dûment placés: pour cet effet on pourra faire les bouts d'enhaut des verges $C'Bp'$, $C''Bp''$, &c. qui ne soutiennent aucun autre poids que celui de leur propre matière, d'acier qui plie quand il souffre un effort considérable de côté. Si l'on remarque

donc que ces bouts d'acier ne se courbent pas pendant que le vaisseau est agité, ou qu'ils ne se courbent pas beaucoup, l'observation ne pourra manquer d'être fort juste : mais si ces bouts se courboient beaucoup, on essayeroit si en baissant ou haussant un peu leurs régulateurs, ils se courberoient moins, & en ce cas il faudroit le faire. Je prévois bien cependant, qu'il pourra arriver dans les grandes tourmentes, que les verges resteront toujours dans quelque légère contrainte, qui pourra provenir de l'effort que font les verges, pour retenir la barre dans sa situation verticale, malgré une certaine irrégularité des balancemens du vaisseau ; aussi est-ce là une des raisons qui m'ont engagé à conseiller d'employer plusieurs verges, qui concourent toutes au même effet ; sans ces vûes accessoires, la seule verge *CBp* suffiroit.

§. 25. Je finirai cette partie principale de mes Additions, par quelques remarques qui regardent le succès qu'on doit attendre de la machine proposée. Il est à remarquer que la barre *PQ* ne demeure pas seulement dans une situation verticale pendant les agitations du vaisseau, mais qu'elle reste encore dans la même verticale ; & ainsi quand même les balancemens du vaisseau seroient assez irréguliers pour faire sortir la barre de sa ligne, elle pourra encore garder une position verticale, par un mouvement parallèle, qui lui sera plus naturel que tout autre. Voici un autre avantage ; c'est que toute la machine étant fondée sur l'harmonie des balancemens de ses parties, si cette harmonie étoit dérangée par quelque accident, elle seroit rétablie aussi-tôt, en vertu même de la construction, puisqu'il doit nécessairement arriver au milieu de chaque balancement, que toutes les verges & la barre se réunissent dans un même instant. Je crois aussi que le moment le plus sûr pour faire l'observation, sera celui de cette réunion ;

la barre PQ ne pourra alors s'écarter sensiblement de la verticale, sur tout si on place en même tems l'axe B , qui soutient la machine, le plus près que les circonstances le permettent du point A , qui est toujours le centre de gravité du vaisseau, puisqu'alors cet axe même ne souffre que des balancemens assez légers; c'est aussi à quoi je conseille d'être attentif, puisqu'enfin il ne faut rien négliger de tout ce qui peut rendre l'observation plus exacte. Enfin quand même la barre PQ ne garderoit pas avec une perfection entière sa position verticale, elle feroit elle-même des balancemens réguliers & harmonieux avec ceux du vaisseau, de sorte qu'après avoir dirigé l'alidade, sans y toucher davantage, on n'auroit qu'à remarquer sur la pinnule X , les deux points extrêmes, qui répondent au rayon visuel, & en prendre le milieu, ce qui donneroit le petit angle de correction pour l'angle XPS , qui marque la hauteur de l'astre.

§. 26. Avec toutes ces précautions, je me flatte qu'on pourra prendre la hauteur sur mer en tout tems, & toujours avec beaucoup de précision. S'il y a encore quelques inconvéniens dans l'usage de la machine que j'ai décrite, ils ne pourront être que très-légers, & fort excusables par la nature du sujet. Pourroit-on espérer ici la même précision, la même facilité & la même simplicité qu'on a sur terre? Je prévois bien cependant, qu'on ne pourra donner à ces idées leur dernière perfection, qu'après une longue suite d'expériences, & d'attentions continuelles à remédier, conformément à nos principes, à tous les petits défauts qu'on remarquera dans les premiers essais. Cette dernière perfection dépendra sur tout de la juste proportion qu'il faudra donner à tous égards aux parties qui composent la machine, & qu'on ne sçauroit déterminer assez par la simple théorie. Cependant ce que

la théorie diète absolument, suffit pour nous assurer par avance d'un succès plus que médiocre, même dans les premiers essais; car enfin, nos Théorèmes & nos Principes de Méchanique pure, ne souffrent pas la moindre exception, & nos hypothèses sur les balancemens d'un vaisseau, sont fondées sur la bonne théorie hydrodynamique; elles sont conformes à toutes les expériences & observations nautiques, & d'ailleurs deux ou trois balancemens successifs, achevés & uniformes suffisent, & font le même effet que si tous les balancemens précédens l'avoient été de même. Ces balancemens achevés & uniformes sont faciles à reconnoître; ils ne peuvent manquer d'arriver quelquefois, même dans les plus grandes tempêtes, & on pourra toujours en profiter, soit de nuit, soit de jour. Je crois aussi fermement, que pour les observations de nuit, il n'est pas possible d'employer d'autres principes; & quant aux observations de jour, l'expérience décidera si la machine que je viens de proposer, n'est pas le plus souvent, peut-être même toujours, préférable à l'Arbalète & au Quartier Anglois.

§. 27. On pourroit cependant, s'il étoit nécessaire, contre mon opinion, pousser les corrections & l'exactitude plus loin, & même aussi loin qu'on voudroit. Voici là-dessus mes réflexions. J'ai fait voir que le point p , auquel la barre PQ est soutenue, ne sçauroit avoir aucun mouvement horisontal, & qu'il n'est plus sujet qu'à des balancemens verticaux, qui ne font aucun effort pour faire sortir ladite barre PQ hors de sa situation verticale. Mais supposons qu'une énorme irrégularité dans les balancemens du vaisseau, puisse produire au point p des mouvemens considérables dans la direction horisontale, on pourra mettre autour de l'axe en B , une seule verge CBp , mais extrêmement pesante, & puis appliquer toute la machine

représentée dans la troisième Figure, à l'axe en p , au lieu de la suspendre immédiatement par l'axe en B , & en ce cas, cette verge accessoire doit avoir la même propriété touchant la distance Bp , & le poids de toute la machine doit être considéré comme concentré au point p . Il est clair que par cette seconde correction, on achevera de remédier à tous les défauts: on voit aussi qu'on peut pousser ces corrections aussi loin qu'on voudra. La cinquième Figure explique le principe de cette seconde correction; car si dans la première verge $CB B'$, l'extrémité B' est encore sujette à quitter la verticale prolongée AM , l'extrémité p' de la seconde verge $C'B'p'$, mobile autour du point B' ne pourra jamais s'écarter sensiblement de cette verticale.

§. 28. Je ne me suis proposé que de décrire ce que la théorie & la mécanique exigent, sans rien prescrire aux Artistes, qui n'auront aucune peine à la construction de cette machine, selon toute l'étendue de nos vûes, aussitôt qu'ils en seront bien informés. Je ne laisserai pas de dire encore quelques mots sur la construction des verges CBp , $C'B'p'$, &c. de la troisième Figure, non dans le dessein d'instruire les ouvriers, mais dans celui de mettre dans un plus grand jour la machine que je propose.

Comme ces verges doivent tourner librement autour d'un axe commun en B , & se croiser à chaque balancement, il faut les construire d'une façon à le pouvoir faire en toute liberté; c'est pourquoi au lieu de simples verges, on pourra se servir de plaques rectangulaires, presque entièrement percées, de sorte qu'elles entrent les unes dans les autres. La sixième Figure représente deux de ces plaques; $CCpppp$ marque le bord de la première, & $C'C'p'p'p'$ le bord de la seconde; BB marque l'axe commun, autour duquel toutes ces plaques peuvent tourner

librement, & se croiser, sans s'empêcher les unes les autres; PQ marque la barre, qui doit soutenir le demi-cercle; ro marque la longueur de la coulisse, qui reçoit le bord $p'p'$ garni d'une poulie dans son milieu, pendant que la barre est soutenue par le bord pp , autour duquel elle tourne librement. La troisième Figure marquera ensuite en profil, avec des lettres analogues, ce que représente cette sixième Figure. Le centre de gravité de chaque plaque doit être beaucoup au-dessous de l'axe BB .

§. 29. Je ne dirai plus qu'un mot sur la manière de suspendre la machine: je crois que la meilleure manière sera de se servir d'une genouillère: mais le globe doit être creusé en dedans, & laisser deux ouvertures en haut & en bas, pour donner la liberté aux verges ou plaques, de faire leurs balancemens autour de l'axe BB . Je représente un tel globe par la septième Figure, dans laquelle BB marque l'axe, qui soutient la machine, & les ouvertures entre les bords MM & NN , laisseront à ces verges ou plaques, toute la liberté de faire leurs balancemens.

§. 30. Je n'ajouterai plus qu'une seule réflexion sur cette matière, mais essentielle, utile, & qui fera voir combien j'ai été scrupuleux dans cet examen & ces recherches. Rappelons-nous donc pour la troisième Figure, que $Bp = \lambda - l$; $Bp' = \lambda - l'$, &c. que λ exprime la longueur d'un pendule simple isochrone avec les balancemens du vaisseau, pendant que les lettres l , l' , &c. marquent les distances des centres d'oscillations des verges ou plaques Cbp , Cbp' , &c. depuis l'axe en B . Ces quantités l , l' , &c. sont arbitraires, & on peut les rendre aussi grandes qu'on veut, sans faire les bouts BC , BC' , &c. plus longs, en approchant davantage leur centre de gravité du point B : mais il y a un inconvénient de part & d'autre, à les faire trop grandes & trop petites. Si elles

sont grandes, les verges ou plaques prendront trop d'effort dans leurs balancemens, & si elles sont petites, les parties Bp , Bp' , &c. deviendront trop grandes, & incommodes pour la construction & pour l'usage de la machine : car la longueur λ peut aller peut-être au-delà de 40 ou même de 50 piés. J'ai donc examiné soigneusement, si on ne pourroit pas remédier à ce second inconvénient, & j'ai trouvé qu'on peut le faire de la manière qui suit.

Il est clair qu'en diminuant les parties Bp , Bp' , &c. dans une même proportion, la ligne qui sera tirée par les extrémités, sera parallèle à PQ , & par conséquent encore verticale : mais alors le point p ne sera plus immobile par rapport à l'horison ; il fera des balancemens, & l'axe en p , qui soutient la barre PQ , emportera cette barre par des balancemens horisontaux ; ces balancemens pourront faire sortir la barre hors de sa position verticale : on peut cependant encore prévenir ce dérangement, qui gâteroit tout, de deux façons. La *première* est de charger beaucoup les verges ou plaques $C'Bp$, CBp' , &c. & fort peu la barre PQ , qui en ce cas, ne fera aucun effort sensible sur les verges ou plaques, & par conséquent gardera constamment sa direction verticale. La *seconde* consiste à placer l'axe p au centre de gravité de la barre PQ , y compris le poids du demi-cercle. Par ce second moyen, la barre PQ ne fait plus aucun effort pour quitter la situation verticale, pendant qu'elle est emportée par le point p , par des balancemens horisontaux, & elle est cependant retenue dans sa situation verticale, par les bouts des autres verges ou plaques. M. Bouguer avoit déjà remarqué le grand avantage qu'il y auroit, à satisfaire en même tems à ces deux points, dans la Piece qui a remporté le Prix de 1729, & qui l'a si bien mérité : mais ce grand Géometre, qui possède également toutes les connoissances de Physique, de

Mécanique & de Navigation , si nécessaires pour ces sortes de questions , ne s'est fait aucune peine de marquer lui-même l'imperfection de la méthode qu'il décrit , pour obtenir en quelque façon cet avantage. Je cite avec plaisir cette belle Piece , & j'y renvoie mon Lecteur , pour un plus grand nombre d'articles qui nous resteroient à considérer , & qu'on y trouvera tous traités avec toute l'exactitude & la perspicacité possible. Ses principes sont d'ailleurs conformes aux miens , ou du moins compatibles : il m'est cependant revenu depuis peu , qu'on a attaqué une proposition qui nous est commune , sçavoir : *Qu'un vaisseau fait ses balancemens , tant en roulant qu'en tanguant , autour de son centre de gravité , & qu'on a substitué à ce centre , un autre que j'ai été le premier à considérer & à déterminer , pour en déduire les loix des percussions excentriques , & que j'ai appelé le centre de rotation spontanée : j'ai démontré que ce centre est toujours le centre d'oscillation , en considérant le point d'impulsion comme le point de suspension. Il faut distinguer dans cette controverse , les balancemens qui se forment , d'avec ceux qui sont tout formés , & qui ne sont que se continuer. Dans les premiers , il faut prendre le centre de rotation spontanée , en prenant pour point d'impulsion , le centre de gravité de toutes les impulsions : mais dans les balancemens formés , il faut absolument prendre le centre de gravité pour le point de rotation , comme j'ai démontré dans une Dissertation que j'ai faite sur les balancemens des corps qui nagent sur les eaux , & comme M. Euler , Auteur de ce Problème , a démontré aussi. Il y a dans cette Dissertation , plusieurs nouveaux Théorèmes , qui éclaircissent la nature des balancemens d'un vaisseau , & qui m'ont servi de base pour les présentes Recherches : mais comme elle n'a pas encore été imprimée , quoique*
je

je l'aie faite depuis très-long-tems, je ne sçauois m'y rapporter pour donner plus de poids à tout ce que j'ai dit, soit dans ces Additions, soit dans mes Recherches antérieures; & je deviendrois trop prolix, si je voulois répéter ici tout ce que j'ai dit ailleurs sur ces matieres: je me contenterai donc d'avoir dit le plus essentiel. Au reste, les vents ne peuvent déranger sensiblement la machine que je propose pendant l'observation, pour plusieurs raisons que je ne m'arrêterai pas à exposer ici: d'ailleurs on n'a qu'à vouloir remédier à ces inconvéniens pour en venir à bout. Quant aux secousses des lames qui se brisent contre le ~~vaisseau~~ ^{vaisseau}, j'avoue qu'elles peuvent altérer l'observation, mais je ne crois pas qu'elles le puissent faire sensiblement; & comme ces brisans ne viennent que par intervalle, il n'y a qu'à bien choisir le moment de l'observation, pour s'en mettre à l'abri.

§. 31. Voilà donc ce que j'avois à dire sur le point principal de notre sujet, que l'Académie a témoigné dans la seconde annonce avoir le plus à cœur, & auquel j'ai fait moi-même le plus d'attention dans ma premiere Piece: mes premieres Recherches m'ont conduit aux vrais principes, que j'ai toujours vû clairement être les seuls à suivre. Si j'ai eu le bonheur, dans ces Additions, de faire une application plus heureuse de mes principes, j'en suis uniquement redevable à la pénétration de mes Juges, qui prévoyoiient sans doute, qu'on en pouvoit tirer un plus parfait usage.

§. 32. Je n'ai que très-peu d'additions à faire sur les autres points que j'ai traités dans ma premiere Piece. J'ai été fort long, peut-être même prolix, sur tout ce qui peut concerner la mesure du tems absolu sur mer. Il est sûr qu'une plus grande perfection de cette matiere, dépend beaucoup plus d'une bonne théorie, que d'une connoissance

parfaite de tout ce qui regarde la pratique. Je crois avoir indiqué les vrais principes qui peuvent conduire à une plus exacte mesure du tems, tant sur mer que sur terre. Ils sont nouveaux pour la plûpart : j'avoue qu'il y en a d'assez paradoxes ; mais ceux-ci même ne laisseront pas, à ce que j'espere, de soutenir l'examen des plus grands connoisseurs. Je ne demande à ceux-ci, que la grace d'examiner mes principes sans prévention : si après cela ils ne sont pas de mon sentiment, je me soumettrai très-volontiers à leur décision & à leur autorité, & les prierai de regarder comme non dit, ce qu'ils trouveront être dit contre les regles bien avérées de l'art, dont j'ignore entièrement la pratique ; & je mérite d'autant plus cette indulgence, que j'aurois pû me dispenser d'examiner cette matiere aussi scrupuleusement que je l'ai fait, sans me faire tort par rapport à notre sujet principal. Il y a cependant dans ces matieres, bien des choses très-fondées, qui paroissent démenties par l'expérience ; tel est, par exemple, mon Théorème du §. xvi. J'ai moi-même une pendule assez bien travaillée, qui ne se remonte que de quinze en quinze jours, mais qui n'a point de fusée pour régler le ressort moteur, de sorte que le pendule décrit des arcs beaucoup plus grands au commencement que vers la fin ; cependant cette pendule avance un peu au commencement, & retarde sur la fin, ce qui montre en même tems l'inutilité des petites lames cycloïdiques, qui devroient régler le mouvement du pendule, & qui n'ont fait qu'augmenter l'inégalité de la marche dans ma pendule : mais ces sortes de pendules ne doivent pas être mises au nombre des bonnes pendules, qui doivent être telles, que les balancemens de leur pendule ne different pas sensiblement entre eux, soit qu'on le détache de l'horloge, soit qu'on l'y applique. Aussi notre Théorème quadre-t-il parfaitement

avec les expériences faites sur l'excellente pendule de M. Graham. J'ai cependant examiné d'où pouvoit provenir l'effet contraire dans d'autres pendules, moins bonnes que celles d'un M. Graham ou d'un M. le Roi; c'est sans doute, parce que le pendule n'y étant pas si bien suspendu, & ne faisant pas ses balancemens avec autant de liberté, demande une plus grande action, pour être animé & entrete nu dans ses balancemens; & si cette action n'exerce sa force sur l'échappement, qu'au moment que le pendule se trouve vers le milieu, sans y agir en aucune façon, pendant tout le tems que le pendule se trouve vers les extrémités des arcs qu'il décrit, comme cela arrive dans les grands balancemens du pendule, on peut démontrer alors, que les balancemens en sont d'autant plus accélérés, qu'ils sont plus grands. Cette raison ne subsiste pas dans les bonnes pendules, parce que la force qui entretient leur marche est si petite, qu'elle ne sçauroit déranger sensiblement le mouvement du pendule, de quelque façon qu'elle agisse sur l'échappement. C'est-là la raison pourquoi il est si nécessaire de bien suspendre le pendule, ce que personne n'a mieux exécuté, à mon avis, que Messieurs le Roi & Graham. Concluons aussi de-là, qu'il ne faut pas rejeter facilement ce que la mécanique dicte.

§. 33. J'ai donné au §. XVIII de mes premières Recherches, les précautions les plus essentielles qu'on peut prendre sur mer, pour se servir utilement des pendules. M. Maffy en a donné quelques autres, qui paroissent bien fondées, dans sa Piece qui a remporté le prix de 1720. Si les balancemens d'un vaisseau sont trouvés être toujours à peu près isochrones entre eux, on pourra encore tirer quelque utilité du principe dont nous nous sommes servi pour faire les observations Astronomiques sur mer, pour bien suspendre les pendules. Car comme le point p.

(*Fig. 1.*) ne fait que des balancemens verticaux, on pourra ménager un genou à l'extrémité de la verge mMn , ou CBp , pour en suspendre la pendule, laquelle ne fera de cette façon, que de légers balancemens verticaux, pendant lesquels le mouvement du pendule fera alternativement un peu accéléré & retardé, mais d'une manière insensible, & telle que ces inégalités se détruiront parfaitement.

§. 34. A ces remarques je n'en ajouterai qu'une seule; qui concerne la manière de construire les pendules, telle que le changement du froid & du chaud, n'en puisse point altérer le mouvement, n'ayant fait qu'indiquer dans ma première dissertation, cette construction au §. XVII, à la note (*e*). Il y a dans les Mémoires de l'Académie, différentes descriptions fondées sur le même principe que j'ai indiqué: si j'ajoute la mienne, ce n'est que parce qu'elle pourra peut-être paroître plus simple. Puisqu'il y a des métaux de différente extensibilité, comme, par exemple, le cuivre & le fer, on n'aura qu'à se servir d'une simple verge AC (*Fig. 8.*), mais chargée d'une lentille à chaque extrémité A & C . Si cette verge est supposée balancer autour du point B , la partie BC d'en bas sera faite de la matière qui souffre plus d'extension, & la partie d'en haut BA , de celle qui en souffre moins; & voilà toute la construction, qui a en même tems cet avantage, qu'un tel pendule AC sera beaucoup plus court, qu'un pendule simple isochrone. Voyons à présent quelle proportion il faudra donner, soit au poids des lentilles, soit aux longueurs BC & BA . Je négligerai le poids de la verge, par rapport à celui des lentilles, simplement pour évirer la prolixité du calcul.

Soit donc l'extensibilité de la matière en BC à celle en BA , pour des longueurs égales, comme m à n ; $BC = a$;

$BA=b$; le poids en $C=A$; le poids en $A=B$; le centre d'oscillation en D : supposons ensuite que la partie BC s'étende en Bc , & la partie BA en Ba : la nature du Problème demande qu'après ce changement, le centre d'oscillation se trouve encore en D . Soit $Cc=a$, on aura

$$Aa = \frac{n}{m} \times \frac{b}{a} \times a, \text{ \& par conséquent } BD = \frac{aaA + bbB}{aA - bB}$$

$$= \frac{(a+a)^2 A + (b + \frac{n}{m} \times \frac{b}{a} \times a)^2 B}{(a+a)A - (b + \frac{n}{m} \times \frac{b}{a} \times a)B} \cdot \text{Pour abrégier le calcul de}$$

cette équation, on n'a qu'à traiter les petites variations insensibles d'infiniment petites; différentier la formule $\frac{aaA + bbB}{aA - bB}$, en considérant les quantités a & b comme variables, A & B comme constante, poser la différentielle $= 0$, & enfin, faire $db = \frac{n}{m} \times \frac{b}{a} \times da$. De cette manière, on trouvera l'équation qui suit:

$$ma^3 AA - 2maabAB - mabbAB = nb^3 BB - 2nabbAB - naabAB, \text{ à laquelle on pourra satisfaire d'une infinité de manières.}$$

Si l'on supposoit $m=2n$; $BC=BA$, on trouveroit $\frac{A}{B} = \frac{3+\sqrt{17}}{4}$, qui marque que le poids de la lentille d'en bas, devroit être presque le double de celui de la lentille d'en haut.

Dans les Mémoires de l'Académie, pour l'année 1741, pag. 366, il est dit que la proportion de m à n a été observée pour le cuivre & le fer, comme 17 à 10, & faisant pour cette proportion encore $a=b$, on trouvera $\frac{A}{B} = \frac{545}{340}$, ou environ $= \frac{8}{5}$, & toute la longueur du pendule AC fera de 203 lignes, pour battre les secondes.

§. 35. Je n'ai rien à ajouter aux méthodes Astronomiques, que j'ai données dans mes Recherches, ayant

considéré toutes les circonstances où l'on peut se trouver, & donné pour chacune, la méthode qui peut convenir le mieux, & ayant marqué outre cela, pour chaque méthode, le choix qu'il faut faire des astres, de leur position, & du moment de l'observation, pour en déterminer l'heure avec le plus d'exactitude. Je profiterai seulement de cette occasion, pour rendre à M. de Maupertuis, la justice que j'ai lui dois à ce sujet. Je n'avois pas encore vu sa nouvelle *Astronomie Nautique*, quand j'envoyai ma Piece à l'Académie, quoique publiée l'année précédente, où j'ai trouvé ensuite que cet illustre Sçavant avoit déjà exposé avant moi la méthode que j'ai donnée au §. LXI, pour des circonstances, lorsque la tourmente seroit si violente, qu'il fût absolument impossible de tirer le moindre secours d'aucun instrument, pour faire des observations. Il est juste que je m'acquie ici envers M. de Maupertuis, de ce que j'aurois fait la première fois, si j'avois déjà eu alors connoissance de son bel Ouvrage.



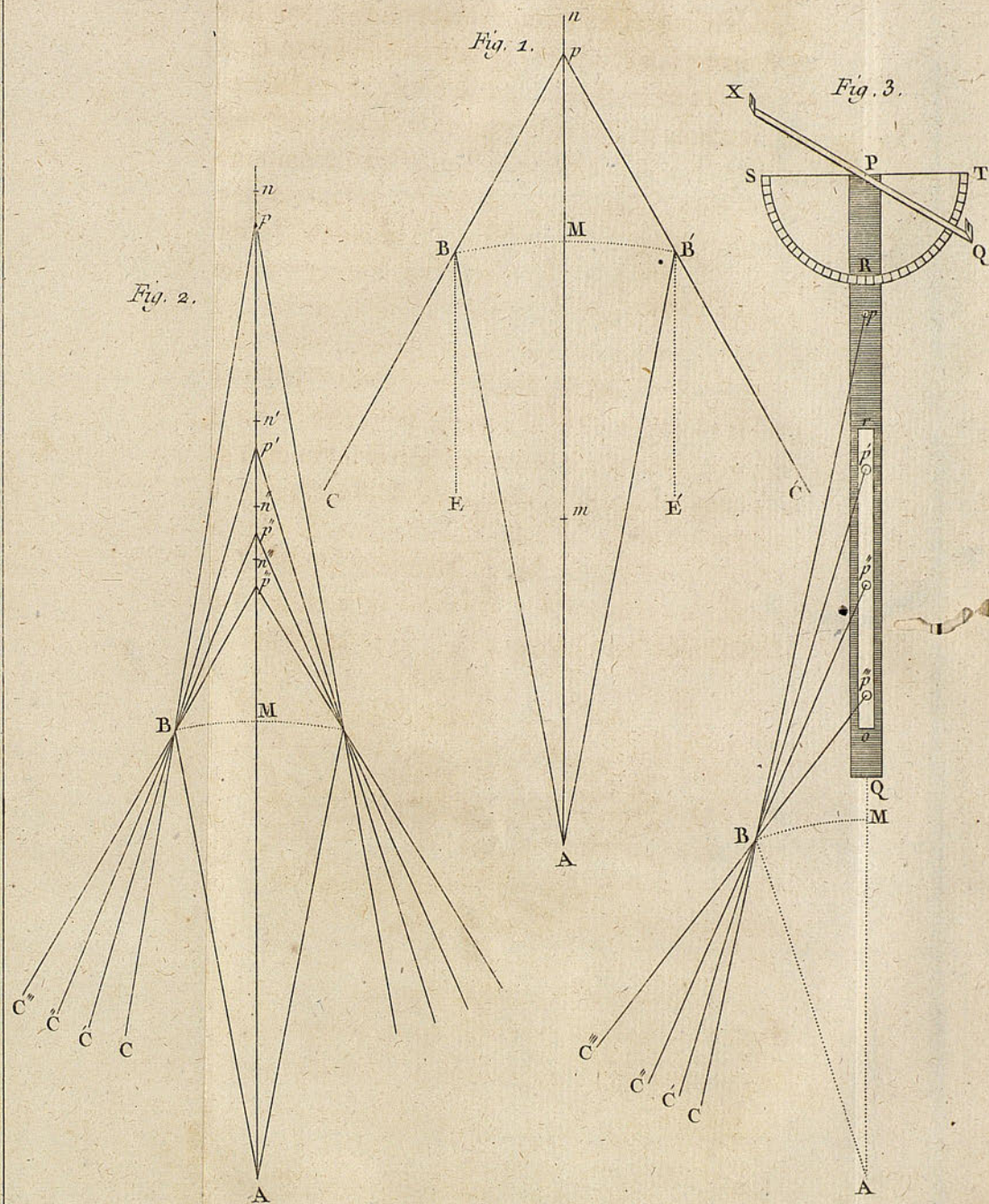


Fig. 4.

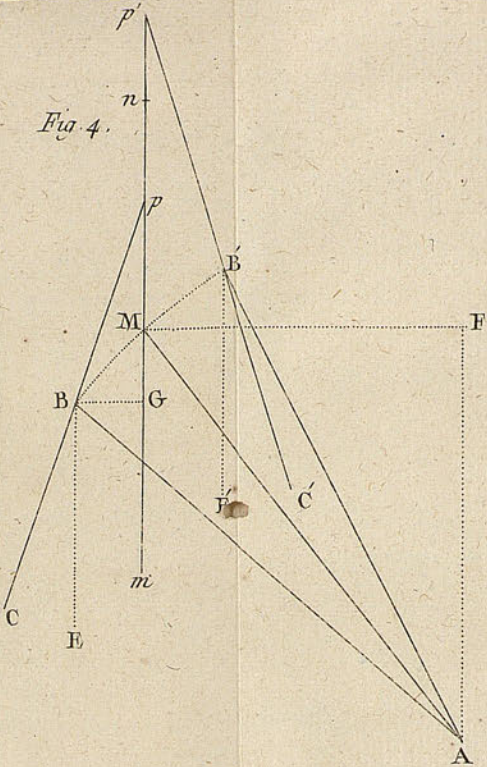


Fig. 5.

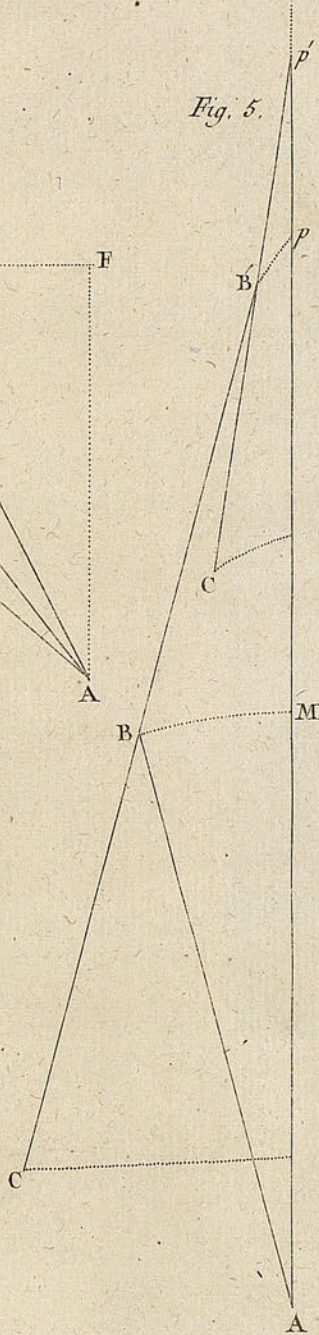


Fig. 8.



Fig. 6.

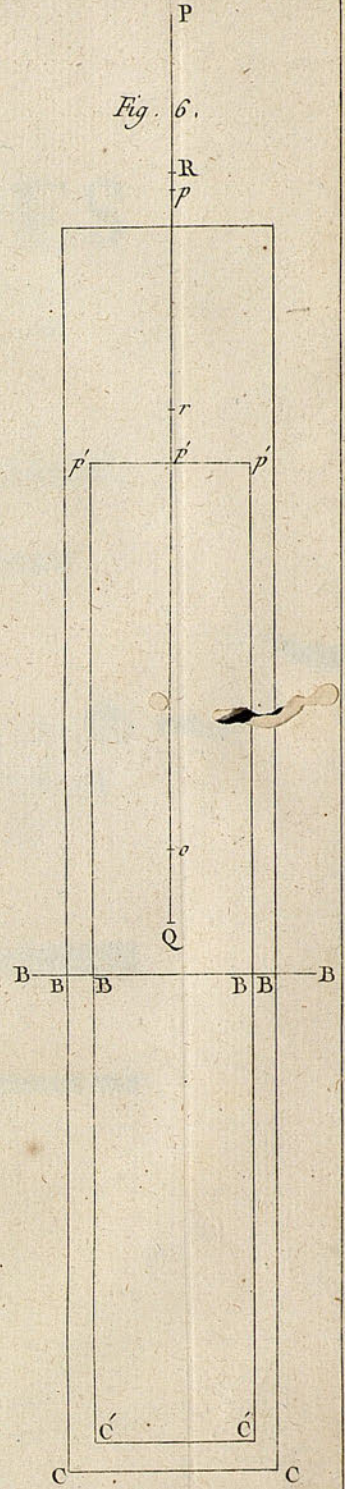
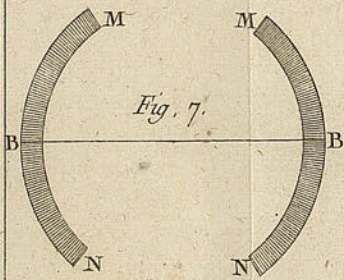


Fig. 7.



MEDITATIONES IN QUÆSTIONEM

AB ILLUSTRISSIMA

ACADEMIA REGIA PARIS. SCIENTIARUM,

Pro anno 1747. cum Præmio duplicato

PROPOSITAM.

*Quibusnam observationibus mari, tam interdum
quam noctu, itemque durante crepusculo verum
temporis momentum commodissimè &
certissimè determinari queat ?*

Arbor non uno sternitur ictu.

MEDITATIONES

IN QUÆSTIONEM

DE ALLEGORISIMA

ACADEMIA REGIA PARISIENSIS

PROPOSITA

PROPOSITA

PROPOSITA

MEDITATIONES



MEDITATIONES IN QUÆSTIONEM

AB ILLUSTRISSIMA

ACADEMIA REGIA PARIS. SCIENTIARUM,

Pro anno 1747. cum Præmio duplicato

PROPOSITAM.

*Quibusnam observationibus mari, tam interdiu quàm noctu,
itemque durante crepusculo verum temporis momentum
commodissimè & certissimè determinari queat?*

Arbor non uno sternitur ictu.

I.

EXPLICATIO INSTITUTI,

§. 1.



UAMVIS accurata hujus quæstionis solutio non parùm ad inventionem longitudinis conferre videatur, quoniam ex discrimine temporum in diversis locis simul observatorum differentia inter eorum longitudes aptissimè concluditur; tamen hæc quæstio, etiam remoto hoc summo perfectionis gradu, in

Prix. 1747.

P.

omni navigatione non solum est utilissima, sed etiam maximè necessaria, nihil enim in navi suscipitur, quod quidem ad ejus cursum pertineat, quin plurimum intersit verum temporis momentum nosse, quo id factum sit. Verum superfluum foret hîc dignitatem & utilitatem istius quæstionis collaudare velle, cùm ipsa Academia Regia, repetitâ ejus propositione, simul summum ejus usum declararet.

§. 2. Cùm tempus à meridie cujusque diei, vel à media nocte mensurari ac numerari soleat, patet in navi quando temporis momentum quæritur, numerum horarum ac minutorum desiderari, quæ vel à meridie vel à media nocte ejus loci, ubi navis tunc versatur, sint elapsa. Cùm enim Academia tempus non per horologia definire jubeat, sed per solas observationes, perspicuum est non requiri mensuram durationis à quopiam temporis momento cognito; sed verum tempus Astronomicum quod observationes pro eo loco & tempore exhibeant; vel quod horologium solare, siquidem in usum adhiberi posset, esset indicaturum.

§. 3. Si quidem navis vel quiesceret, vel sub eodem meridiano progrediretur, non aliud intercederet discrimen inter mensuram temporis reverâ præterlapsi & temporis Astronomici, nisi quod ex æquatione temporis nasceretur. Sin autem navis continuò secundum longitudinem promoveatur, manifestum est, hos duos temporis mensurandi modos, inter se plurimum discrepare posse. Sin enim fieri posset, ut navis 24 horarum totum terræ ambitum conficeret, solemque constanter in meridiano constitutum aspiceret; Astronomicè tempus mensurando perpetuus deprehenderetur merities, quotcumque etiam horæ præterlabantur.

§. 4. Triplicem igitur in navigatione temporis mensuram constitui oportet, quarum prima in æquabili temporis defluxu consistit, secundum quam, verbi gratiâ, horæ

quæ à momento, quo navis è portu est egressa ad quodvis momentum datum reverâ sint elapsæ, numerantur. Secundus tempus mensurandi modus ad meridiem ejus diei, quo hora petitur, spectat; eoque quæritur quot horæ ab eo momento, quo meridies proximè præcedens fuit observatus, effluxerint: etiamsi interea navis situm secundum longitudinem mutaverit. Tertius autem tempus metiendi modus, dinumerat horas, quæ ab eo momento, in quod meridies sub eo meridiano, ubi navis jam versatur, incidit, sunt præterlapsæ.

§. 5. Trium horum tempus describendi modorum, primus quamquam solus, veram temporis notionem præbet, hic tamen non attenditur, quoniam exquisitissima horologia requirit, neque per solas Observationes cœlestes institui potest, si quidem observationes eclipsium excipiamus. Interim tamen vera temporis duratio ex tempore per secundum vel tertium modum definito concludi potest. Si intervallum constet, quo navis secundum longitudinem interea processerit. Tempus enim quod differentię longitudinum respondet, tempori observato vel additum vel demtum, dabit verum temporis intervallum.

§. 6. Hic igitur mihi tantum ad secundum ac tertium temporis assignandi modum erit respiciendum: qui quidem duo modi plerumque parum à se invicem discrepabunt, nisi forte navis propè alterutrum polum versetur, ubi brevi temporis spatio satis magna longitudinis mutatio fieri potest. Præter hunc casum bini isti modi, etsi sunt diversi, tamen non difficulter alter ad alterum reduci, sicque instar unius considerari poterunt. Æstimatio enim itineris à nave confecti, jam eò usque perfecta videtur, ut quantum navis aliquot saltem horarum spatio vel longitudinem vel latitudinem immutaverit sine perceptibili errore assignari queat.

§. 7. Observationes autem per se tempus tertio tantum modo ostendunt, in quovis enim loco, ubicumque navis constiterit: aspectus cœli perpetuò eam horam designat, quæ à meridie ejusdem loci numeratur. Quando ergo navis ab eo tempore quo verus meridiæ fuit observatus, ad aliam longitudinem pervenerit, tum tempus differentię longitudinum debitum tempori tertio modo assignata addi vel demi debet, ut obtineatur mensura temporis secundo modo descripti. Facile autem perspicitur, etiamsi in æstimatione differentię longitudinum haud levis error fuerit commissus, tamen hinc temporis determinationem non sensibilibiter perturbari.

§. 8. Quæstione ergo ad determinationem temporis tertio modo sumti perductâ, definiendum est, cujusmodi observationibus, ad hoc præstandum, uti conveniat. Atque hic quidem statim pleraque observationum genera, quæ in continenti institui solent, hinc excludi debent. In mari enim neque transitus astrî per meridianum, neque per datum verticalem observari potest, neque eas observationes instituere licet quæ exactissimum horologium requirunt. Relinquuntur ergo potissimum solæ observationes altitudinum, quibus proinde in hoc negotio tantum utar.

§. 9. Hic igitur assumo ejusmodi jam inventa esse instrumenta, quibus tam solis altitudo interdiu, quàm stellarum altitudines noctu satis accuratè observari queant. Cùm enim hæc ipsa quæstio jam sit ab illustr. Academia proposita, atque hac occasione plura eximia instrumenta altitudinibus observandis apta sint excogitata, temerarium videri possit hoc negotium denuò suscipere. Interim tamen ne ullam officii partem deferuisse videar, quædam instrumenta hic describam, quæ forte ad præsens institutum optato successu haud carebunt.

§. 10. Quoniam denique non eo solum momento, quo

observatio instituitur, temporis assignatio desideratur, sed præcipuè ut tempora tam antecedentia quàm consequentia, modò intervallum non sit nimis magnum, hoc modo emendentur; necesse est, ut hujusmodi brevia temporis spatia satis exactè mensurari queant; quod vel clepsydrarum vel horologiorum portatilium vel aliorum nuper demùm inventorum instrumentorum beneficio, satis exactè fieri posse hîc assumo, neque in hoc argumento ampliùs evolvendo elaborabo.

§. 11. Navem igitur jam ejusmodi instrumentis instructam esse pono, quibus saltem non nimis magna temporis intervalla accuratè secundùm horas & minuta demetiri liceat: tum verò pariter pono, ex cursu navis pariter pro exiguis temporis intervallis, variationem tam longitudinis quàm latitudinis satis exactè assignari posse; etiamsi hoc pro majoribus temporis intervallis sine enormi errore fieri non posse concedam, similiter scilicet modo, quo in terra variatio longitudinis ac latitudinis in parvis distantis multò accuratiùs ex itineris æstimatione concludi potest, quàm ex observationibus astronomicis, cùm tamen sine his in majoribus distantis nihil certi cognosci queat.

§. 12. His igitur circumstantiis perpensis, primùm monstrabo, quemadmodùm quovis tempore cujusque sideris altitudo idoneorum instrumentorum ope observari debeat: quod argumentum cùm jam sit uberrimè ab aliis pertractatum, brevitati maximè studebo, atque imprimis tantùm descriptioni quorundam novorum instrumentorum, quæ forte in mari utilitate non carebunt, operam dabo. Deinde plures modos describam ex observatione altitudinum veram diei noctisve horam colligendi; quod negotium cùm pariter ab aliis ferè exhaustum videatur, quæstioni illustrissimæ Academiæ me pleniùs satisfacturum confido, si selectum ejusmodi observationum, quibus

quàm minimo errore scopus obtineatur, indicavero, simulque quando aliquot observationibus successivè institutendis utar, ostendero, quomodò variationis, quam navis interea tam in longitudine quàm in latitudine subiit, ratio in calculo sit habenda. Cùm enim hæc mutabilitas propria sit observatorum in mari fluctuantium illustr. Academiam ad hanc potissimùm circumstantiam respexisse, mihi quidem videtur.

I I.

De Observatione Altitudinum.

§. 13. CUM illustrissima Academia expressis verbis trium temporum diei, crepusculi, ac noctis mentionem faciat, ab observationibus interdiu institutendis initium faciam: quæ ab observationibus nocturnis hoc præcipuè discrepant, quod in illis horizon sit conspicuus, in his verò non item, ex quo fonte quoque discrimen inter observationes, durante crepusculo & noctu factas me rectè petere arbitror, cùm in crepusculo conspectus horizonis, etiam nunc in observationibus adhiberi queat: præterquam quòd paucissima astra in crepusculis appareant.

§. 14. Die autem præter solem nullum aliud sidus se oculis nostris offert, ex cujus observatione horam diei definire queamus, & hanc ob rem omnes observationes diurnas ad solum solem restringam, qui nobis etiam certissimam ac facillimam viam temporis dignoscendi suggerit. Etiam si enim, quando Luna interdiu super horizonte cernitur, tamen ob cursum ejus nondum satis exactè cognitum, tum verò ob ejus parallaxin maximè incertam, ejus

observationes ad tempus cognoscendum adhibere nolim.

§. 15. Solis autem altitudines commodissimè Quadrante Anglico observari videntur, tum quòd naturæ huic instrumento jam satis sint assueti, tum quia non opus est, ut collimatio versùs ipsum solem fiat, sed ad ejus imaginem per foraminulum projectam respicitur, cum qua observatione directio instrumenti horizontem versùs non difficulter conjungitur. Neque tamen refragabor, si aliud instrumentum, vel eorum, quæ jam sunt proposita, vel etiam eorum quæ ipse describam, ad solis altitudines observandas magis aptum videatur, quin id in locum Quadrantis Anglici substituatur.

§. 16. Si tali instrumento altitudo centri solis intra unum minutum primum certa haberi posset eam non solum per refractiones, sed etiam per parallaxin corrigi necesse foret, sed quia in mari hujusmodi accuratio vix sperari potest, præclarumque nobiscum agitur, si in altitudine solis non ultra 5 minuta erremus, parallaxin tutò negligere & refractiones quoque, nisi sol propè horizontem versetur, prætermittere licebit: scilicet, quamdiu refractionis infra unum duove minuta prima subsistit, sufficiet nimirum in tabulis refractionum minuta secunda penitus omitti, ne calculus deinceps instituendus præter necessitatem molestior reddatur, quod in observationibus stellarum æquè notatum velim.

§. 17. Solisque ortus & occasus quoties licuerit, diligenter observetur; sic enim adhibitâ refractionum tabulâ, multò accuratiùs altitudo centri solis vel supra vel infra horizontem assignari poterit. Quin etiam hinc non difficulter momentum colligetur, quo altitudo centri solis reverâ fuerit nulla. Hæ verò observationes non solum sine ullis ferè instrumentis expediri possunt, sed etiam adhiberi solent ad declinationem magnetis observandam, aliosque

usus nauticos ; quamobrem eas eo minùs negligi conveniet.

§. 18. Durante crepusculo Planetæ, potissimùm Venus & Jupiter, cum maximè lucidis stellis fixis visui se offerunt. Quamquam autem hoc tempore horizontem adhuc conspiciere licet, tamen vereor ne usus Quadrantis Anglici nimis evadat molestus & incertus. Cùm enim hoc casu dioptris uti, eaque versùs stellam dirigere oporteat eodem momento, quo versùs horizontem collimatur ; neque unus observator, nisi sit exercitatissimus, stellaque propè horizontem hæreat, huic duplici collimationi par videtur, neque duo se mutuò adjuvare poterunt.

§. 19. Quoniam igitur ad observationes nocturnas alia instrumenta requiruntur, quæ sine respectu ad horizontem habito, altitudines siderum indicent ; iisdem his instrumentis quoque in crepusculo uti præstabit, horizontisque intuitum, solis observationibus solaribus reservari, nisi forte alia instrumenta ad solem magis videantur accommodata. Remotâ itaque horizontis contemplatione, veniam peto, ut observationes crepusculares & nocturnas in eandem classẽ mihi referre liceat.

§. 20. Pervenio itaque ad observationes nocturnas, quæ non solùm ob horizontis defectum alium observandi modum postulant, sed etiam si horizontem discernere liceret, tamen summa difficultas duplicem collimationem simul instituendi hunc modum inutilem redderet, cùm autem pendulorum usus in mari penitus cesset, æquilibrium fluidorum, si quidem satis sit promptum, certissimè verum horizontis situm indicare videtur, ad quem deinceps siderum loca referuntur. At verò insuper necesse est ut hæc relatio secundùm plana verticalia fiat, quamobrem quocumque instrumento utamur, id proximè in plano verticali sustineri necesse est.

§. 21. Quocumque autem instrumento ad observandam stellæ cujusdam altitudinem utamur, primò directio, in qua stella existit, indagari debet, quæ vel dioptris vel Tubo Astronomico explorari solet. Etsi autem lentes crystallinæ objecta distinctiùs representant, tamen earum usus super mari ferè nullus est, quia ob motum continuum, stellam quam forte per tubum conspeximus, confestim amittimus, neque eam facilè recuperare valemus. Quin etiam in observationibus marinis stellas insigniores adhiberi convenit, quarum loca in cœlo jam exactissimè sint determinata, eas autem nudis oculis satis distinctè cerne licet, ut ob hanc causam tubis facilè carere queamus.

§. 22. Ad collimandum ergo instrumenta binis dioptris nudis instructa, reliquis quæ tubis sunt munita, longè antecedunt, ac altera quidem dioptra exiguo foraminulo pertusa sit, per quod stella aspiciatur. Altera verò dioptra satis amplam habeat aperturam, quo stella non facilè ex illa dispareat, statimque in eam reduci queat. Duo autem fila tenuissima in hac apertura firmata sua interseptione ejus centrum designent, in qua si stella appareat, collimatio ritè sit instituta.

§. 23. Eo ergo momento, quo stella in decussatione filorum istorum conspicitur, inclinatio istius lineæ, quæ ab oculo ad stellam dirigitur ad rectam verticalem investigari debet; quod ope quadrantis, cujus limbus accuratè in gradus & minuta sit divisus, commodissimè præstatur. Si enim planum hujus quadrantis situm verticalem teneat, in eoque linea verticalis vel pendulo vel alio quovismodo indicetur angulus, quem linea directionis cum hæc linea verticali efficit, distantiam stellæ à zenith metietur, si quidem recta dioptras jungens radio quadrantis, qui per divisionis initium ducitur, fuerit parallela.

§. 24. Cùm enim ad hanc observationem duæ res

requirantur, positio, scilicet, quadrantis in situ verticali, & in eo directio gravitatis naturalis, seu positio rectæ ad horizontem perpendicularis, quemadmodum utraque obtineri queat, seorsim perpendam. Primò igitur assumam totum negotium in situ quadrantis verticali esse positum, lineamque verticalem nihil habere difficultatis. Quadrans autem, si liberè suspendatur, centrumque gravitatis in ipso suo plano situm habeat, sponte se ad situm verticalem componet, & oscillationes, quæ ipsi à motu navis inducuntur, moderatione ejus à quo tenetur, non difficulter, si non penitus coercentur, tamen ad summam exiguitatem rediguntur.

§. 25. Tametsi autem in hoc error quidam levis committitur, planumque quadrantis verticale putatur, cum tamen aliquantisper declinet, error tamen qui inde in observationem altitudinis redundat, omninò erit imperceptibilis, neque respectu aliorum errorum, qui evitari nequeunt, in computum duci meretur. Interim tamen & hic error ex iis, quæ mox sum traditurus facilè tolletur, cum, pluribus observationibus instituendis, ea sit verissima, quæ maximam stellæ distantiam à zenith ostendat. Demonstrabo enim, quò magis planum quadrantis à situ verticali declinet, eò minorem distantiam stellæ à zenith deprehendi debere.

§. 26. Ut igitur definiam, quantum observatio altitudinis à declinatione plani quadrantis turbetur cujus perturbationis cognitio ad ejus emendationem maximi est

Fig. I. momenti; considerabo primùm quadrantem ACB , in situ verticali, sitque AC recta ab oculo ad stellam directæ, in quadrante autem sit CP , verticalis, erit angulus ACP , mensura vera distantiae stellæ à zenith; ponamus hunc angulum $ACP = \phi$, ut eum cum simili angulo, quem situs quadrantis inclinatus indicare reperietur, comparare queamus.

§. 27. Concipiamus nunc quadrantem circa rectam AC , quæ est fixa, aliquantulum inclinari, atque in ACb pervenire, in quo cum verticali angulum faciat $BCb = \theta$. Quia jam in hoc plano ACb linea verticalis non datur, pendulum à gravitate in eo situm Cp eligere cogetur, qui à directione verticalis vera, minimè discrepet. Iste autem situs cognoscetur, si ex puncto P , in planum ACb normalis ducatur Po , tum enim perspicuum est rectam Cp per punctum hoc o transire debere; atque in hoc statu angulus ACp , distantiam stellæ à zenith indicare putabitur.

§. 28. Ad hunc igitur angulum ACp investigandum ex P ad AC quæ est communis utriusque plani intersectio, ducatur normalis PQ , ex eodemque puncto Q ad eandem AC in plano ACb educatur normalis Qo , in quam ex P , perpendiculariter ducta Po , simul in planum ACb erit normalis. Invento autem hoc puncto o , ex triangulo CQo , ad Q rectangulo, angulus quæsitus ACp , innotescet.

§. 29. Sit radius quadrantis $AC = BC = 1$, qui simul pro sinu toto habeatur, erit ob angulum $ACP = \varphi$, recta $PQ = \sin. \varphi$, & $CQ = \cos. \varphi$. Deinde angulus PQo , quia metitur inclinationem planorum ACB & ACb , erit $= \theta$, unde in triangulo QoP ad o rectangulo, fiet $Po = PQ \sin. \theta = \sin. \theta \sin. \varphi$, & $Qo = PQ \cos. \theta = \cos. \theta \sin. \varphi$. Cum jam $\frac{Qo}{CQ}$ exprimat tangentem anguli ACp , erit $\text{tang. } ACp = \frac{\cos. \theta \sin. \varphi}{\cos. \varphi} = \cos. \theta \text{ tang. } \varphi$, consequenter tangens ACP se habebit ad $\text{tang. } ACp$, ut sinus totus ad cosinum anguli inclinationis utriusque plani.

§. 30. Hinc patet duobus casibus errorem seu discrimen inter angulos ACP & ACp fore nullum, quantumvis etiam fuerit inclinatio plani quadrantis magna. Si enim

fit angulus $ACP = \phi = 0$, quod fit si stella in zenith observetur, angulus ACp pariter erit $= 0$: atque si fit angulus $ACP = 90^\circ$, seu $\text{tang. } \phi = \infty$, invenitur quoque $\text{tang. } ACp = \infty$, ideoque $ACp = 90^\circ$, quare si stella in horizonte versetur, inclinatio quadrantis pariter nullum errorem producit. Ex quibus jam liquet errorem fore majorem quo magis stella tam à zenith quàm ab horizonte simul fuerit remota.

§. 31. Cum igitur angulus ACp minor sit angulo ACP , ponatur hic angulus $ACp = \phi - z$, ita ut z sit error ex inclinatione quadrantis oriundus, eritque $\text{tang. } (\phi - z) = \cos. \theta \text{ tang. } \phi$: at est $\text{tang. } (\phi - z) = \frac{\text{tang. } \phi - \text{tang. } z}{1 + \text{tang. } \phi \text{ tang. } z}$

Unde reperietur $\text{tang. } z = \frac{(1 - \cos. \theta) \text{ tang. } \phi}{1 + \cos. \theta \text{ tang. } \phi^2}$. Si jam angulus inclinationis θ sit valdè parvus, assumere licet $\cos. \theta = 1 - \frac{1}{2} \theta \theta$. Eritque $\text{tang. } z = \frac{\theta \theta \text{ tang. } \phi}{2 \sec. \phi^2 - \theta \theta \text{ tang. } \phi^2}$, seu ob $\theta \theta$ minimum, erit $\text{tang. } z = \frac{1}{2} \theta \theta \sin. \phi \cos. \phi = \frac{1}{4} \theta \theta \sin. 2 \phi$. Sicque error erit maximus quando $2 \phi = 90^\circ$. Seu quando elevatio sideris supra horizontem est 45° .

§. 32. Generaliter autem, quantacunque sit inclinatio θ , valor ipsius ϕ reperietur, cui maximus error respondet, si fractionis $\frac{(1 - \cos. \theta) \text{ tang. } \phi}{1 + \cos. \theta \text{ tang. } \phi^2}$, seu, ob θ constans, hujus

$$\frac{\text{tang. } \phi}{1 + \cos. \theta \text{ tang. } \phi^2} \text{ differentiale, quod est } = \frac{(1 - \cos. \theta \text{ tang. } \phi^2) d \text{ tang. } \phi}{(1 + \cos. \theta \text{ tang. } \phi^2)^2}$$

nihilo æquale statuatur, unde fit $\text{tang. } \phi = \frac{1}{\sqrt{\cos. \theta}}$; error-

que z maximus huic angulo $ACP = \phi$ respondens, definiatur ex hac æquatione, $\text{tang. } z = \frac{(1 - \cos. \theta) : \sqrt{\cos. \theta}}{2}$

$$= \frac{1 - \cos. \theta}{2 \sqrt{\cos. \theta}} = \frac{\sin. \frac{1}{2} \theta^2}{\sqrt{\cos. \theta}} \text{ ob } \frac{1 - \cos. \theta}{2} = \sin. \frac{1}{2} \theta^2.$$

§. 33. Hinc ergo pro quavis quadrantis inclinatione maxima aberratio, quæ in observationem irreperere potest,

Determinari poterit. Ponamus ergo planum quadrantis à plano verticali angulo 2° declinari, ita ut sit $\theta = 2^\circ$ & $\frac{1}{2}\theta = 1^\circ$, reperietur $\log. \varphi = 10.0001323$, & angulus $\varphi = 45^\circ 0' 31''$, & $\log. z = 6.4438429$. Sicque error $z = 57''$, nequidem ad unum minutum primum exsurget. Quando autem quadrans inter oscillandum longius à plano verticali digreditur, angulusque ACp , dum stella in interfectione filorum conspicitur continuò mutatur, ita ut variatio percipi queat, tum maximus angulus, qui quidemprehenditur, veram distantiam stellæ à zenith indicabit. Interim tamen apparet, nisi inclinatio ultra duos gradus ascendat, ne hâc quidem præcautione opus esse, sed altitudinem stellæ satis exactè indicari.

§. 34. His de situ quadrantis in situ verticali notatis, in id est incumbendum, ut in plano quadrantis ipsa linea verticalis exhibeatur, quod in terra continenti quidem commodissime ope penduli præstatur. Verum in mari usum pendulorum prorsùs repudiare cogimur; eorumque loco ejusmodi instrumenta adhiberi solent, quæ æquilibrio fluidorum innixa, verum horizontis planum exhibeant. Ex quo genere jam plura præclara extant instrumenta, alibi descripta, quæ ad meum usum adhibere non dubitabo, si forte ea, quæ hîc sum propositurus, minus apta videantur.



III.

Descriptio Quadrantis Nautici.

Fig. II. §. 35. **C**ONFICIATUR primò quadrans ACB more solito ex metallo vel ligno durissimo, quod à varia tempestate non incurvetur; ubique autem materiam homogeneam adhiberi conveniet, ut à dilatatione & contractione quæ à mutato caloris gradu, accidit figura non distorqueatur. Limbus verò AB , sit diligenter in gradus & quina vel dena minuta prima divisus, quæ porro per lineas diagonales in singula minuta subdividantur. Cujusmodi divisio pro magnitudine quadrantis vel magis vel minus distinctè exprimi poterit.

§. 36. Magnitudinem hujus quadrantis majorem non esse convenit, quàm ut ab uno homine commodè in manibus teneri ac tractari possit. Cùm igitur sustentaculo non sit opus, quo aliàs pondus valdè augetur, radius hujus quadrantis duos ferè pedes longum vel saltem sesquipedalem fieri licebit: quæ magnitudo jam divisionis satis minutæ est capax, ita ut singula ferè minuta prima discerni queant; siquidem lineis transversim ductis uti libeat. Infrà autem patebit, ne hâc quidem divisione opus esse, sed sufficere si integri tantùm gradus exprimantur.

§. 37. Dioptræ Aa & Cc modò antè descriptæ super radio AC , constituentur, earumque distantia bipedalis seu sesquipedalis ad collimandum satis erit idonea, ut quævis stella per eas non difficulter detegi, sed etiam moderatione quadrantis in intersectionem filorum reduci possit, si forte pondus quadrantis observatori nimis grave videatur, quadrans ex centro C , suspendi poterit, ita tamen ut

manibus retineatur ac dirigatur; hoc enim modo Observator multum sublevabitur.

§. 38. Venio nunc ad præcipuam quadrantis partem, pendulum, scilicet, CGH , quod circa centrum C liberissime mobile, in fissura GI habeat filum tenuissimum tensum, quod in limbo quadrantis gradus & minuta distinctè indicet. Hoc igitur pendulum si perpetuò in situ verticali persisteret, statim veram stellæ distantiam à zenith patefaceret: sed in mari ob mutationem navis continuam, pendulum vix unquam in situ verticali acquiescet.

§. 39. Marginem hujus penduli in m & n , non incongruum erit replicare, ut limbum quadrantis excipiat, ita tamen ut liberrimè juxta eum moveri possit, siquidem quadrans teneat situm verticalem. Hinc enim Observator statim sentiet utrùm quadrans in plano verticali versetur, an notabiliter declinet, quo casu non difficulter in situm verticalem proximè saltem dirigetur; quantum quidem ad certitudinem observationum requiritur.

§. 40. Parti inferiori hujus penduli, seu regulæ mobilis CG , in G connectatur tubus vitreus EF , crenæ arcus lignei immissus, quæ modo mox indicando sit divisa. Tubus iste vitreus autem aliquantulum sit incurvatus, & partibus utrinque æqualibus GE & GF cum regula ad angulos rectos firmissimè conjunctus, subscudibus, scilicet, EH & FH , ut motum regulæ perfectissimè sequatur, & cum ea unum continuum pendulum constituat.

§. 41. Tubus iste vitreus aquâ seu alio liquore magis idoneo repleatur, relicta exigua bullulâ aëreâ, & utrinque in E & F obstruatur, ut aëri nullus aditus pateat. Hæc ergo bullula K , in omni tubi situ jugiter supremum occupabit locum, & tamen ipsa per theoriam, motum quemdam oscillatorium recipere debet, tamen effici potest, ut eum ferè singulis momentis amittat, motuque tubi non obstante,

nisi vehementer concutiat, perpetuò in puncto tubi summo hæreat; qui effectus, quemadmodum promptissimè produci queat, deinceps exponam.

§. 42. Curvatura tubi hujus EF sit, quantum fieri potest, circularis, referatque arcum circuli, cujus centrum situm sit alicubi in recta CGH , producta, puta in O ; quod punctum quò longiùs distet, eò majores evadent gradus in arcu EF . Quare si radius GO decies major accipiat, quàm radius quadrantis AC , singula minuta prima curvaturæ tubi satis distinctè exprimi poterunt. Nihil autem obstat, quò minus tubo huic EF longitudo arcui quadrantis APB ferè æqualis tribuatur, unde curvatura tubi 9 gradus complectetur; ita ut uterque semissis GE & GF 4 gradus capiat, quæ amplitudo pro motu penduli oscillatorio sufficiens videtur.

§. 43. Cum autem nimis sit difficile tubum vitreum EF , tam exactè juxta arcum circuli, cujus centrum sit in dato puncto O , incurvare, ad præsens institutum sufficiet, dummodo proximè ejusmodi habuerit figuram. Hinc oportebit divisionem hujus tubi non geometricè, sed practicè per observationes absolvere in loco, scilicet, quieto, antequam in navim conscendatur. Neque ergo formatio istius tubi, neque ejus divisio ullâ amplius premetur difficultate.

§. 44. Quòd si autem quadrans ACB , cum pendulo $CIGEHF$ modo exposito fuerit constructus, evidens est quemadmodum ejus ope altitudo stellæ cujusvis cognosci queat. Dioptris enim Aa & Cc versùs stellam directis, eo momento quo stella in intersectione filorum apparet, notetur tam amplitudo arcûs AG , in limbo quadrantis, quem filum GI abscindit, quàm situs bullulæ aeræ K , & mensura arcûs GK in gradibus & minutis inventa, subtrahatur ab arcu AG , siquidem bullula in parte GE hæreat, sin
autem

autem fuerit in arcu GF , ad arcum AG addatur, sicque prodibit distantia stellæ à zenith.

§. 45. Concipiatur enim ducta vera linea verticalis CP , ita ut angulus ACP metiatur distantiam stellæ à zenith: jam quia bulla K in tubo locum supremum occupat, erit recta OK quoque verticalis, ideòque angulus GOK , quem arcus GK indicat, æqualis erit angulo GPC . Quamobrem angulus ACP , seu vera distantia à zenith obtinebitur, si ab angulo ACG quem pendulum in limbo quadrantis abscindit, subtrahatur angulus GOK quem situs bullæ indicat.

§. 46. Quò autem hæc faciliùs expediri queant, pendulum CG cochleâ munitum esse conveniet, quâ pendulum ad limbum quadrantis firmari, ejusque motus oscillatorius penitus coerceri queat. Adigatur autem hæc cochlea tum, quando pendulum non multum à situ verticali CP , dum stella in intersectione dioptræ conspicitur, distare æstimabitur: ut deinceps ad solum situm bullæ in tubo EF respicere sufficiat.

§. 47. Vel cum altitudo sideris jam ad aliquot tantum gradus fuerit explorata, pendulum ope cochleæ firmetur in divisione quadam insigniori limbi, quâ integer gradus indicetur. Quo facto minister adstans sedulo bullam in tubo EF inspiciat, ut simul atque Observator signum dederit, se stellam in intersectione filorum contueri, locum bullæ exactè assignare possit. Tum enim numerus minorum arcus GK ab arcu AG jam antè cognito, vel subtractus, vel ad eum additus, præbebit distantiam stellæ à zenith. Hinc intelligitur sufficere, si limbus quadrantis tantum in integros gradus dividatur, atque ulteriori divisione faciliè jam carere poterimus.

§. 48. Ad has autem observationes accuratè institundas exercitio frequenti opus erit; quo Observator sibi faciliè habitum comparabit quadrantem hunc, si modo

idoneo fuerit suspensus, commodè tractandi, & quantum fieri potest, ejus motus violentiores compescendi. Neque mihi quidem videtur ad hoc negotium tantum solertiæ requiri, quantum vulgò tractatio Quadrantis Anglici postulare solet.

§. 49. Quando enim Observator pendulum jam in situ CG , à verticali CP , non multum remoto firmaverit, tum pendulum alio motu, nisi qui sit ipsi quadranti communis concitari non poterit; hunc autem Observator obsequendo, ita temperare poterit, ut fiat lentissimus, præcipue quando stellam in intersectione filorum conspiciat. Hocque modo ipsa bulla aërea non sensibiliter movebitur, atque famulus seu socius Observatoris non difficulter, momento imperato, locum bullæ dignoscet.

§. 50. Non solum autem hæc motus penduli imminutio ideo est necessaria, quo locus bullæ certiùs notari queat, sed etiam bulla eò accuratiùs se in locum tubi supremum recipit, multoque minus ultrò citròque vagabitur, quò tardior fuerit motus. Hisque circumstantiis probè perpensis, non dubito quin ope hujus quadrantis, dummodò Observator sibi modicam solertiam acquisiverit, cujusque stellæ vera altitudo tam accuratè observari possit, ut error vix ultra minutum exsurgat, & majorem quidem certitudinis gradum super mari expectare non licet.

§. 51. Quamquam autem hoc modo incertitudo, quæ à motu bullæ oscillatorio ejusve segnitie proficiscitur, quoad maximam partem tollitur, tamen structura quoque tubi talis effici potest, ut bulla quàm promptissimè, situm supremum affectet, ibique perseveret. Hoc, scilicet, præstabitur, si tubus non nimis fiat angustus, bullæque modica quantitas relinquatur, quæ res ut sint ad scopum maximè accommodatæ, cum judicio, tum experientiâ à solerti artifice non difficulter definientur; quare descriptioni hujus instrumenti

quod mihi quidem plurimis aliis ad hunc finem propositis, palmam præripere videtur, diutius non immoror.

I V.

Descriptio alius Quadrantis Nautici.

§. 52. **N**ISI aliæ circumstantiæ impediunt, quominus Fig. III.
longitudo penduli tres pedes superare possit; tum ipsi pendulo adjungi posset barometrum *GIHKL* Boullianum, scilicet, quòd minimas mutationes mercurii in tubo angusto *KL*, satis distinctè indicet. Cum enim mercurius in omni situ eandem altitudinem verticalem teneat, dum pendulum tantillum inclinatur, mercurius in tubo *LK*, recedet notabiliter, unde vicissim ex loco mercurii *S* inclinatio penduli cognosci posset.

§. 53. Quia verò difficile foret quovis tempore veram altitudinem Barometri cognoscere, atque recessus mercurii *S*, in tubo horizontali *LK* non solum ab inclinatione penduli, sed etiam à declinatione plani quadrantis proveniat, ac præterea istæ mutationes ob frictionem ne in terra satis sint certæ, Barometrorum usum ad pendula mari perficienda penitus rejiciendum esse arbitror. Quocirca aliam ideam ab æquilíbrio tuborum communicantium desumptam proponam; quæ tamen illâ, quam suprà descripsi, non parum præstantior mihi quidem videtur.

§. 54. Confecto, scilicet, quadrante *ACB*, modo suprà descripto, cum pendulo *CIG*, infra connectatur ad angulos rectos, tabula seu regula *EF* ad quam firmatus sit tubus recurvus *DEFH*, cujus ramus *DE*, multò sit amplior quàm ramus *FH*, quem gracillum esse convenit, ut minimæ mutationi liquoris in tubo *DE*, satis magna

mutatio in tubo FH respondeat: tubus iste liquore quodam seu argento vivo impleatur, præstoque sit obturaculum, quo tubus DE obstrui possit, si reponatur ne liquor effluat.

§. 55. Ponamus liquorem, quando pendulum in situ verticali pendet, in m & o subsistere, ita ut recta mo tum sit horizontalis. Quando autem pendulum extra situm verticalem versatur, uti figurâ representatur, in tubo ampliori DE liquor aliquantulum ascendet, in angustiori verò subsidet in n , ut jam recta mn sit horizontalis. Mutatio in tubo ampliori hinc facta minima, & vix perceptibilis erit, cum mutatio in angustiori, seu intervallum no sit notabile.

§. 56. Quoniam igitur recta mn , ad veram lineam verticalem CP est normalis, angulus omn , erit æqualis angulo GCP , seu declinationi penduli à situ verticali. Cum itaque punctum o constet ex mutatione in tubo FH , seu intervallum no , cognosci poterit angulus omn , qui ab angulo ACG subtractus, relinquet angulum ACP veram distantiae stellæ à zenith mensuram. Tantum igitur opus est, ut ad tubum FH divisio in gradibus & minutis adscribatur, quæ singulis punctis n respondeat, hocque aptissimè à perito artifice præstabitur.

§. 57. Si amplitudo tubi angustioris FH præ ampliori DE evanescat, ramusque FH ad basin EF fuerit perpendicularis, tum intervallum no erit tangens anguli omn , si sinus totus per mo exprimatur. Quare quò longior fuerit tubus EF , eò majora intervalla no iisdem angulis declinationum respondebunt; sin autem crûs FH ad basin EF inclinetur, eò magis intervalla no augebuntur, sicque minimæ mutationes penduli à situ verticali satis sensibilibiter exprimi poterunt.

§. 58. Ut autem liquor promptissimè se semper ad

æquilibrium componat, neque motu oscillatorio observationem incertam reddat, tubi partem EF pariter multo ampliorem fieri conveniet tubo FH . Quò amplior enim fuerit hic tubus EF , eò celeriores erunt oscillationes atque primo quasi momento extinguuntur.

§. 59. Pendulo ergo hac ratione instructo, usus hujus quadrantis non discrepabit à præcedente. Firmato, scilicet, pendulo cochleâ, in situ à verticali CP parùm remoto, si summitas liquoris n in tubo FH accuratè notetur eo ipso momento, quo observator stellam in interfectione spectat, cognoscetur inde distantia linear verticalis veræ CP à loco penduli GI : unde angulus quæsitus ACP innotescet.

V.

Determinatio Meridiei.

§. 60. **P** R I M U M igitur sol certissimus est index temporis veri, quo cognito, non difficulter inde tempus medium colligitur. Tempus autem à meridie numerari solet, seu ab eo momento quo solis centrum per meridianum loci, in quo versamur, transit: unde si in mari meridianum dignoscere liceret, observatio transitûs solis per meridianum facillimè momentum meridiei ostenderet, neque ad hoc ullâ observatione altitudinis opus esset.

§. 61. Cùm autem linea meridiana minimè constet, verum meridiei momentum aliter definire nequit. Hinc circa meridiem cujus tempus saltem propè constare assumo, sapissimè altitudo solis observetur, instrumento vel consueto, vel alio quod magis idoneum videbitur, quæ

R iij.

quamdiu crescit, tempus adhuc antemeridianum indicat, simul ac verò decrescere incipit, pomeridianum declarat.

§. 62. Eo ergo momento, quo solis altitudo crescere definit, atque decrescere incipit, meridies evenisse censendus est. Verùm quia altitudo solis in ipso meridie per notabile temporis intervallum insensibiliter mutatur, atque adhibitis etiam optimis instrumentis in observatione altitudinis error unius minuti committi potest, hoc modo nimis incertè momentum meridiæ assignaretur. Interim tamen hæc observatio maximæ solis altitudinis non est intermittenda, cùm ex ea, ob declinationem solis cognitam, elevatio poli determinetur, cujus cognitio non solum in universa navigatione maximi est momenti, sed etiam ad ipsam horam cognoscendam magnum adjumentum affert.

§. 63. Ad tempus ergo meridiæ exactiùs definiendum præstabit duabus solis altitudinibus æqualibus uti, quarum altera ante, altera post meridiem sit facta, tum autem momentum medium inter has duas observationes meridiem indicabit sub his conditionibus; si primò solis declinatio non fuerit interea immutata; secundo si ipsa navis interea quieverit, ac tertio si observationes nullis erroribus sint inquinatæ.

§. 64. Ante omnia igitur necesse est, ut hoc ipsum intervallum temporis, inter binas observationes elapsi exactè metiri valeamus, quod nisi id plures horas superet, fieri posse inter postulata est relatum. Nisi enim tempus per aliquod saltem intervallum ope clepsydræ seu automati exactè mensurari posset, tum ipsa temporis determinatio per observationes omnino esset inutilis, quia non tam determinatio unici cujusdam momenti, sed emendatio notabilis cujuspiam temporis intervalli desideratur.

§. 65. Quod jam ad tres antè memoratas circumstantias

attinet, ad quas attendi oportet, si meridiem ex duabus altitudinibus solis æqualibus determinare velimus; earum prima, quæ variatione solis declinationis continetur, jam satis est explorata, cum habeantur tabulæ æquationis meridiei ad singulos gradus elevationis poli supputatæ, quibus differentia veri meridiei & momenti inter observationes medii indicatur. Quando autem intervallum observationum non quatuor horas superat, quod aliæ quoque rationes prohibent, ne hac quidem correctione opus erit, cum multo minor sit, quàm errores qui in observationibus evitari nequaquam possunt.

§. 66. Altera difficultas, quæ à motu navis oritur, quæstioni propositæ penitus est propria; ad quam igitur removendam eò majorem operam adhibebo, quòd reliqua hujusmodi observationum momenta in omnibus ferè elementis tradi solent, hæc verò observationum perturbatio à motu navis oriunda nusquam satis diligenter explicata reperiatur. Quamquam autem accuratam itineris à nave confecti cognitionem inter postulata referre non licet, tamen quantum navis intervallo aliquot horarum processerit, satis exactè æstimari posse, quantum quidem ad horæ determinationem opus est, jure assumo.

§. 67. Ex æstimatione igitur itineris, quod navis intervallo duarum illarum observationum, quibus eadem solis altitudo apparuit, satis accuratè colligi potest, quantum tam longitudo, quàm latitudo navis interea fuerit mutata. Si enim noverimus quot milliaria anglica vel boream vel austrum versùs absolverit, poli elevatio totidem minutis primis vel major vel minor evasit, in hoc enim negotio mentem tutò, à sphæroidica terræ figura abstrahimus, quoniam minutiarum omissio, horæ determinationem non turbat.

§. 68. Deinde æquè faciliè ex itinere æstimatio judicatur,

quantum navis vel ortum vel occasum versum secundum circulum æquatori parallelum interea sit progressa. Ut autem hinc variatio longitudinis in minutis definiri possit, elevationem poli nosse oportet, cujus autem cognitio satis crassa ad hoc institutum sufficit. Si enim vel aliquot gradibus in elevatione poli erraverimus, tamen error qui inde in æstimationem variationis longitudinis redundat, omnino erit imperceptibilis.

§. 69. Quamquam autem navis plerumque in hoc intervallo tam longitudinem quam latitudinem simul immutat, tamen utramque mutationem hinc seorsim perpendam. Si enim ostendero, quomodo conclusio ex observationibus respondentibus deducenda tam ratione longitudinis quam latitudinis mutatae corrigi debeat singulatim; his ambabus correctionibus simul uti oportebit quando navis interea tam longitudinem quam latitudinem mutaverit. Interea autem declinationem solis invariata considero, quia error inde oriundus jam est definitus,

§. 70. Ponamus ergo intervallo duarum illarum observationum solis, solam navis longitudinem esse mutatam, dato minutorum numero, latitudinem verò eandem mansisse. Sit in sphaera cœlesti *P* polus, & *S* locus solis immobilis, ita ut terra, quæ in centro hujus sphaeræ posita concipiatur, ejus respectu circa axem spatio 24 horarum solarium giretur. Sit *A* zenith loci navis tempore primæ observationis, *B* verò zenith navis momento alterius observationis. Quia ergo in utroque situ tam eadem à polo distantia servatur, quam utrinque eadem solis à zenith distantia observatur, erit $AP=BP$, & $AS=BS$.

§. 71. Hinc meridianus *PS*, angulum horarium *APB* bifecabit, unde sequitur tempore inter observationes medio, meridiem fuisse sub meridiano *PCS*; eo autem tempore navim sub ipso meridiano in *C* extitisse, siquidem
interea

interea motu uniformi fuerit secundum longitudinem promota, perspicuum est. Unde momento inter duas observationes medio meridies verus incidit sub ipso meridiano, ubi tum navis est versata. Cum enim navis zenith interea viam *AB* descripserit cum motu proprio, tum motu totæ terræ communi, & uterque motus sit uniformis, necesse est navim tempore medio in ipso puncto *C* hæsisse.

§. 72. Quò distinctiùs, quæ hinc consequuntur, enunciare possimus, ponamus inter momenta observationum in *A* & *B*, elapsas esse quatuor horas, navemque interea ab occidente in orientem secundum longitudinem absolute unum gradum. Quando igitur navis in *B* versatur, dicendum est ante bihorium meridiem incidisse, non sub meridiano *PB*, sub quo navis nunc est, sed sub meridiano *PC*, per quem navis ante duas horas transierit.

§. 73. Quia ergo navis intra hoc bihorium dimidium gradum secundum longitudinem confecisse ponitur, quòd in tempore duo minuta prima, sub meridiano *BP*, in quo navis nunc reperitur, ut pote orientiori, necesse est ut meridies duobus minutis primis citius, hoc est, ante $2^h 2'$ eveniret, ita ut hoc momento in loco navis *B*, vera diei hora statuenda sit $2^h 2'$. Simili modo, dum navis tempore primæ observationis, in *A* hæserat, horologia solaria indicare debuerunt $9^h 58'$ ante meridiem.

§. 74. Ex his ergo perspicuum est quomodo ex dato intervallo duarum observationum & variatione longitudinis interea absolutâ, tempus verum, quod, scilicet, horologia solaria indicarent, pro quovis loco navis medio definiri debeat. Atque si æquabilis temporis lapsus tam ante quàm post observationes, fuerit in solis & minutis solaribus animadversus, etiam ea tempora ad horologia solaria emendari poterunt; siquidem mutationis longitudinis, quam navis continuò subit, ratio habeatur.

§. 75. Cum igitur hæc satis sint plana, atque bisectione temporis inter duas observationes elapsi, à variatione longitudinis non turbetur, videamus quantum hoc negotium à mutatione latitudinis patiatur. Hic quidem statim liquet, correctionem multò fore difficiliorem, quoniam difficilis est ei, quæ ex mutatione declinationis solis oritur, eaque multò major fieri potest, cum navis latitudo intervallo aliquot horarum, quæ inter observationes effluxerunt, ultra gradum mutari queat. Quocirca hanc correctionem multò minus negligi conveniet.

§. 76. Quod quò facilius fieri possit, quæramus primùm in loco fixo ex data altitudine solis tempus à meridie, *Fig. VI.* scilicet, Z loci hujus zenith, P polus mundi, & S locus solis tempore observationis. Vocetur altitudo poli $= p$, cujus complementum est PZ , declinatio solis $= s$, cujus complementum $= PS$, siquidem declinatio solis fuerit ejusdem denominationis ac latitudo loci, sin minus pro s , in calculo ponatur $-s$. Denique sit altitudo solis observata $= a$, cujus complementum erit arcus ZS ; atque angulus ZPS , qui tempus à meridie indicat, sit $= X$, erit ex sphaericis, posito sinu toto $= 1$; $\cos. X = \frac{\sin. a - \sin. p \sin. s}{\cos. p \cos. s}$.

§. 77. Sit jam tempus inter binas observationes æquale, solis altitudinum interjectum, & ad arcum æquatoris reductum $= 2c$, altitudo solis in utraque observatione $= a$, & declinatio solis $= s$, quam pariter immutabilem assumo, quia error ex ejus variatione oriundus jam in tabulis æquationis meridiei indicatur. Sit elevatio poli tempore primæ observationis $= p$, ante meridiem, & elevatio poli tempore secundæ observationis post meridiem $= p + \pi$, ita ut navis interea per intervallum π propius ad polum accesserit.

§. 78. Jam quia navis sub eodem meridiano moveri

ponitur & merities non in medium momentum intervalli z c incidit, ponamus arcum $c + z$ determinare tempus à prima observatione ad meridiem elapsum, erit $c - z$ tempus à meridie ad alteram observationem elapsum. Hinc duas obtinebimus æquationes:

$$\text{I. } \cos.(c + z) = \frac{\sin.a - \sin.p \sin.s}{\cos.p \cos.s}.$$

$$\text{II. } \cos.(c - z) = \frac{\sin.a - \sin.(p + \pi) \sin.s}{\cos.(p + \pi) \cos.s}.$$

quæ eliminata altitudine communi a dabunt:

$$\sin.p \tan.s + \cos.p \cos.(c + z) = \sin.(p + \pi) \tan.s + \cos.(p + \pi) \cos.(c - z).$$

§. 79. Cùm jam particulæ π & z præ p & c sint valdè parvæ, erit $\sin.(p + \pi) = \sin.p + \pi \cos.p$; $\cos.(p + \pi) = \cos.p - \pi \sin.p$; atque $\cos.(c + z) = \cos.c - z \sin.c$ & $\cos.(c - z) = \cos.c + z \sin.c$. Quibus valoribus substitutis, erit $2 z \sin.c \cos.p = \pi \cos.c \sin.p - \pi \cos.p \tan.s$. Hincque $z = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{\tan.p}{\tan.c} - \frac{\tan.s}{\sin.c} \right)$ unde ex data latitudinis mutatione π , angulus z faciliè determinatur, qui in tempus conversus, indicabit quantum ad medium intervallum observationum addi debeat, ut verum meridiei momentum obtineatur. Ad hoc autem elevationem poli p , proximè saltem nosse oportet; quia exiguus error in ea commissus valorem ipsius z non sensibiliter afficit.

§. 80. Sit elevatio poli borealis $p = 48^\circ$, declinatio solis borealis $17^\circ 30'$, ideoque $s = + 17^\circ 30'$, intervallum observationum sit $5^h 20'$, quod in angulum conversum dat 80° , ita ut sit $c = 40^\circ$; navis autem interea integro gradu propius ad polum accesserit, ut sit $\pi = 1^\circ$, & in tempore $\frac{1}{2} \pi = 2'$. Jam calculus ita constituetur.

Sij

$$\begin{array}{rcl}
 l. \text{ tang. } p = 10,0455626 & l. \text{ tang. } s = 9,4987223 & \text{tang. } p = 1,323 \\
 l. \text{ tang. } c = 9,9238135 & l. \text{ sin. } c = 9,8080675 & \text{tang. } c = 0,490 \\
 \hline
 & & \text{sin. } c = 0,833
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \frac{1}{2} \pi & = & 2 \\
 z & = & 1',666 = 1'40''
 \end{array}$$

Hoc ergo casu ad tempus medium inter observationes elapsam addi debet $1'40''$ ut prodeat verum meridiei momentum.

§. 81. Major prodit hæc correctio si declinatio solis factis sit australis, quia tum $\text{tang. } s$, signum contrarium obtinebit, fitque $z = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{\text{tang. } p}{\text{tang. } c} + \frac{\text{tang. } s}{\text{sin. } c} \right)$, cujus ut exemplum afferamus, sit altitudo poli $p = 60^\circ$; declinatio solis australis $= 23^\circ 28' = s$; intervallum observationum $= 3^h 40'$, seu in angulo $= 55^\circ = 2c$; ideoque $c = 27^\circ 30'$; interea verò navis austrum versùs confecerit $36'$: erit $\pi = -36'$, & in tempore $\frac{1}{2} \pi = -1'12''$: unde calculus ita se habebit:

$$\begin{array}{rcl}
 l. \text{ tang. } p = 10,2385606 & l. \text{ tang. } s = 9,6001181 & \text{tang. } p = 3,327 \\
 l. \text{ tang. } c = 9,7164767 & l. \text{ sin. } c = 9,6644056 & \text{tang. } c = 0,862 \\
 \hline
 & & \text{sin. } c = 4,189 \\
 & & - \frac{1}{2} \pi = -1'12''
 \end{array}$$

$$z = -5',027 = -5'12''$$

Hoc ergo casu à momento inter observationes medio subtrahi debet $5'12''$, ut verum meridiei tempus habeatur.

§. 82. Possent hinc ad singulos gradus tum declinationis solis, tum elevationis poli pro præcipuis temporis intervallis tabulæ computari, quæ valores $\frac{\text{tang. } p}{\text{tang. } c} + \frac{\text{tang. } s}{\text{sin. } c}$ exhiberent, tum enim numeri hujus tabulæ per semissem variationis latitudinis $\frac{1}{2} \pi$ multiplicati & in tempus conversi, dabunt correctionem meridiei ex hoc capite necessariam. Sufficiat autem hîc regulam ad computum satis fidelem tradidisse, & cum aliæ determinationes difficiliore

calculos requirant, hujusmodi tabulis facile carere poterimus.

§. 83. Antequam autem hoc argumentum deferam, notasse conveniet ex illis duabus altitudinibus solis æqualibus facile elevationem poli veram pro tempore meridiei assignari posse. Si enim p denotet hanc poli elevationem, eliminata supra littera Z , perveniet ad hanc æquationem,

$$\cos. c = \frac{\sin. a - \sin. p \sin. s}{\cos. p \cos. s}, \text{ seu } \sin. a = \sin. s \sin. p + \cos. c$$

$\cos. s \cos. p$. Ex qua sequenti modo, ut extractione radicis non sit opus, valor p elicietur. Quæraturn primò angulus

$$\text{tang. } v = \frac{\sin. s}{\cos. c \cos. s}, \text{ eritque } \sin. a = \cos. c \cos. s$$

$$\text{tang. } v \sin. p + \cos. c \cos. s \cos. p = \frac{\cos. c \cos. s}{\cos. v} (\sin. v \sin. p + \cos. v \cos. p), \text{ ac porro } \frac{\sin. a \cos. v}{\cos. c \cos. s} = \cos. (p - v). \text{ Hinc ergo commodè innotescit angulus } p - v, \text{ ex eoque porro altitudo poli quæsitæ } p.$$

§. 84. Quamquam cognitio elevationis poli maximi est momenti, tamen ne nimis longè à quæstione propositâ digrediar, neque hanc formulam uberius explico, neque in sequentibus peculiarem operam, ad elevationem poli investigandam adhibebo, sed vel aliunde jam poli elevationem cognitam esse assumam, vel quomodo conjunctim cum hora diei ex observationibus concludi possit, docebo. Nunc igitur restat, ut inquiram quantum determinatio meridiei ab ipsis observationum erroribus afficiatur, neque plures modos meridiem determinandi afferam, cum omnes sequentes modi horam diei determinandi simul ad meridiem respiciant, eumque definiant.

§. 85. Dum autem in turbationem ab ipsis observationum erroribus oriundam inquiero, reliquas anomalias omnes segrego, cum quia eas jam sum contemplarus, tum verò, quoniam, quid omnes conjunctim efficiant, ex

singulis seorsim concludi potest. Tam solis ergo declinationem, quàm situm navis immutabilem nunc considero, atque cùm in binas illas observationes duplex error irrepere possit, alter in altitudinibus solis, alter in æstimatione intervalli temporis interea elapsi, utrumque pariter seorsim evolvam.

§. 86. Cùm igitur in utraque observatione, solis altitudo $= a$ putetur, ponamus discrimen inter solis altitudines esse $= \alpha$, ita ut, si altitudo primæ observationis fuerit $= a$, altitudo solis in altera observatione reverâ sit $= \pm \alpha$, denotabitque α errorem quem in observatione altitudinis committere possumus; hicque duplicatus offerit, si quidem altera in defectu, altera in excessu peccaverit. Unde si in una observatione duobus minutis errari queat, fieri poterit ut α fiat $= 4'$, quod tamen rarissimè evenire censendum est.

§. 87. Ob hunc ergo errorem momentum meridiei à medio intervallo inter observationes elapso pariter non nihil discrepabit. Sit ergo totum intervallum observationum in angulum conversum $= 2c$, & intervallum inter primam observationem & meridiem $= c + z$, erit intervallum à meridie ad secundam observationem $= c - z$. Unde si declinatio solis sit $= s$, elevatio poli $= p$, habebuntur duæ sequentes æquationes:

$$\text{I. } \cos. (c + z) = \frac{\sin. a - \sin. p \sin. s.}{\cos. p \cos. s.}$$

$$\text{II. } \cos. (c - z) = \frac{\sin. (a \pm \alpha) - \sin. p \sin. s.}{\cos. p \cos. s.},$$

§. 88. Cùm jam ob z & α valdè parva, sit $\cos. (c + z) = \cos. c - z \sin. c$, & $\cos. (c - z) = \cos. c + z \sin. c$, atque $\sin. (a \pm \alpha) = \sin. a \pm \alpha \cos. a$. Si prorsus æquatio à posteriori subtrahatur, relinquetur $2 z \sin. c = \frac{\pm \alpha \cos. a}{\cos. p \cos. s.}$, ideo-

que $z = \pm \frac{1}{2} \alpha \frac{\cos a}{\sin c \cos p \cos s}$: unde si angulus $\frac{1}{2} \alpha$ in tempus convertatur, statim prodibit error meridiei z in tempore expressus. Sic si α æstimetur $5'$, hoc in tempore dabit $20''$, fietque $\frac{1}{2} \alpha = 10''$ temporis. Sit jam $2c = 2$ horas, seu angulus $c = 15^\circ$, elevatio poli $p = 60^\circ$, declinatio solis $s = 23^\circ +$ altitudo $a = 6^\circ$: reperietur $z = \pm 83''$. Quamquam ergo in hoc exemplo omnia observationem meridiei maximè perturbare assumpta sunt, tamen momentum meridiei tantum ad $1' 23''$, incertum relinquitur.

§. 89. Quamvis igitur hunc errorem neque tollere neque emendare valeamus, tamen necesse fuit nosse, quantum determinatio meridiei impediatur; & quoniam reliquæ circumstantiæ majorem accurationem non admittunt, ut intra minutum primum de vero meridiei momento certi esse queamus; hunc errorem eò faciliùs negligere poterimus, quòd eo incertitudo veri momenti meridiei notabiliter non afficiatur.

§. 90. Quod denique ad errorem, qui forte in æstimatione temporis inter binas observationes elapsi, committitur, manifestum est, eo verum meridiei momentum à medio intervallo non removeri: neque ergo propterea correctione opus esset, etiamsi istum errorem definire possemus. Quamobrem methodo hîc exposita, verum meridiei momentum tam accuratè definiri posse assumo, ut vix uno minuto primo à veritate aberret; valdèque dubito, an major certitudinis gradus obtineri queat. Multò tamen exactiùs definiri poterit, si plures observationes simul instituantur, atque inter omnes conclusiones medium quoddam eligatur.



V I.

*Determinatio horæ diei per observationes
Solis.*

§. 91. **I**N præcedenti articulo ad solum momentum meridiei respeximus, à quo reliquæ horæ tam diurnæ quàm nocturnæ sunt numerandæ; nunc igitur docendum est, quomodo ex altitudinibus solis accuratè observatis, tam ante quàm post meridiem, vera diei hora colligi debeat, quæ, scilicet, ei meridiano, sub quo navis tempore observationis versatur, conveniat; perpetuò enim tenendum est eam horam requiri, quam exquisitissimum horologium solare, si tali uti liceret, in eodem loco eodemque tempore esset indicaturum.

§. 92. Hic statim se offerunt duo casus, prout elevatio poli vel cognita fuerit vel incognita. Declinationem enim solis, quæ in determinationem temporis ingreditur, perpetuò cognitam esse assumo. Namque ephemerides solis imprimis ad manus esse oportet, ex quibus ad quodvis momentum ejus loci ad quod sunt computatæ, declinatio solis facillè colligitur. Etsi autem, ut idem sub alio meridiano inde præstari possit, differentiam meridianorum nosse oportet, tamen vix unquam navis in ejusmodi statu versatur, quin ejus longitudo ad aliquot gradus cognoscatur. Error autem vel quindecim graduum hic commissus in declinatione solis nunquam errorem unius minuti parit; unde in hoc negotio declinationem solis omninò inter cognita referre licet.

§. 93. Ponamus ergo primò elevationem poli esse cognitam, sive ea nunc demum sit ex observationibus collecta

collecta, sive jam ante non nimis magnum tempus definita, ita ut variatio, quæ interea ob motum navis sit facta, ex æstimatione itineris satis exactè assignari queat. Cognitâ autem elevatione poli cum declinatione solis, ex observatione altitudinis solis faciliè hora diei, sive antemeridiana sive pomeridiana determinatur. Si enim ponatur elevatio poli $= p$, declinatio solis borealis $= s$ (pro australi arcum s ejusque proinde sinum negativè accipi oportet, manente ejus cosinu), altitudo solis observata $= a$, & tempus à meridie in arcum æquatoris conversum $= x$, erit

$$\cos. x = \frac{\sin. a - \sin. p \sin. s}{\cos. p \cos. s}.$$

§. 94. Ex hac ergo formula definitur angulus x , qui in tempus conversus, quindecim gradus uni horæ tribuendo, habebitur vel hora antemeridiana vel pomeridiana tempore observationis, quorum utrum locum habeat, dubium esse nequit. Quò autem hic calculus faciliùs ope logarithmorum absolvi possit, quia est $\sin. \frac{1}{2} x$

$$= \sqrt{\frac{\cos. p \cos. s + \sin. p \sin. s - \sin. a}{2 \cos. p \cos. s}} = \sqrt{\frac{\cos. (p - s) - \sin. a}{2 \cos. p \cos. s}},$$

$$\text{cum jam sit } \frac{\cos. A - \cos. B}{2} = \sin. \frac{A+B}{2} \times \sin. \frac{B-A}{2}, \text{ \& } \sin. a$$

$$= \cos. (90^\circ - a), \text{ erit } \frac{\cos. (p-s) - \cos. (90^\circ - a)}{2} = \sin. \frac{90^\circ - a + p - s}{2}.$$

$$\sin. \frac{90^\circ - a - p + s}{2}, \text{ ideoque habebitur } \sin. \frac{1}{2} x =$$

$$\sqrt{\frac{\sin. \frac{90^\circ - a + p - s}{2} \times \sin. \frac{90^\circ - a - p + s}{2}}{\cos. p \cos. s}} \text{ rr, denotante r si-}$$

num totum, quem hætenus posui $= 1$.

§. 95. Quò usus hujus formulæ exemplo illustretur, sit elevatio poli $p = 52^\circ 27'$, declinatio solis australis $-s = 9^\circ 15'$, seu $s = -9^\circ 15'$, & observata sit ante meridiem altitudo solis $a = 19^\circ 25'$, calculus ita se habebit.

Prix. 1747.

T

$p = 52^{\circ} 27'$	$a = 19^{\circ} 25'$	$l. \sin. \frac{90 - a + p - s}{2} = 9,9612067$
$s = -9^{\circ} 15'$	$90 - a = 70^{\circ} 35'$	
$p - s = 61^{\circ} 42'$	$\frac{90 - a}{2} = 35^{\circ} 17' 30''$	$l. \sin. \frac{90 - a - p + s}{2} = 8,8889883$
$\frac{p - s}{2} = 30^{\circ} 51'$	$\frac{p - s}{2} = 30^{\circ} 51' 0''$	$add. l. rr. \dots \dots 38,8501950 = A$
$\frac{90 - a + p - s}{2} = 66^{\circ} 8' 30''$		$l. \cos. p \dots = 9,7849406$
		$l. \cos. s \dots = 9,9943156$
		$19,7792562 = B$
$\frac{90 - a - p + s}{2} = 4^{\circ} 26' 30''$		$A - B = 19,0709388$
		$l. \sin. \frac{1}{2} x = 9,5354694$
		$\frac{1}{2} x = 20^{\circ} 4' 5''$

Erit ergo $x = 40^{\circ} 8' 10''$, qui arcus in tempus conversus dat $2^h 40' 33''$, ita ut observatio facta sit $9^h 19' 27''$ tempore vero.

§. 96. Cùm autem in altitudine solis a error aliquot minutorum possit esse commissus, hinc hora inventa incerta reddetur; quanta ergo sit hæc incertitudo, operæ pretium erit indagare. Sit ergo altitudo solis vera $= a + \alpha$, ubi α errorem in observatione commissum denotet atque tempus à meridie in angulum conversum sit reverà $x + \xi$,

$$\text{erit } \cos. x = \frac{\sin. a - \sin. p \sin. s}{\cos. p \cos. s}, \text{ \& } \cos. (x + \xi) = \frac{\sin. (a + \alpha) - \sin. p \sin. s}{\cos. p \cos. s}.$$

$$\text{Jam quia ob } \alpha \text{ \& } \xi \text{ valdè parva, est } \cos. (x + \xi) = \cos. x - \xi \sin. x, \text{ \& } \sin. (a + \alpha) = \sin. a + \alpha \cos. a; \text{ erit } \xi \sin. x = \frac{-\alpha \cos. a}{\cos. p \cos. s} \text{ \& } \xi = -\alpha \frac{\cos. a}{\cos. p \cos. s \sin. x}.$$

§. 97. Error igitur in tempus redundans eò erit major, quò 1. Minus observatio distet à meridie. 2. Quò major fuerit declinatio solis. 3. Quò major fuerit elevatio poli. Et 4. Quò minor sit altitudo solis. In exemplo ergo antè allato, quo erat $p = 52^{\circ} 27'$, $s = -9^{\circ} 15'$, $a = 19^{\circ} 25'$, \& $x = 40^{\circ} 8'$, error erit $\xi = -2,433 \alpha$. Unde si α seu error in altitudine commissus sit $= 5'$, seu in tempore $= 20''$, erit error in horæ determinationem inde ortus $= 48''$ qui, cùm integrum minutum non exhaustiat,

facile negligi potest, præsertim si error altitudinis infra 5' subsistat.

§. 98. Formula inventa $\xi = -\alpha \frac{\cos. a}{\cos. p \cos. s \sin. x}$ in ipso meridie ubi $x = 0$, errorem infinitum indicare videtur: sed notandum est hoc casu quia ξ præ x non amplius tanquam evanescens considerari potest, eam formulam non valere. Si enim sit $x=0$, erit $\sin. a = \cos. p \cos. s + \sin. p \sin. s = \cos. (p-s)$, & $\cos. a = \sin. p \cos. s - \cos. p \sin. s$. Cum ergo sit $\cos. \xi = \frac{\sin. (a+\alpha) - \sin. p \sin. s}{\cos. p \cos. s} = \frac{\sin. a \cos. \alpha + \cos. a \sin. \alpha - \sin. p \sin. s}{\cos. p \cos. s}$, ob $\cos. \xi = 1 - \frac{1}{2} \xi \xi$, $\cos. \alpha = 1 - \frac{1}{2} \alpha \alpha$, & $\sin. a = \alpha$ erit $\xi = \frac{\cos. p \cos. s + \alpha \sin. (p-s)}{\cos. p \cos. s}$; ideòque $\xi \xi = \frac{-2 \alpha \sin. (p-s)}{\cos. p \cos. s} = -2 \alpha (tang. p - tang. s)$. Sit $tang. p - tang. s = n$ posito radio $= 1$, eritque $\xi \xi = 2 n \alpha$; (mutato signo erroris α) ponatur $\alpha = 5' = \frac{1}{12}^\circ$; & ob radium $1 = 57 \frac{1}{3}^\circ = 3438'$, fiet $\xi = \sqrt{34380 n}$ minus $= 186' \sqrt{n}$, & in tempore erit error $12' 24'' \sqrt{n}$. Qui error cum nimis sit magnus, ante peculiarem methodum meridiem inveniendi tradidi.

§. 99. Si in elevatione poli p error committatur, qui sit dp , in angulo quoque horario x error nascetur qui sit $d\alpha$, hicque ex differentiatione æquationis $\cos. x = \frac{\sin. a - \sin. p \sin. s}{\cos. p \cos. s}$ ponendis x & p variabilibus cognoscetur, erit namque $-d\alpha \sin. x = \frac{-dp \sin. s}{\cos. s} + \frac{dp \sin. p (\sin. a - \sin. p \sin. s)}{\cos. p^2 \cos. s}$, & $d\alpha = \frac{dp (\sin. s - \sin. a \sin. p)}{\cos. p^2 \cos. s \sin. x}$. Qui error iterum, nisi circa ipsam meridiem, facile tolerari potest, dummodo elevatio poli non nimis aberrat.

§. 100. In ortu vel ocaſu ſolis, quem ſine instrumentis obſervare licet, dummodo refractionis ratio habeatur, quemadmodum illuſtriſſ. Dominus de Maupertuis, in

Astronomia Nautica docet, hora diei, siquidem elevatio poli & declinatio solis sit nota, facillimè definietur. Cùm enim tum sit $\alpha = 0$, erit $\cos. x = \frac{-\sin. p \sin. s}{\cos. p \cos. s} = -\tan. p \tan. s$: unde si declinatio solis sit borealis, fiet $x > 90^\circ$, contra verò minor & utroque casu angulus x in tempus conversus, monstrabit verum momentum vel ortus solis vel occasus tempore.

§. 101. Quia hactenus altitudinem poli satis exactè cognitam assumsi, nunc ad alteram hujus sectionis partem progrediar, investigaturus quomodo horam diei per observationes solis definiri conveniat, si elevatio poli peritùs sit incognita. Ac primo quidem liquet hoc peritum solis observationem præstari non posse, sed ad minimum duas altitudines solis adhiberi debere. Hincque ergo non solum ad tempus interea præterlapsum, sed etiam ad variationem declinationis solis, & potissimum ad mutationem loci, quam navis interea subierit, erit respiciendum, quibus rebus hæc determinatio non parum difficilis redditur.

§. 102. Ut has difficultates paulatim superemus, ponamus primò navem situm non mutare, atque ex duabus altitudinibus solis, dato temporis intervallo, observatis, facillè invenietur verum tempus pro utraque observatione; siue solis declinatio interea mutetur, siue minus. Sit enim

Fig. VII. *HOZ* meridianus loci, in quo navis existit, *P* polus, *Z* zenith, *A* & *a* loca solis binis observationum momentis, dabunturque arcus *AP*, *aP* quippe declinationum solis complementa, simulque ex tempore præterlapso cognoscitur angulus *APa*, præterea verò dantur arcus verticalium circularum *ZA*, *Za*, ut pote altitudinum observationum complementa.

§. 103. Jam per puncta *A* & *a* concipiatur ductus arcus

circuli maximi, quo quidem non via à sole percurfa, præsentabitur, & in triangulo sphærico APa ex datis lateribus AP & aP , cum angulo intercepto APa invenietur latus Aa & anguli PAa , & PaA . Tum in triangulo AZa , cognitis omnibus lateribus, reperientur anguli ZAa , ZaA ; ex quibus cum angulis PAa & PaA collatis, elicientur anguli ZAP & ZaP , hincque denique in triangulo ZAP , ob data latera ZA , PA & angulum ZAP , invenietur latus PZ complementum elevationis poli, & angulus ZPA , quo tempus alterius observationis à meridie indicabitur.

§. 104. Cum igitur hic casus nihil habeat difficultatis, ponamus navem interea cursu suo tantum longitudinem mutasse, ita ejus latitudo manserit eadem, perspicuum est angulum ad polum APa jam non amplius tempore inter observationes elapso mensurari, sed angulo ex hoc temporis intervallo deducto mutationem longitudinis vel esse addendam vel demendam, prout navis vel ab occidente in orientem vel ab oriente in occidentem feratur. Hoc autem angulo APa definito, reliqua definientur trigonometricè ut antè, reperieturque tam elevatio poli, quàm vera diei hora tempore utriusque observationis.

§. 105. Sin autem navis interea quoque latitudinem mutaverit, calculus aliquanto fiet difficilior atque ad formulam generalem suprà adhibitam primum recurramus. Sit tempore primæ observationis elevatio poli $= p$; declinatio solis $= s$, altitudo solis observata $= a$, atque angulus horarius, seu qui verum tempus à meridie ejus loci, ubi terra nunc versatur, indicat, $= x$. Tempore secundæ observationis sit elevatio poli $= p + dp$, declinatio solis $= s + ds$; altitudo solis observata $= a'$, & angulus horarius verum tempus à meridie hujus loci, ubi navis nunc hæret, indicans $= x'$.

§. 106. Sit intervallum temporis harum duarum observationum jam more solito ad angulum horarium reductum $= v$; hocque tempore navis secundum longitudinem ab occidente in orientem confecerit angulum $= \mu$; secundum latitudinem verò boream versùs accesserit per angulum ν , ubi me non monente intelligitur, si navis vel in occidentem, vel austrum versùs, sit progressa, tum vel $-\mu$ pro μ , vel $-\nu$ pro ν scribi oportere. Erit ergo $x' - x = v + \mu$, ideoque $x' = x + v + \mu$; & $dp = 1$: atque ex formula suprà data colligitur, $\cos. x = \frac{\sin. a - \sin. p \sin. s}{\cos. p \cos. s}$ §.

$$\cos. x' = \frac{\sin. a' - \sin. (p + dp) \sin. (s + ds)}{\cos. (p + dp) \cos. (s + ds)}.$$

§. 107. Ex his quantitatibus cognitæ sunt s , $s + ds$ declinatio, scilicet, solis in utraque observatione borealis; nam pro australi hi anguli negativè sunt accipiendi, porro altitudines a & a' cum intervallo v , atque mutationes longitudinis & latitudinis μ & ν ; manentque duæ incognitæ x & p definiendæ, quibus etiam binæ æquationes inventæ sufficiunt. Posterior autem æquatio, evolutis differentialibus, dat $\cos. x' = \frac{\sin. a' - \sin. p \sin. s}{\cos. p \cos. s} + \frac{dp (\sin. a' \sin. p - \sin. s)}{\cos. p^2 \cos. s}$,

$$+ \frac{ds (\sin. a' \sin. s - \sin. p)}{\cos. p \cos. s^2} = \cos. (x + v + \mu). \text{ Quòd si jam hinc } p \text{ eliminare velimus, ope æquationis } \cos. x = \frac{\sin. a - \sin. p \sin. s}{\cos. p \cos. s},$$

reperietur quidem æquatio valorem anguli x definiens, sed opus foret immensum calculum inde adstruere.

§. 108. Calculum autem multò faciliùs expedire poterimus, si modò azimuthum solis in alterutra observatione in computum ducamus, quod sufficit circiter saltem nosse, etiamsi error inde oriundus, si opus videatur, facile corrigi queat. Beneficio autem acûs magneticæ azimutha non adeò sunt incognita; ut non ad aliquod saltem gradus æstimari queant, quod ad meum propositum sufficit.



Sumto ergo polo P , formetur angulus $APa = v + \mu$, Fig. VIII. quem vocemus brevitatis gratiâ $= u$, capianturque $PA = 90^\circ - s$, & $Pa = 90^\circ - s - d s$. Hincque in triangulo sphærico APa definiatur tertium latus Aa , cum angulis PAa , PaA .

§. 109. Sit porro angulus $ZPA = x$, erit PZH meridianus pro loco solis viso prioris, unde si fiat $PZ = 90^\circ - p$, arcus ZA præbebit complementum altitudinis solis in prima observatione. Deinde cum sit $ZPa = x + v + \mu$ erit $ZPa = x'$, ideoque circulus $HZPO$ referet quoque meridianum respectu loci solis a in posteriori observatione. Quare si capiatur $Pz = 90^\circ - p - dp$, repræsentabit arcus za complementum altitudinis solis in posteriori observatione: sicque habebitur $ZA = 90^\circ - a$, & $za = 90^\circ - a'$, atque $Zz = dp = r$.

§. 110. Sit jam azimuthum in posteriori observatione, seu angulus $Hza = \theta$, quem proximè saltem cognitum esse pono; & ex Z ad az ducatur perpendicularum Zu , erit $zu = r \cos. \theta$. Concipiatur ductus arcus circuli maximi Za erit $Za = au = 90^\circ - a' - \frac{r}{u} \cos. \theta$, atque ob cognita in triangulo AZa tria latera, invenientur anguli ZAa & ZaA , & ob $Zu = r \sin. \theta$, erit angulus $Zaz = \frac{r \sin. \theta}{\cos. a'}$; ideoque & angulus zaA erit datus.

§. 111. Nunc in triangulo PaZ dantur latera $Pa = 90^\circ - s - ds$, $za = 90^\circ - a'$, & angulus $zaP = PaA = zaA$, hincque reperientur primò latus Pz complementum latitudinis navis in posteriori observatione, deinde angulus $aPz = x + v + \mu$, & proinde angulus $APZ = x$, seu tempus verum in utraque observatione. Præterea verò elicietur angulus Pza , qui si notabiliter discrepare deprehendatur ab assumpto azimutho θ , is loco θ jam substituatur, idemque calculus repetatur. Hocque

pactō per merum calculum geometricum, cujus præcepta ubique exstant, hoc problema aliàs difficillimum facile resolvetur.

§. 112. Problema ergo hoc in navigatione utilissimum; quo ex observatis duabus altitudinibus solis, & tempore interea elapso, hora diei cum elevatione poli quæritur, ita hîc solutum dedi, ut calculus ob ipsius navis motum vix molestior reddatur. Etsi ergo sæpissimè variatio latitudinis Zz tam parva est, ut tutò omitti posset, tamen ejus quoque ratione habitâ calculus non turbatur; quamobrem cùm hæc operatio magis contrahi nequeat ut vulgaribus regulis Trigonometriæ absolvetur, ne exemplum quidem ad ejus illustrationem opus esse judico, atque ad observationes nocturnas, in quibus crepusculares simul sum complexus, progrediar.



V I I.

*Determinatio horæ nocturnæ, si elevatio
Poli sit data.*

§. 113. **N**OCTU igitur verum tempus ex altitudinibus stellarum, five fixarum five inerrantium concludi debet, quarum tam declinationes quàm ascensiones rectas ad quodvis tempus cognitæ esse assumo; neque ergo hic ejusmodi methodis quæ ad observationes stellarum incognitarum sunt accommodatæ, immorabor. Stellæ autem fixæ hoc præ sole gaudent commodo, quòd perpetuò (saltem quamdiu iter navis durat) eandem declinationem conservent: sin autem planetæ adhibeantur, variationis quoque quam in declinatione patiuntur, quoties opus fuerit, ratio erit habenda.

§. 114. Ad manus ergo esse pono catalogum præcipuarum stellarum fixarum, in quo singularum declinationes & ascensiones rectæ ad id tempus, quo navigatio suscipitur, sint expressæ. Præterea verò quoque in promptu esse debent ephemerides planetarum ad præsentem annum computatæ; ex quibus non solum eorum declinationes & ascensiones rectæ, sed etiam harum rerum variationes diurnæ cognosci queant. Imprimis autem, ut jam notavi, observatorem instructum esse oportet, ephemeridibus solaribus, quoniam omnia tempora ad solem referri solent.

§. 115. Cùm quælibet stella fixa ad eundem meridianum revertatur post $23^{\text{h}} 56' 4''$, dum sol secundum motum medium eandem periodum absolvit tempore 24

horarum, si illud temporis intervallum $23^h 56' 4''$ in 24 partes æquales dividatur, hæ partes horæ sidereæ appellari solent ad distinctionem horarum communium, quæ ex motu solis definiuntur; eritque hora siderea ad horam solarem ut 86164 ad 86400, seu proximè ut 365 ad 366, unde conversio horarum siderearum in solares nihil habebit difficultatis & contrà.

§. 116. Ascensiones rectæ à principio arietis secundum signorum ordinem numerari solent, unde cujusque stellæ ascensio recta indicat, quanto ea temporis intervallo post initium arietis ad eundem meridianum appellat. Hoc, scilicet, tempus in horis sidereis exprimitur, si quidam gradus ascensionis rectæ in unam horam computentur: vel si 360° pro $23^h 56' 4''$ fumatur, prodibit tempus in horis solaribus expressum. Quia porro in ephemeridibus appulsus principii arietis ad meridianum assignari solet, hinc verum tempus quo quævis stella fixa ad meridianum venit, innotescet.

§. 117. Hoc quoque tempus hujusmodi tabulis deficientibus hoc modo colligitur, subtrahatur ascensio recta solis, quam ipso meridie proximè elapso tenuit, ab ascensione recta stellæ, & residuum in horas sidereas conversum dabit tempus, quo hæc stella per meridianum transiit, in horis sidereis expressum, quas deinde in horas solares mutare convenit. Vel cum tabulæ habeantur, quæ differentias ascensionum rectarum in horis solaribus exhibeant, & vicissim cujusmodi in *Notitiâ temporum*, quæ Parisiis quot annis edi solet, pag. 93 & 94, est inserta, ejus ope cujusque stellæ appulsus ad meridianum in horis solaribus statim reperitur; sicque horis sidereis carere poterimus.

§. 118. In ephemeridibus porro ascensio recta solis ad meridiem ejus loci, ad quem sunt computatæ, exhibetur: unde si ejus variatio diurna spectatur, pro quovis alio

meridiano, cujus differentia ab illo constat, ipso meridiei momento ascensio recta solis concludetur. Neque verò ad hoc accuratâ longitudinis cognitione opus est, cum error 15° in longitudine commissus, in ascensione recta tantum $2'$ circiter producat. In navigatione autem vix unquam longitudo loci adeò incerta esse solet, ut ex hoc capite error sit metuendus.

§. 119. Cum igitur tempus sit cognitum, quo quavis stella fixa ad meridianum ejus loci ubi navis versatur appellet, si ipsum transitum cujuscumque stellæ fixæ per meridianum observare liceret, tum eo momento vera diei hora haberetur, sed jam suprà animadverti observationes transituum per meridianum nimis esse incertas quàm ut eæ ad temporis determinationem adhiberi possent. Interim tamen plurimum proderit culminationes stellarum seu maximas earum altitudines observare, quia inde ob earum declinationem cognitam elevatio poli certissimè colligi potest. Quod ad modos in hac sectione tradendos eo magis erit necessarium, quia hîc elevationem poli cognitam assumo.

§. 120. Ad verum ergo tempus definiendum stellas eligi oportet, quæ jam à meridiano sunt remotiores; ubi primum attendendum est, utrùm ad meridianum accedant, an verò jam versùs occasum inclinent; seu an observatio ante ejus appulsum ad meridianum, an post instituatur. In quâ quidem dijudicatione nullus est metuendus error. Deinceps autem fusiùs investigabo, quænam stellæ fixæ, si quidem delectus concedatur, ad hoc institutum sint aptissimæ.

§. 121. Observeretur ergo instrumento, quod maximè Fig. VI. idoneum videbitur, stellæ cujuscumque fixæ, cujus ascensio recta ac declinatio sit cognita, distantia à zenith ZS quæ sit $= a$. Tum sit elevatio æquatoris, seu distantia poli à

zenith $PZ = p$, & distantia stellæ à polo $PS = s$ quæ ex ejus declinatione habetur : atque in triangulo sphærico PZS omnia latera erunt cognita, unde si angulus horarius ZPS vocetur $= z$, erit $\cos. z = \frac{\cos. a - \cos. p \cos. s}{\sin. p \sin. s}$.

§. 122. Invento ergo hinc angulo z , instituat hęc proportio ut 360° ad $23^h 56' 4''$, ita angulus z , ad tempus in horis solaribus expressum, quod tempori, quo eadem stella fixa per meridianum transire fuerit reperta, vel additum vel demtum, prout observatio vel post vel ante stellæ culminationem fuerit instituta, dabit verum tempus solare, tempore observationis.

§. 123. Quo autem in hoc calculo communis logarithmis uti liceat, quærat semissis anguli z , nam ob
 $\sin. \frac{1}{2} z = \sqrt{\frac{1 - \cos. z}{2}}$, erit $\sin. \frac{1}{2} z = \sqrt{\frac{\sin. p \sin. s + \cos. p \cos. s - \cos. a}{2 \sin. p \sin. s}}$
 $= \sqrt{\frac{\cos. (p-s) - \cos. a}{2 \sin. p \sin. s}}$. At est $\cos. (p-s) - \cos. a = 2 \sin. \frac{p-s+a}{2} \sin. \frac{a-p+s}{2}$, unde erit $\sin. \frac{1}{2} z = \sqrt{\frac{\sin. \frac{a+p-s}{2} \sin. \frac{a-p+s}{2}}{\sin. p \sin. s}}$.

Hincque commodè per calculum elicietur angulus $\frac{1}{2} z$.

§. 124. Ponamus anno 1743 Maii die 11 vesperi, navem in loco versari, cujus longitudo Parisiis occidentem versùs æstimatur circiter 55° , & elevatio poli inventa sit $32^\circ 24'$, atque stellæ ursæ majoris α signatæ altitudinem observari $51^\circ 8'$ post ejus culminationem, quæriturque pro momento observationis verum tempus.

§. 125. Ex ephemeridibus igitur primò reperitur pro meridie diei 11 Maii anno 1743, sub meridiano Parisiensi, ascensio recta solis $47^\circ 49' 37''$, quæ intervallo unius diei crescit $58' 37''$. Quia jam locus navis æstimatur 55° occidentalior, dum sol per ejus meridianum transiit, erat ejus ascensio recta major, scilicet $= 47^\circ 49' 37''$.

$+ \frac{55}{360} 58' 37'' = 47^{\circ} 58' 34''$, stellæ autem α ursæ majoris invenitur declinatio borealis $= 63^{\circ} 8' 22''$, & ascensio recta $= 161^{\circ} 54' 55''$, à qua subtrahatur, ascensio recta solis $= 47^{\circ} 58' 34''$ remanet $113^{\circ} 56' 21''$ quod in tempus ope tab. pag. 93, *Not. temp.* conversum dat $7^h 34' 29''$, ita ut hæc stella die proposito vesperi horâ septimâ $34' 29''$ per meridianum loci, ubi navis est transierit.

§. 126. His præparatis in triangulo sphærico PZS , erit elevatio æquatoris $PZ = p = 57^{\circ} 36'$, distantia stellæ à polo $PS = s = 26^{\circ} 51' 38''$, & distantia stellæ à zenith observata $ZS = 38^{\circ} 52' = a$: unde calculus ita tornabitur.

$$\begin{array}{r|l} p = 57^{\circ} 36' 0'' & \frac{1}{2} a = 19^{\circ} 26' 0'' \\ s = 26^{\circ} 51' 40'' & \frac{p-s}{2} = 15^{\circ} 22' 10'' \\ \hline p-s = 30^{\circ} 44' 20'' & \frac{a+p-s}{2} = 34^{\circ} 48' 10'' \\ \frac{p-s}{2} = 15^{\circ} 22' 10'' & \frac{a-p+s}{2} = 4^{\circ} 3' 50'' \end{array}$$

$$\log. \sin. \frac{a+p-s}{2} = 9,7564485$$

$$l. \sin. \frac{a-p+s}{2} = 8,8504550$$

$$\text{cum quadr. radii} = 38,6069035$$

$$l. \sin. p = 9,9265112$$

$$l. \sin. s = 9,6549744$$

$$19,5814856$$

$$\text{divid. per 2} \dots 19,0254179$$

$$l. \sin. \frac{1}{2} \chi = 9,5127089$$

Hinc ergo invenitur.

$$\frac{1}{2} \chi = 19^{\circ} 0' 10''$$

$$\chi = 38^{\circ} 0' 20''$$

quod in tempus per tab. 93 alleg. conversum dat:

$$30^{\circ} \dots \dots \dots 1^h 59' 40''$$

$$8^{\circ} \dots \dots \dots 31' 53''$$

$$20'' \dots \dots \dots 1''$$

$$\text{Tempus } 2^h 31' 34''$$

§. 127. Cum ergo stella α ursæ majoris ad meridianum appulerit tempore $7^h 34' 29''$, atque observatio nunc tardius facta fuisse inventa sit $2^h 31' 34''$; si hunc numerum ad illum addamus, habebimus verum tempus pro ipso observationis momento, scilicet, $10^h 6' 3''$ post meridiem

diei 11 Maii. Perspicuum autem est hunc calculum multum fore succinctiorem, si explicationes hîc adjectæ omitantur. Neque etiam opus esse arbitror applicationem formulæ datæ ostendere, si vel arcus $P s 90^\circ$ superet, vel navis in hemispherio telluris australi versetur, quia has circumstantias eum, qui calculum suscipit probè nosse oportet.

§. 128. Si in altitudine stellæ error quidam fuerit commissus, tempus quoque inde conclusum, seu angulus χ erit erroneus, cujus error facîle reperietur, si æquatio $\cos.$

$\chi = \frac{\cos. a - \cos. p \cos. s}{\sin. p \sin. s}$ differentietur positis χ & a variabilibus.

unde fiet $d\chi \sin. \chi = \frac{da \sin. a}{\sin. p \sin. s}$. Hincque $d\chi = da \frac{\sin. a}{\sin. p \sin. s \sin. \chi}$.

Quare si in altitudine error committatur $= da$, inde in angulum horarium χ influet error $d\chi = da \frac{\sin. a}{\sin. p \sin. s \sin. \chi}$.

seu posito $\frac{\sin. a}{\sin. p \sin. s \sin. \chi} = n$, si sit $da = s'$, erit $d\chi = n s'$: hincque in tempore orietur error $20 n''$.

§. 129. Quò ergo hic error minimè sit perceptibilis, requiritur primò ut angulus horarius χ satis sit notabilis; atque ut stella à polo 90 gradibus distet, seu prope æquatorem sit sita: tum verò ut stella tam parum à zenith distet, quàm prima conditio permittit. Utrique enim simul satisfieri nequit, quia quò major capitur angulus χ , eò major quoque distantia stellæ à zenith evadet.

§. 130. Videamus ergo in quonam circulo horario data stella observari debeat, ut coefficientens $n = \frac{\sin. a}{\sin. p \sin. s \sin. \chi}$, seu tantùm fractio $\frac{\sin. a}{\sin. \chi}$ fiat minima. Hoc autem evenit si $da \cos. a \sin. \chi = d\chi \sin. a \cos. \chi$. At est $d\chi = \frac{da \sin. a}{\sin. p \sin. s \sin. \chi^2}$; ergo fit $\cos. a = \frac{\sin. a^2 \cos. \chi}{\sin. p \sin. s \sin. \chi}$, seu $\cos. a \sin. p \sin. s = \cos. a \sin. p \sin. s \cos. \chi^2 = \sin. a^2 \cos. \chi$, ubi si valor loco $\cos. \chi$ substi-

tuatur, invenietur $\frac{\cos. a}{1 + \cos. a^2} = \frac{\cos. p \cos. s}{\cos. p^2 \cos. s^2}$; hincque duplex valor prodit, vel $\cos. a = \frac{\cos. p}{\cos. s}$, vel $\cos. a = \frac{\cos. s}{\cos. p}$, quorum prior eligendus est si $p > s$, posterior si $p < s$.

§. 131. Sit igitur $\cos. a = \frac{\cos. p}{\cos. s}$, erit $\sin. a = \frac{\sqrt{(\cos. s^2 - \cos. p^2)}}{\cos. s}$ & $\cos. x = \frac{\cos. p \sin. s}{\sin. p \cos. s}$, atque $\sin. x = \frac{\sqrt{(\cos. s^2 \cos. p^2)}}{\sin. p \cos. s}$, hincque fit $n = \frac{1}{\sin. s}$, qui valor fit minimus si $s = 90^\circ$, sed tum fieri nequit $p > s$. Quare propositâ stellâ quâcunque, eam tum observari conveniet, quando fuerit vel $\cos. a = \frac{\cos. p}{\cos. s}$ vel $\cos. a = \frac{\cos. s}{\cos. p}$. Cum autem stellæ in æquatore sitæ sint aptissimæ, si qua earum eligatur, fiet $s = 90^\circ$, & $n = \frac{\sin. a}{\sin. p \sin. x}$; qui valor minor fieri nequit quàm si $\sin. x$ sit maximus; quod evenit, si hæc stella prope circum horarium sextæ horæ observetur; hæcque est tutissima regula ad tempus quàm exactissimè inveniendum.

§. 132. Sin autem in altitudine poli fuerimus decepti, videamus cujusmodi observationes instituere oporteat, ut determinatio temporis inde quàm minimè turbetur. In hunc finem differentiemus æquationem $\cos. x = \frac{\cos. a - \cos. p \cos. s}{\sin. p \sin. s}$, ponendis x & p variabilibus, reperiaturque $-d x \sin.$
 $x = \frac{d p \cos. s}{\sin. s} - \frac{d p \cos. p (\cos. a - \cos. p \cos. s)}{\sin. p^2 \sin. s}$, seu $d x \sin.$
 $x = \frac{d p (\cos. a \cos. p - \cos. s)}{\sin. p^2 \sin. s}$.

§. 133. Manifestum ergo est errorem in tempus hinc redundantem penitus evanescere, si sit $\cos. s = \cos. a \cos. p$, seu $\cos. a = \frac{\cos. s}{\cos. p}$. Quòd si ergo stella in æquatore eligatur, hic error evitatur, si stella in ipso horizonte observetur, quod cum congruat cum horario sextæ horæ pro

hac stellâ, quæ conditio antè est requisita, perspicuum est utrique incertitudini optimè occurri, si stella non longè ab æquatore remota prope horizontem observetur.

§. 134. Cùm autem prope horizontem refractiones nimis sint magnæ, atque rarò stellas in hac regione distinctè cernere liceat, facilè intelligitur regulam inventam pro circumstantiis quàm proximè tantùm esse observandam, & quia fieri nequit $a = 90^\circ$; eligatur stella declinationis cujusdam borealis, verbi gratiâ 15° , & æquatio $\cos. a = \frac{\cos. s}{\cos. p} = \frac{\sin. 15^\circ}{\cos. p}$, dabit altitudinem hujus stellæ observandam, quâ non solum error ex erronea elevatione poli oriundus penitus tollitur, sed etiam, qui ex minus accuratâ observatione nascitur, minimus redditur; suprâ enim §. 129 elicuimus quoque hanc æquationem $\cos. a = \frac{\cos. s}{\cos. p}$.

§. 135. Sub quavis ergo elevatione poli hoc judicium quânam stella optimo cum successu ad observationem eligatur, facilè instituitur. Primùm enim dispiciatur, quâ exigua altitudine stella distinctè observari possit, cujus altitudinis complementum vocetur $= a$; tum quærat s , ut sit $\cos. s = \cos. a \cos. p$, & inter stellas quæ à zenith intervallo $= a$, remotæ æstimantur, eligatur una, cujus distantia à polo sit proximè $= s$. Hancque stellam diligenter observando, dico conclusionem temporis inde deductam quàm minimè à vero esse aberraturam. Hoc autem modo quæstioni propositæ ex asse satisfactum esse arbitror.



VIII.

Determinatio horæ nocturnæ, si elevatio poli sit incognita.

§. 136. QUANDO elevatio poli est incognita, sicque præter tempus verum quoque ipsam poli elevationem investigare debemus, manifestum est, ad hoc ab observationibus opus esse, vel ejusdem stellæ vel duarum stellarum; unde in hac sectione mihi duæ quæstiones erunt pertractandæ. Altera, quomodo ex observatis ejusdem stellæ duabus altitudinibus cum tempore interea elapso vera hora inveniri debeat; altera verò quomodo ex observatis duarum stellarum altitudinibus vel simul vel successivè, ita ut intervallum temporis sit cognitum, verum tempus sit definiendum.

§. 137. Quamvis hæc problemata insignem habeant utilitatem, tamen iis carere possemus, cum ipsa poli elevatio non difficulter tam crasso modo uti in sectione præcedente assumimus, æstimari queat, atque ad id vix opus sit instrumentis. Deinde etiam putaverim nunquam intermittendas esse observationes, ex quibus elevatio poli concludi possit, sicque vix evenire poterit ut quoties stellæ sint conspicuæ, elevatio poli sit ignota; nisi fortè post longam turbidam tempestatem nubes dissipare incipiant, stellasque aliquot transmittant, quo casu neque elevatio poli cognita, neque si satis accuratè æstimari posset, delectus stellarum ad observandum permetteretur.

§. 138. Quod igitur ad prius problema attinet, quo eadem stella bis interjecto quodam temporis intervallo

cognito observatur, solutio omninò similis erit ei, quam suprà pro determinatione temporis ex duabus altitudinibus solis succèssivè observatis tradidi. Quamquam hoc problema casu antè allato, quo cœlum plerumque nubibus est velatum, nullum usum habere potest, propterea quod ignoramus, quamnam stellam post aliquot tempus iterùm finis visuri. Tum verò hic modus nimis prolixum calculum requirit, ut equidem mallem alio modo uti, dummodo liceret. Interim tamèn solutionem hujus problematis, ne ullam quæstionis partem prætermisissè videar, breviter exponam.

§. 139. Primum igitur stella observata vel erit fixa, vel planeta; priori casu ejus ascensio recta, & declinatio manebit invariata; posteriori verò inquirendum est, quantum utraque intervallo temporis inter observationes elapsi sit mutata, quod ex ephemeridibus facillè colligitur. Deinde etiam ex æffimatione itineris dispiciendum est, quantum navis tam longitudo quàm latitudo interea immutetur. Investigetur porro verum temporis momentum, quo stella per meridianum alterius loci, quo navis tempore alterutrius observationis est versata, transeat, unde simul ex variatione longitudinis navis & ascensionis rectæ stellæ, si fuerit planeta, verum culminationis tempus sub altero meridiano patebit.

Fig. VIII. §. 140. His præparatis, sit AP distantia stellæ à polo in prima observatione, aP in altera: ac definiatur angulus APa rite, tam ex intervallo temporis, quàm ex mutationibus ascensionis rectæ, si stella fuerit planeta, & longitudinis navis, scilicet, tempus inter observationes elapsum convertatur in angulum per pag. 94 Notitiæ temporum Parisinæ. Ab eo vel subtrahatur, vel addatur variatio ascensionis rectæ, prout ea interea vel crescat vel decrescat. Mutatio autem longitudinis navis addatur, si cursus in

orientem sit directus, contra verò subtrahatur, hocque modo habebitur verus angulus ad polum APa .

§. 141. Per puncta A & a ductus concipiatur arcus circuli maximi Aa , & in triangulo sphærico APa , ex datis lateribus AP , aP , cum angulo intercepto APa , quarantur anguli PAa , PaA cum latere Aa . Deinde sit APZ angulus verus horarius pro tempore primæ observationis, eritque aPZ angulus horarius pro tempore secundæ observationis quæ ad eundem meridianum $HZPO$ sit perducta, dum variatio longitudinis jam in angulo APa est inclusa, superest ergo ut positio hujus meridiani $HZPO$ respectu arcuum AP & aP definiatur.

§. 142. Capiatur PZ æqualis complemento elevationis poli in prima observatione, & Pz complemento elevationis poli in observatione altera, etsi utraque est incognita; quo facto erit arcus ZA distantia stellæ à zenith in prima observatione, & za in altera; ideoque utraque per observationes dantur. Erit ergo Zz variatio latitudinis, quam navis interea subiit, ideoque cognita, quæ plerumque valdè erit parva & pro nihilo haberi poterit. Primò autem hoc intervallum reverà rejiciam, quo calculus faciliùs institui queat, & deinceps in errorem inde oriundum inquiram.

§. 143. Incidat ergo z in Z , ut fit $Za = za$, & quia in triangulo AZa dantur singula latera, AZ , aZ & Aa , hinc colligentur anguli ZAa , ZaA , & quia jam antè inventi sunt anguli PAa , PaA , hinc innotescant anguli ZAP , ZaP , unde in utroque triangulo ZAP , ZaP tres res erunt cognitæ; sufficiet autem alterum ZaP evolvisse, in quo ob data latera aZ , aP cum angulo ZaP reperientur, 1. Latus PZ , complementum elevationis poli. 2. Angulus aPZ , ex eoque angulus APZ . Et 3. angulus azimuthalis PZa .

§. 144. Quod si jam variatio latitudinis Zz alicujus momenti esse videatur, quia invenimus angulum PZa , ei proximè æqualis erit angulus Pza ; sufficit autem hunc angulum propemodum tantum nosse. Ex Z ad za demittatur perpendicularum Zu , positoque angulo $Zzu = \theta$, erit $zu = Zz \cos. \theta$: quo ablato ab aZ remanebit au , cui aZ est æqualis. Jam posito hoc valore aZ loco ejus, quo antè sum usus, calculus in §. præced. præscriptus repetatur, ut tam vera elevatio poli ex PZ & tempus quæsitum ex angulo APZ vel aPZ concludi queat.

§. 145. Angulus, scilicet, APZ hoc modo inventus in tempus convertatur per tab. *p. 93*, Not. temp. hocque tempus ad tempus culminationis stellæ sub meridiano primæ observationis addatur, vel ab eo subtrahatur, prout observatio vel post, vel ante ejus culminationem fuerit instituta, sicque habebitur tempus verum solare pro momento primæ observationis; unde faciliè angulum APa similiter in tempus convertendo, deducetur verum tempus pro momento posterioris observationis.

§. 146. Patet ergo hoc problema, quod si calculo analytico aggredi velimus, in intricatissimos calculos nos deduceret, sine ulla difficultate, per sola præcepta Trigonometriæ solvi posse, neque solutionem variationibus tam ascensionis rectæ & declinationis stellæ, quàm longitudinis ac latitudinis navis; quæ res alioquin calculum summo perè impedire videantur, quicquam perturbari, ita ut in hoc negotio major calculi sublevatio expectari quidem possit.

§. 147. Alterum problema, quo tempus ex duabus observationibus duarum stellarum vel simul vel successive factarum determinare jubemur, maximam sæpe utilitatem habere videtur, quando inter nubes tantum hinc inde stellæ transparent, tum enim, vel simul vel successive

duarum stellarum altitudines observari poterunt, dum fortè eadem stella non amplius denuò se spectandam offerat, neque propterea priori problemati locus concedatur. Commodo autem usu venit, ut solutio hujus problematis non difficilior evadat quàm præcedentis.

§. 148. Excerptis ergo duarum stellarum, quas observamus tam ascensionibus rectis, quàm declinationibus, definiantur earum tempora culminationis, pro meridiano sub quo navis tum versatur, atque si intervallum observationum satis sit notabile, simul variationis longitudinis, quæ in mari evenerit, ratio habeatur, quemadmodum supra est præceptum, simul verò in utraque observatione notetur, utrum ante an post culminationem instituat.

§. 149. Si ambæ observationes eodem momento instituantur, tum differentia ascensionum rectarum dabit angulum ad polum APB , sin autem ab observatione stellæ A , ad observationem stellæ B , tempus quoddam sit præterlapsum, tum id in angulum convertatur, isque ad angulum antè inventum APB superaddatur, simulque variationis longitudinis navis interea factæ ratio haberi poterit, quæ ad illum angulum addatur, si navis orientem versùs feratur, contrà verò ab eo subtrahatur.

§. 150. Cùm hoc pacto verà quantitas anguli ad polum APB fuerit definita, sumatur arcus AP æqualis distantiae prioris stellæ à polo, & PB æqualis distantiae posterioris stellæ à polo, ducaturque arcus circuli maximi AB ; atque in triangulo sphærico APB , ex datis lateribus AP & BP cum angulo intercepto APB , supputentur anguli PAB , PBA , cum latere AB .

§. 151. Deinde ductus concipiatur meridianus $HZPO$ utrique observationi communis sive ambæ simul sint factæ, sive interjecto quodam tempore, quod fieri posse supra jam est ostensum: sitque ZP complementum elevationis

poli pro priori observatione, & P verò pro posteriori; siquidem latitudo navis inter observationes variationem quandam fuerit passa. Primâ tamen calculi operatione hoc discrimen Zz negligatur; ita ut arcus ZA & ZB representent complementa altitudinum stellarum observatarum.

§. 152. In triangulo ergo sphærico AZB cum data sint tria latera AB , AZ & BZ , computentur anguli ZAB , ZBA ; hincque colligantur anguli ZAP & ZBP , quo facto vel in triangulo ZBP , latera ZB , PB , cum angulo ZBP : unde porrò complementum elevationis poli PZ cum angulis horariis ZPA & ZPB invenientur, ex quibus vera tempora observationum rectè concludentur; siquidem variatio latitudinis navis, quæ per Zz , exprimitur nullius fuerit momenti, ut plerumque fit, fierique præstat cum una observatione absoluta nihil obstat, quo minus statim alteram suscipiamus.

§. 153. Sin tamen nihilominus tempus quoddam notabile inter tempora observationum præterfluxerit, atque variatio latitudinis Zz interea facta sine errore negligi nequeat, tum saltem superior calculus azimuthum PZB satis prope indicabit, & cum jam arcus ZB veram distantiam stellæ B à zenith exhibeat, demisso perpendicularo zu , definiri poterit particula Zu , quæ secundum figuram ad ZB addita, dabit veram longitudinem arcus ZB , quâ in superiori calculo jam repetendo pro ZB uti oportebit.

§. 154. Si igitur ex tribus lateribus trianguli AZB denudò angulus ZAB determinetur, ab eoque angulus PAB subtrahatur, siquidem figura ad casum propositum sit accommodata, remanebit angulus ZAP , ex quo & arcus ZA , PA , reperietur cum vera quantitas PZ arcus, tum angulus horarius ZPA , qui debito modo in tempus conversus indicabit quanto tempore observatio stellæ A vel ante, vel post ejus culminationem sit facta.

§. 155. Superesset ut quoque de selectione stellarum ad certitudinem observationum maximè idonearum plura adjicerem; sed quoniam si cœlum est serenum, & delectus conceditur, methodis in superiori sectione traditis potius uti conveniet; pauca tantum annotabo, quæ ex præceptis suprâ traditis faciliè consequuntur. Primum ergo ad hoc stellas non procul supra horizontem elevatas eligi debere perspicuum est, quæ declinationem habeant borealem, sed exiguam; siquidem navis in hemisphærio boreali versetur. Deinde conclusio erit eo certior quò magis stellæ in ascensione recta discrepent. Quamobrem tutissimum consilium erit, ut altera stella prope horizontem orientem, altera prope occidentem eligatur.



Fig. 1.

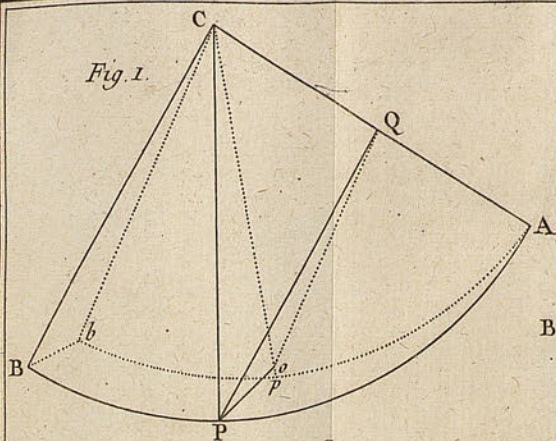


Fig. 2.

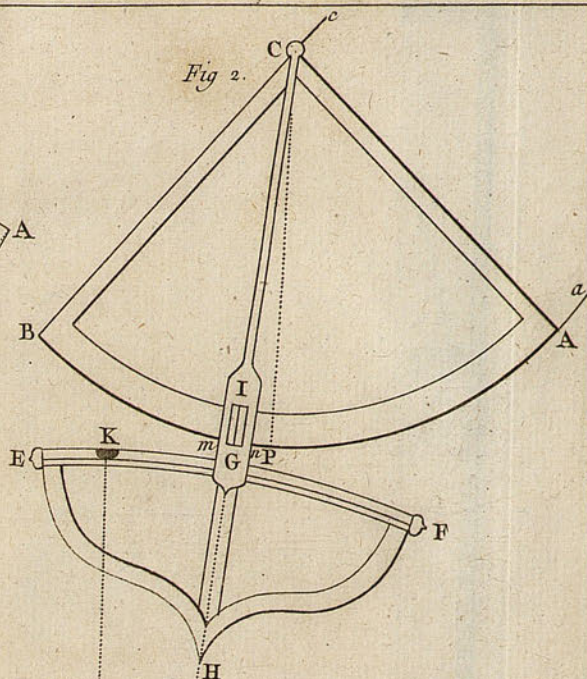
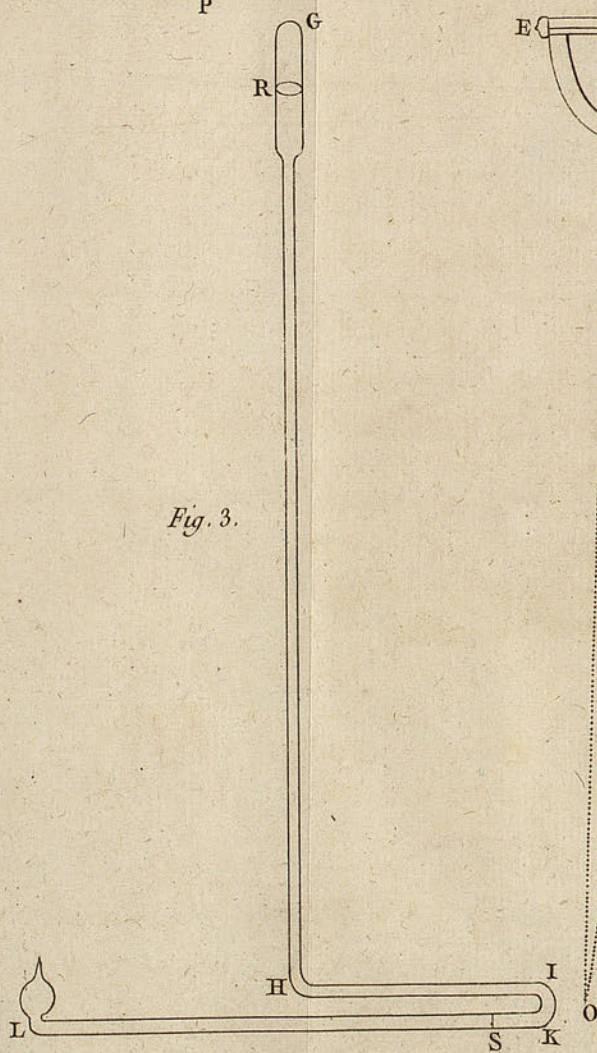


Fig. 3.



K

Fig. 4.

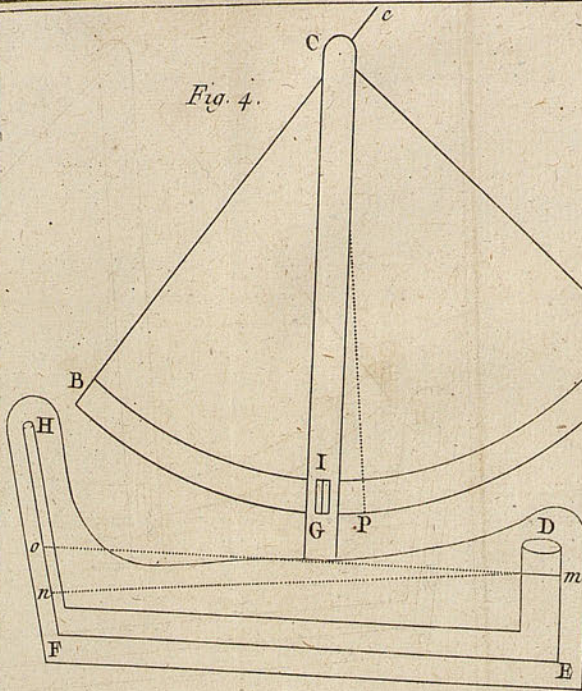


Fig. 5.

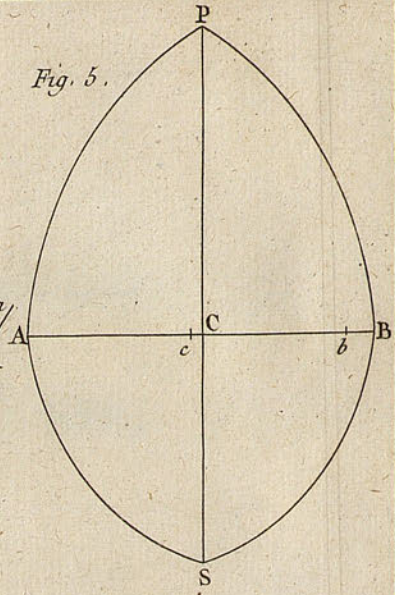


Fig. 6.

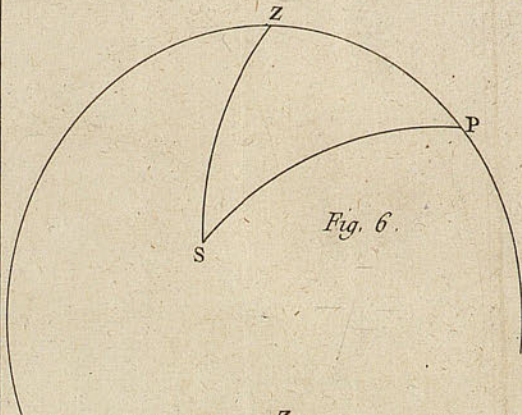


Fig. 7.

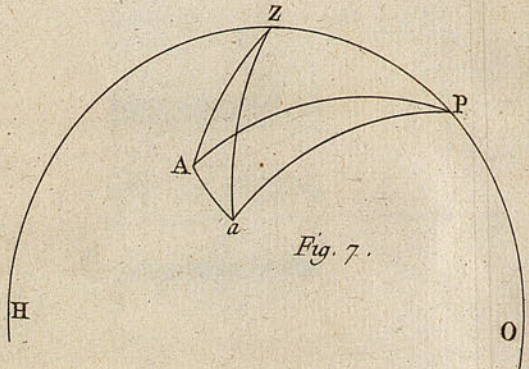


Fig. 8.

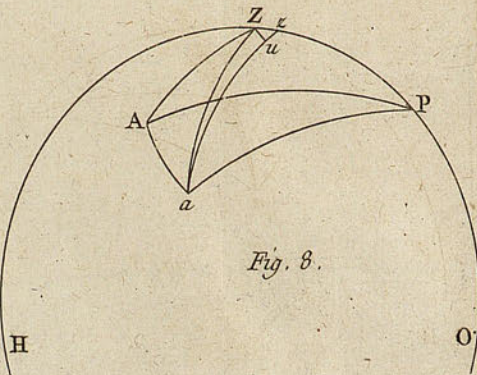
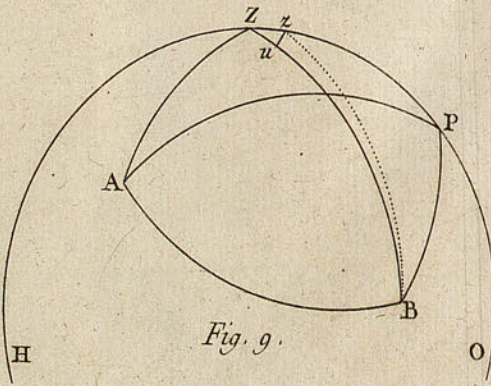
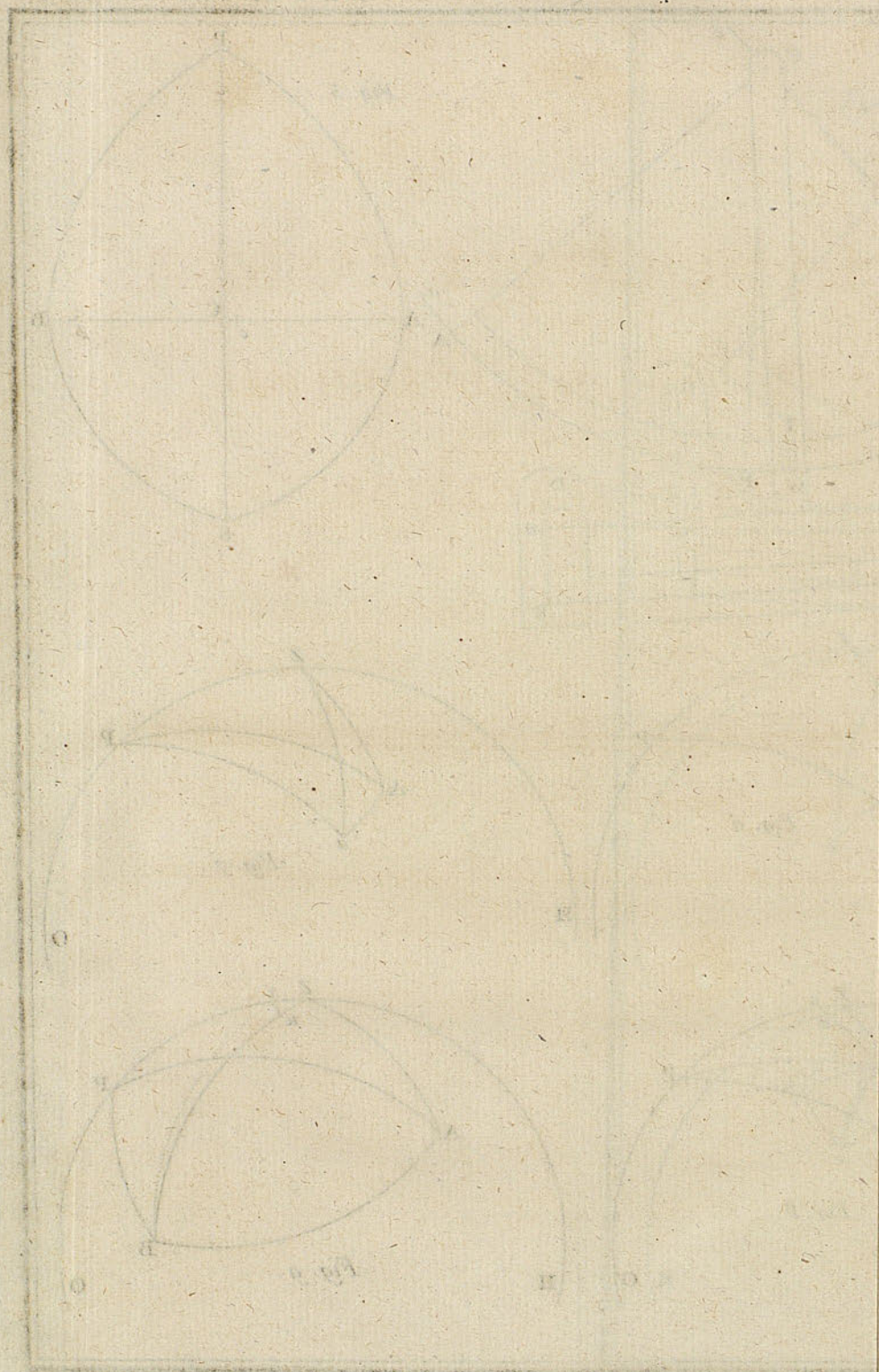


Fig. 9.





DE LA MEILLEURE MANIERE
DE TROUVER L'HEURE EN MER,

PAR OBSERVATION;

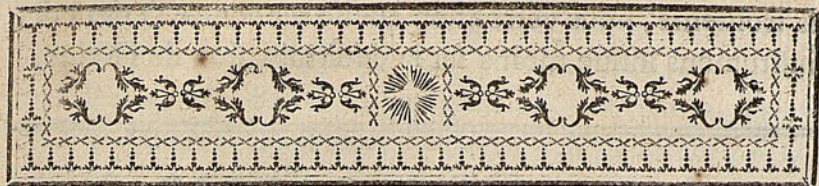
Soit dans le jour, soit dans les crépuscules, & sur-tout
dans la nuit, quand on ne voit pas l'horison.

Nihil unquam invenietur, si contenti fuerimus inventis. Sen. Ep. LXIV.



Prix. 1745.

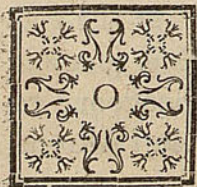
Y



DE LA MEILLEURE MANIERE
DE TROUVER L'HEURE EN MER,
PAR OBSERVATION,

Soit dans le jour, soit dans les crépuscules, & surtout
dans la nuit, quand on ne voit pas l'horison.

Nihil unquam invenietur, si contenti fuerimus inventis. Sen. Ep. LXIV.



N peut trouver l'heure en mer par l'observation de la hauteur, ou de l'azimuth, ou de différentes hauteurs, ou de différens azimuths d'un astre ou de plusieurs astres, ou enfin par l'observation de la même hauteur ou du même azimuth de plusieurs astres, ou du même astre. Les Cadrans mobiles, les Anneaux Astronomiques & autres instrumens, se rapportent à ces sortes d'observations.

Ainsi nous diviserons cette Dissertation en trois Parties. Dans la premiere, nous examinerons les instrumens les plus propres à ces observations. Dans la seconde, nous choisirons parmi les différens usages de ces instrumens, ceux qui nous paroîtront plus sûrs & plus faciles pour trouver l'heure en mer, surtout pendant la nuit. Et dans

la troisième, nous verrons en quelle rencontre l'erreur des instrumens influe moins sur la détermination de l'heure.

PREMIÈRE PARTIE.

Examen des Instrumens les plus propres à observer en Mer la hauteur ou l'azimuth des Astres.

§. 1. **T**OUT le monde sçait que parmi les instrumens à prendre hauteur, on ne peut se servir la nuit à la mer, quand on ne voit pas l'horison, que de ceux qui portent leur horison avec eux, & que même ceux qui sont à pinnules, comme l'Astrolabe marin, ne sont pas propres à observer la hauteur des étoiles, parce qu'il est presque impossible de viser exactement à une étoile par une pinnule percée d'un très-petit trou, pendant que l'instrument & le navire sont dans l'agitation. Mais je crois qu'on peut corriger, ou du moins diminuer beaucoup ce défaut, en substituant à la pinnule inférieure de l'Astrolabe marin, un miroir de métal, perpendiculaire au plan de l'instrument, & qui forme avec la ligne de foi de l'alidade, un angle de 45 degrés, en sorte que l'alidade qui porte la pinnule & le miroir, ait toutes ses parties en équilibre autour du centre de l'instrument, qui doit être son centre de gravité. On peut, au lieu de la pinnule supérieure, placer une lunette.

Fig. I. En effet, soit l'Astrolabe marin *THNO*; sa ligne horizontale *HO*, & sa ligne verticale *TN*. Imaginons la pinnule ou la lunette au point *T*, & le miroir au point *N*, placé parallèlement à la ligne *MI*, laquelle fait un angle

TCI ou ICO , de 45° avec la ligne de foy TC , ou avec l'horizontale HO ; il faut tracer au point N , sur le miroir, une droite perpendiculaire au plan de l'instrument. Il est clair que si un astre est dans une ligne hN parallèle à HO , l'œil en T le verra par réflexion, dans le point N du miroir, ou plutôt dans la direction TN ; parce que l'angle d'incidence $hN\mu$ ou HCM est égal à l'angle de réflexion TNJ , ou TCI , tous ces angles étant chacun de 45° . Donc si l'alidade TC descend vers t d'un nombre quelconque (n) de degrés, le point I de la ligne MI , ou le point J du miroir μNJ , descendant de même vers i , & M montant vers m d'autant de degrés; un astre S placé au même nombre n de degrés de hauteur, paroîtra dans le centre N du miroir, & la ligne de foi Ct , marquera n degrés au point t . Car l'angle d'incidence $SCm = SCH + HCM (45^\circ) - MCm (n) =$ l'angle de réflexion $tCi = TCI (45^\circ) + ICi (n) - TCt (n)$. Donc $SCH = n$; donc l'astre S sera réfléchi vers t par la ligne Ct , & l'arc Tt marquera sa hauteur.

Ou plus brièvement, il est évident, que l'angle formé par les deux rayons, l'un d'incidence, & l'autre de réflexion, est toujours droit, puisque l'angle de réflexion & celui d'incidence sont chacun de 45 degrés. Donc l'astre doit être élevé au-dessus de l'horison de la même quantité de degrés, que l'alidade est descendue au-dessus du zénith.

On peut vérifier cet instrument, en visant à un point connu, ou à l'horison. Car l'erreur de cet Astrolabe ne peut venir que de ce que le miroir μNJ ne fait pas avec l'alidade un angle de 45° , ou de ce que la ligne TCN , perpendiculaire à HO , n'est pas exactement verticale.

Or, dans le premier cas, en visant à un point horizontal h , on verra que l'alidade s'écarte du point T , & l'on

corriger l'erreur de l'instrument, en faisant tourner le miroir autour du point N , & le fixant en sorte que l'alidade étant placée au point T , qui est marqué zero, l'objet paroisse dans la ligne horizontale du miroir ou de la lunette. Mais dans le second cas, supposons que la verticale soit θCn , éloignée de TN d'un nombre quelconque (e) de degrés : si le miroir fait un angle de 45° avec la ligne de foi, il faudra nécessairement placer l'alidade dans la ligne θCn , pour découvrir un objet placé dans la ligne nN , parallèle à la vraie horizontale KCO , & perpendiculaire à θn . Donc l'erreur de l'instrument sera l'arc $T\theta$: mais pour corriger cette erreur, il faudra encore tourner le miroir comme dans le premier cas, en sorte que l'alidade étant placée au point T , l'objet paroisse dans la ligne horizontale du miroir, ou de la lunette ; alors le miroir fera avec TN un angle de $45^\circ + \frac{1}{2} hNn$, ou $45^\circ + \frac{1}{2} HK$, & l'instrument donnera toujours la hauteur exacte ; car dans cette situation, si un astre est dans la ligne horizontale Nn ou CK , l'angle d'incidence $nNV = CNu$, fera $= 45^\circ + \frac{1}{2} hNn$, parce que l'angle nNC étant moindre qu'un angle droit de la quantité hNn , les angles égaux d'incidence & de réflexion, qui forment le supplément de cet angle nNC à 180° , doivent augmenter chacun de $\frac{1}{2} hNn$. Donc si l'alidade descend vers t d'un nombre quelconque n de degrés, le point u du miroir descendant de même, un astre S placé au même nombre n de degrés de hauteur sur l'horison, paroîtra dans le miroir au même point, & l'alidade marquera le même nombre de degrés au point t . En effet, par le même raisonnement que ci-devant, en supposant TI de $45^\circ + \frac{1}{2} hNn$, on aura $Sm = SK + HK + HM (= ICO = 45^\circ - \frac{1}{2} HK) - Mm(n)$, (l'angle d'incidence étant égal à l'angle de réflexion) $= ti = TI (45^\circ + \frac{1}{2} HK)$

+ $Ii(n) - Tr(n)$. Donc $SK - n = 0$, ou $SK = n$, ce qu'il falloit démontrer. De-là il suit que l'angle CNJ ne doit être de 45° , que dans le cas où la ligne TN est exactement verticale, & que les hauteurs seront toujours exactes, lorsqu'on fixera le miroir, en sorte que l'alidade étant placée à zero, l'objet horifontal paroisse dans la ligne horifontale tracée sur le miroir, ou dans le fil horifontal de la lunette.

On sçait que le miroir renverse les objets, & que la lunette les redresse, si elle n'a que deux verres convexes, & que pour prendre hauteur au Soleil, on a besoin d'un verre obscurci, placé devant le miroir, tel que celui qu'on voit dans les Octans Anglois à double réflexion.

Pendant la nuit on a besoin d'une lumiere pour éclairer les fils de la lunette, à moins qu'on ne mette au lieu du fil une petite lame de cuivre.

Si l'on se sert d'une pinnule, on peut tracer sur le miroir, ou sur son bord parallele au plan de l'instrument, une ligne droite, qu'on divisera en degrés & minutes, pour voir tout-à-coup, sans toucher à l'alidade, la minute où se trouve l'astre. En voici la méthode.

Soit TC la ligne de foi de l'alidade; ACB la ligne du miroir parallele au plan de l'instrument. Décrivez du centre T où est la pinnule, un arc-de-cercle DEF , que vous diviserez en degrés & minutes, par des lignes menées de ce centre, comme TDG . Si l'arc DE est d'un degré, la ligne GC marquera un degré de diminution ou d'augmentation, & ainsi des autres, de part & d'autre du point C . Fig. II.

En effet, soit AB le miroir, TC l'alidade, HO, ho deux lignes horifontales qui passent par les points C & G ; soit l'astre E inférieur à l'astre S , la hauteur EGh de l'astre E , sera $= EGA + AGh =$ (à cause des paralleles HO, ho , & de l'angle d'incidence $TGC = EGA$) TGC . Fig. III.

$+ACH =$ (à cause de l'angle extérieur $TCB = TGC$
 $+GTC$, ou $TGC = TCB$ ou $SCA - GTC$) SCA
 $-GTC + ACH = SCH - GTC$. Donc GTC est la di-
 minution de la hauteur SCH pour l'étoile E .

Si l'on se fert d'une lunette, on pourra faire la même chose plus exactement avec un micrometre.

Cet instrument a cet avantage sur l'Octant à double réflexion de M. Hadley, & sur celui de Caleb Smith, à simple réflexion, que les erreurs de la division n'y sont pas doublées comme dans ceux-ci. On peut cependant se servir de l'un de ces deux Octans Anglois, en les rendant plus pesans, & prolongeant l'alidade pour conserver l'équilibre.

L'alidade se mouvant aisément dans tous ces instrumens, on peut la fixer à la hauteur prévue, surtout lorsqu'on cherche l'heure, & attendre le passage de l'astre à cette hauteur.

A l'égard des miroirs, ceux de verre ne peuvent pas servir aux étoiles, à moins qu'ils ne soient parfaitement plans, & d'une épaisseur égale par-tout, ce qui ne se trouve presque jamais. C'est pour cela qu'on emploie les miroirs de métal dans plusieurs Octans Anglois; car ces miroirs étant bien polis, représentent les étoiles aussi clairement que les Télescopes de réflexion, au lieu que les miroirs ordinaires de verre les représentent très-confusément.

§. 2. Ce que l'on vient de dire, prouve qu'on peut aujourd'hui observer la hauteur des étoiles sur un navire, beaucoup mieux qu'on ne le pouvoit avant l'invention des Octans à miroir: mais la plus grande difficulté, qui est la suspension des instrumens à plomb, subsiste encore, & il est question de la vaincre, ou au moins de la diminuer autant qu'il est possible.

M. Jean

M. Jean Bernoulli, dans le Recueil de ses Ouvrages, *Fig. IV.*
 imprimé en 1742, *Art. 177, tom. IV, p. 269 & 274*,
 fait voir, que si un corps d'une figure quelconque $DFEG$
 étant en repos, ayant son centre de gravité C , est frappé
 au point D selon la direction horisontale DAE , il aura deux
 mouvemens angulaires uniformes en même tems, l'un
 autour du centre de gravité C , pendant que ce centre se
 meut d'un mouvement uniforme, suivant une direction
 parallele à AE , & l'autre autour du centre de rotation B ,
 qui se meut d'un mouvement uniforme sur la cycloïde or-
 dinaire, dont le rayon est BC , pendant que ce cercle roule
 sur la droite BP parallele à AE , & il démontre que le
 centre de rotation B , n'est pas différent du centre de sus-
 pension d'un pendule dont A seroit le centre d'oscillation
 ou de percussion, & comme par la démonstration d'Hu-
 gens, les pendules composés ont cette propriété, qu'on
 peut changer le point de suspension en centre d'oscilla-
 tion; il suit de-là qu'on peut prendre le corps $DFEG$,
 pour un pendule composé, qui fait ses vibrations autour
 du point de suspension A , & dont le centre d'oscillation
 est B . Ce mouvement de rotation est plus lent ou plus
 prompt, selon que la direction AE est plus près ou plus
 loin du centre de gravité C . Si l'on considere la cycloïde
 d'Hugens décrite par le point B , & si l'on prend le corps
 $EFDG$ pour un cercle homogene, dont le centre est C ,
 & le rayon $= r$, on prendra, selon la règle d'Hugens, ^{*Horol. Oscil.*}
 de la troisieme proportionnelle à CB & r , pour avoir CA , ^{*fol. 142.*}
 ce qui donne $CA = \frac{2}{5} \frac{rr}{CB}$, & par conséquent $CB = \frac{2}{5} \frac{rr}{CA}$.

Tout cela suit des principes de M. Bernoulli; donc la
 distance CB croît en raison composée de la raison directe
 doublée du rayon r du corps, & de la raison inverse sim-
 ple de la distance CA . Donc plus le point A de suspension

178 MANIERE DE TROUVER L'HEURE EN MER.

fera proche du centre de gravité de l'instrument, & moins il sera exposé à tourner autour de B , le point B étant éloigné à proportion; & plus le corps sera pesant ou solide, moins il sera exposé à tourner autour de B ; puisque le carré rr du rayon en sera plus grand, & par conséquent le point B plus éloigné. Donc si le point A de suspension est fort près du centre de gravité C , ce point A étant frappé par le mouvement d'un navire, le centre de rotation B sera fort éloigné de C , surtout si l'instrument a beaucoup de pesanteur, laquelle est toujours proportionnelle à rr , dans les cercles de même épaisseur. Donc le mouvement horizontal de CBF , &c. sera presque égal à celui de A , d'autant plus que le point fixe A résiste au mouvement de la pesanteur.

Il faut donc tâcher de suspendre les instrumens à plomb, par un point A , qui soit fort peu au-dessus de leur centre de gravité, & leur donner beaucoup de pesanteur, afin qu'ils aient fort peu de rotation. Le meilleur moyen pour cela, & en même tems le plus simple, est la suspension des boussoles en cette maniere.

Dans les boussoles ordinaires, ou compas de variation, Fig. V. le chassis $HIKL$ est appuyé sur deux pivots M & N , & la boîte intérieure de la boussole est appuyée sur deux points opposés E & D des côtés HL , IK du chassis. Les pinnules & le fil horizontal sont dans le diamètre ED , de sorte que les points M & N du chassis étant seuls fixes, le mouvement se fait toujours autour de l'axe MN , parce que la boîte de la boussole ne peut avoir, par cette suspension, que deux mouvemens circulaires, l'un autour de l'axe ED , & l'autre autour de l'axe MN : mais l'axe ED étant mobile autour de l'axe fixe MN , le mouvement circulaire fait nécessairement une impression sur cet axe, & le force à tourner dans très-peu de tems autour de

L'axe fixe MN . De-là vient que les pinnules E & D sont toujours à fort peu près dans le même azimuth; & c'est-là le plus grand avantage de la suspension des bouffoles. Pour profiter de cet avantage dans le cas présent, il faut donner à l'Anneau Astronomique, ou à l'Astrolabe marin, une situation toute différente, & le placer dans la direction MN , en sorte qu'il soit traversé par un axe fixe ED , & que cet axe soit appuyé sur le châssis aux points E & D , où l'on appuie les pivots des bouffoles. Ce châssis roulera sur les points fixes M & N ; & par ce moyen, l'instrument étant dans l'azimuth MN , ne pourra plus rouler autour de son axe ED , & ne roulant qu'autour de MN par des vibrations qui le feront incliner vers E ou vers D , l'erreur dans la hauteur des astres sera très-petite. On pourra même l'éviter, en choisissant la plus petite hauteur de toutes celles que l'instrument pourra donner dans ses différentes inclinaisons. Car soit S le Soleil; CH, Ch , deux différentes lignes horizontales, dont l'une CH , soit dans le vrai azimuth du Soleil. Il est clair que l'angle SCH sera toujours plus petit qu'aucun des autres SCh ; puisque les côtés SC, CH , & SC, Ch étant égaux, la distance SH perpendiculaire à l'horison, est toujours plus petite que la distance oblique Sh . Ainsi l'erreur produite dans la hauteur, sera l'excès de l'angle oblique SCh sur l'angle de la vraie hauteur SCH . Pour trouver cet excès, l'inclinaison ShH étant donnée, on calculera le triangle sphérique SHh rectangle en H . Soit le sinus de l'angle d'inclinaison $ShH = i$, le sinus total $= r$, & le sinus de la hauteur $SH = h$; nous aurons $i : r :: h : \text{au sinus de } Sh = \frac{rh}{i}$, & la différence entre l'angle d'inclinaison erronée ShH , & l'angle droit SHh étant l'erreur de l'inclinaison, & en même tems le complément de cet angle d'inclinaison,

Fig VI.

180 MANIERE DE TROUVER L'HEURE EN MER.

nommant e le sinus de cette erreur, nous aurons le sinus de $Sh = \frac{rh}{\sqrt{rrce}}$, puisque $i = \sqrt{rrce}$. De sorte que si cet écart est, par exemple, de 10° , on trouvera le sinus de $Sh = \frac{10000h}{9848}$, ou $\frac{1250}{1231}h$; ce qui n'est pas une grande erreur, puisque dans un si grand écart de 10° , le sinus de la fausse hauteur ne surpasseroit le sinus de la véritable, que de $\frac{19}{1231}$, ou à fort peu près $\frac{1}{63}$. Cependant cet écart produiroit une erreur considérable dans les grandes hauteurs; car la véritable hauteur étant de 76° , & son sinus $97029,57'$, on trouveroit que pour un écart de 10° d'inclinaison, la fausse hauteur seroit de $80^\circ 9'$; & ainsi l'erreur seroit de $4^\circ 9'$. Mais si la vraie hauteur étoit de $10^\circ 30'$, son sinus $18223,55$ donneroit dans la même hypothese, le sinus de la fausse hauteur 18504 , laquelle seroit $10^\circ 40'$, & l'erreur ne seroit que de $10'$, ce qui est bien peu pour 10° d'inclinaison. D'ailleurs on s'apperçoit aisément d'une si grande inclinaison, & l'on ne risque presque rien en prenant la plus petite hauteur dans les différentes inclinaisons, puisque la vraie hauteur SH est toujours la plus petite de routes.

On voit que cette méthode réunit tous les avantages qu'on peut espérer de la suspension d'un instrument à prendre hauteur. Car 1^o l'instrument étant suspendu par ce moyen en E & D , un peu au-dessus de son centre de gravité, ne roulera presque plus autour du centre d'oscillation, qui sera très-éloigné du point de suspension. 2^o. Etant suspendu comme la bouffole, de manière qu'il ne puisse pas rouler autour de son axe, mais seulement autour de son diamètre horisontal, il ne pourra s'écarter que très-peu de la vraie hauteur, comme on vient de le voir. 3^o. Le poids de l'instrument étant fort grand, on en fera d'autant plus assuré de la vraie hauteur.

Pour perfectionner cette suspension, on peut placer un niveau d'air sur l'axe MN , & l'on verra que la bulle d'air restera toujours au milieu du niveau, pendant que l'instrument ne tournera qu'autour de l'axe MN ; mais il faut que ce niveau soit exactement dans la direction de cet axe. On peut ajouter un autre niveau d'air perpendiculaire à celui-ci, & exactement dans l'axe ED , pour pouvoir prendre la hauteur au moment que la bulle d'air sera au milieu, & pour éviter par ce moyen, autant qu'il est possible, l'erreur que l'inclinaison de l'instrument peut produire.

§. 3. Le Compas azimuthal, que les Anglois ont imaginé pour observer l'azimuth des astres, est préférable au compas ordinaire de variation, par la grandeur de ses degrés, & par la hauteur de sa pinnule; mais il a un très-grand défaut, qui ne se trouve pas dans les compas ordinaires de variation. Car dans ceux-ci, la boîte qui porte la rose des vents étant appuyée sur les points E & D du chassis $HIKL$, & ce chassis roulant avec cette boîte autour des pivots fixes M & N , il arrive que le mouvement se fait toujours autour de l'axe MN , comme on l'a déjà remarqué, & que par conséquent les pinnules étant fixées en E & D , l'azimuth qui répond à ED reste toujours le même, malgré l'agitation de l'instrument, qui n'incline jamais vers M ni vers N , ou dont le mouvement se réduit promptement aux vibrations seules autour de MN , comme l'expérience & la raison le démontrent; ce dernier mouvement l'emportant toujours sur le premier: au contraire l'alidade du compas azimuthal Anglois roulant autour du point D , se trouvera souvent placée dans une situation telle que DG , éloignée de DE , & l'instrument roulant toujours autour de MN , l'azimuth qui répond à DG variera sans cesse. Les Auteurs qui ont fait un si grand éloge de cet instrument, n'ont pas sans doute apperçu ce

défaut, qui rend inutile la grandeur de la graduation & la hauteur de la pinnule.

Mais pour rendre le compas ordinaire de variation propre à observer l'azimuth de l'astre, il faut placer un fil de laiton au-dessus de l'une des pinnules *D*, non pas sur les bords de l'instrument, mais sur la boîte intérieure, perpendiculairement au verre qui la couvre, & tendre un fil du haut de ce style au bas de la pinnule placée en *E*, pour avoir un triangle rectangle, qui sera toujours dans le même vertical, & qui sera très-propre à observer l'azimuth des étoiles; parce que cette boîte tournant autour du seul axe *MN*, le style pourra bien pancher vers *E*, mais son inclinaison ne se fera que dans le plan du même vertical.

Si l'on veut être assuré que la petite boîte où est la rose des vents, ne tourne qu'autour de l'axe *MN*, il faut faire en sorte que le fil horizontal *ED* soit bien perpendiculaire à l'axe *MN*, ce qui n'est pas fort difficile; & il est bon d'imprimer ce mouvement autour de *MN*, en appuyant la main sur *E* ou *D*, pour détruire entièrement l'autre mouvement autour de l'axe *ED*.

§. 4. A l'égard des observations qui se font pendant le jour, ou lorsqu'on voit l'horison, tout le monde convient que l'Océans de Hadley & de Smith sont les plus propres à prendre hauteur.



SECONDE PARTIE.

*De l'usage des instrumens à prendre hauteur,
& à observer l'Azimuth, pour
trouver l'heure.*

I. **O**N trouve facilement l'heure par la hauteur du Soleil ou d'une étoile, & la plupart des livres de navigation nous donnent la maniere de résoudre cette question par le calcul & par le Quartier Sphérique. Il paroît cependant que le Quartier Sphérique a deux grands défauts. Le premier est que dans les grandes hauteurs, on est obligé de suppléer au quart-de-cercle, qui manque à cet instrument; ce qui expose à quelque erreur, par la petitesse des divisions de la ligne droite, qui supplée à ce quart-de-cercle. Le second défaut est que les divisions des heures sur les paralleles à l'équateur, sont trop serrées auprès du méridien, & que les paralleles sont aussi trop serrés auprès du pôle, ce qui empêche de déterminer l'heure assez exactement.

Il vaudroit donc beaucoup mieux substituer au Quartier Sphérique, un demi cercle, divisé selon la projection stéréographique, qui suppose l'œil au pôle ou au zénith. On verra par la construction de cet instrument, qu'il n'a pas les défauts du Quartier Sphérique; car les méridiens ou les azimuths, y sont tous à distances égales, & les paralleles à l'équateur ne sont serrés que vers le pôle, à proportion des tangentes de leurs demi-distances au pôle.

Ce demi-cercle sphérique contient les projections de

Fig. VII. tous les quarts de méridiens, qui sont des lignes droites BP, CP, DP , &c. & les projections des parallèles à l'équateur, qui sont différens cercles concentriques, dont les demi-diametres $P 10, P 20$, &c. sont les tangentes des demi-distances de chaque parallèle au pôle P , par où l'on voit de quelle maniere on peut construire & diviser cet instrument. Mais pour en faciliter l'usage, on élèvera au milieu F du rayon PC , & au milieu R de FC , les droites FG, RI , perpendiculaires à PC . En voici l'usage dans la question présente.

La déclinaison du Soleil étant donnée, (par exemple, de 23° N.) la latitude d'un pays ($57^\circ 10'$ N.) ; la distance au zénith (75°), on trouvera l'heure, en prenant sur PB le point de la distance du Soleil au pôle Nord (67°). Si la déclinaison étoit Sud, on trouveroit ce point sur le quart-de-cercle BC . Ensuite on comptera de part & d'autre du point trouvé (67°) vers P & B , la distance du Soleil au zénith (75°) ; on aura à main droite du point P dans cet exemple, le point marqué 8 ; & à main gauche, en descendant du point B vers C , sur le quart-de-cercle, le point marqué 142. Ensuite ayant attaché un fil au point le plus bas C , on le tendra successivement sur les deux derniers points trouvés (8 & 142). Ce fil rencontrera la ligne GF , prolongée en deux autres points, dont la distance sera le demi-diametre d'un cercle, qui doit passer par le premier point (8), trouvé sur la ligne PB , & dont le centre doit être sur la même ligne, en-deça de P à main gauche. Décrivez donc ce cercle, qui viendra couper le parallèle de la latitude donnée au point de la projection du zénith, par où passe le méridien éloigné du cercle horaire PB (de 98°), ce qui réduit en tems, donne l'heure requise (6 heures 32' après-midi).

La raison de cette méthode, est que le zénith doit se trouver

trouver dans le parallele de latitude , & dans le petit cercle qui a pour pole le centre du Soleil , & dont la circonférence est autant éloignée du Soleil que le zénith. Or le cercle décrit par la méthode précédente est dans ce cas , selon les regles de la projection stéréographique : donc ce cercle doit déterminer le méridien de l'observation. Lorsque le fil tendu du point *C* , ne peut rencontrer la ligne *GF* qu'à une distance infinie , ou presque infinie , le diametre du cercle requis étant presque infini , sa circonférence doit être regardée sans erreur sensible , comme une ligne droite perpendiculaire à *PB*.

Si le fil ne pouvoit pas couper *GF* , mais seulement *IR* , on doubleroit la distance trouvée sur *IR* , pour avoir le rayon du petit cercle requis.

II. Lorsque la latitude n'est pas donnée , on peut trouver l'heure , non-seulement par le calcul , qui est trop difficile pour les marins , mais encore par le demi-cercle sphérique , en prenant deux hauteurs inégales du Soleil le même jour , & observant la différence des tems ; ce qui ne peut se résoudre qu'en tâtonnant & par hasard , lorsqu'on se sert du Quartier Sphérique. Par exemple , le Soleil ayant $19^{\circ} 39'$ de déclinaison N. ou sa distance au pole N. étant de $70^{\circ} 21'$. Si l'on trouve sa distance au zénith le matin de $51^{\circ} 41'$, & une heure & demi après , de $39^{\circ} 35'$, on trouvera très-aisément l'heure & la latitude en cette maniere. Prenez de part & d'autre , du point de la distance du Soleil au pole ($70^{\circ} 21'$) , comme dans le premier Article ; sa distance au zénith ($51^{\circ} 41'$) , vous trouverez à main droite entre *P* & *B* , un point marqué $18^{\circ} 40'$, & à gauche sur le quart-de-cercle *BC* , le point marqué $122^{\circ} 2'$. Tendez le fil sur ces deux points , il coupera *GF* en deux autres points , dont la distance sera le rayon d'un cercle , qui doit passer par le premier ($18^{\circ} 40'$).

1186 MANIERE DE TROUVER L'HEURE EN MER.

Prenez de même du point ($70^{\circ} 21'$) de part & d'autre, la deuxième distance au zénith ($39^{\circ} 35'$); vous trouverez deux autres points ($30^{\circ} 46'$ à droite, & $109^{\circ} 56'$ à gauche), lesquels détermineront sur FG le rayon d'un autre cercle, qui doit passer par le premier point ($30^{\circ} 46'$). Mais ce premier point ne doit pas être pris dans le méridien PB , qui appartient à la première observation; on doit le prendre dans un autre méridien, qui fait avec PB un angle de $22^{\circ} 30'$, ou de 1 heure $\frac{1}{2}$; & ce second cercle doit avoir son centre sur ce second méridien. L'intersection de ces deux cercles déterminera le zénith, & par conséquent, le parallèle de la latitude, que l'on trouvera marquée sur PC (de $51^{\circ} 32'$), & le méridien qui passe par ce zénith, faisant avec PB un angle de $52^{\circ} 26'$, on aura l'heure de la première observation, en divisant ce nombre par 15, ce qui donne ici 3 heures & demi de distance à midi, ou 8 heures 30' du matin.

On voit combien ce Problème est utile à la mer, où l'on manque souvent l'occasion d'observer la latitude à midi.

Lorsque la distance du Soleil au zénith est fort petite; le rayon du cercle qu'on doit décrire étant petit, se décrit fort aisément; mais lorsqu'elle est fort grande, le rayon de ce cercle est si grand, qu'il est difficile de le bien décrire, à moins qu'il ne soit presque infini.

III. Ce que l'on vient de dire, suppose que le navire ait été sans mouvement dans l'intervalle des deux observations; mais si le navire a fait route, on mesurera l'angle BAC compris par la route AB du navire, & l'azimuth ACS du Soleil; & achevant le triangle rectangle ACB , on trouvera par le calcul, ou par le quartier de réduction, ayant réduit en degrés la route AB , quel est le mouvement AC du zénith vers le Soleil: ensuite on retranchera

AC de la premiere distance AS , si on a fait route du côté du Soleil, ou bien on l'ajoutera à cette même distance, si on a fait route du côté opposé au Soleil. Par ce moyen, on aura la distance du Soleil au second zénith B dans la premiere observation, & faisant l'opération avec cette distance & avec celle de la derniere observation, on aura deux cercles qui se couperont au zénith de la seconde observation, ce qui donnera l'heure.

Si la distance entre les deux observations surpasse 12 heures; si elle est, par exemple, de 14 heures dans le même jour, ôtez 14 de 24, le reste 10 fera la différence des tems. On aura seulement égard à la variation de la déclinaison dans 14 heures.

Si la distance entre les deux observations surpasse 24 heures, par exemple, si elle est de 26, on doit opérer comme si elle n'étoit que de deux heures, mais en différentes déclinaisons. M. Graham, de la Société Royale de Londres, propose dans les Transactions Philosophiques, au lieu de ce demi-cercle sphérique, une partie d'un grand globe, dont le demi équateur est divisé en heures & minutes. Un compas circulaire, fixé à la distance du Soleil au zénith, sert à décrire deux arcs-de-cercle, qui, par leur intersection, déterminent le zénith.

Il est certain que cet instrument est fort simple, mais il doit être trop grand & trop dispendieux, pour être utile à la navigation. La dépense & l'embarras des grands instrumens, empêchent toujours les Pilotes de s'en servir. C'est ce qui m'a déterminé à proposer le demi-cercle sphérique.

IV. On peut, au lieu de la distance horaire des deux observations, prendre la différence des azimuths; alors le centre P du demi-cercle sphérique, représentera le zénith, & ayant pris sur l'azimuth PB , la distance du Soleil

au zénith, on comptera de part & d'autre sa distance au pôle, pour avoir le demi-diamètre du premier cercle. On fera la même opération sur le second azimuth, pour avoir un second cercle, qui, par son intersection avec le premier, déterminera le pôle & le méridien. Mais pour trouver l'heure, ayant trouvé par ce moyen la latitude, on se servira du premier Article de cette seconde Partie, ou des règles ordinaires de la projection stéréographique, qu'il est inutile de répéter ici.

V. Quoique les deux cercles tracés dans les deux Articles précédens, se coupent toujours en deux points, il ne sera pas difficile de distinguer celui des deux points qui représente le pôle ou le zénith, comme dans le demi-globe de M. Graham. Si l'on joint ces deux distances ensemble, celle des tems, & celle des azimuths, on sera plus assuré de l'heure & de la latitude.

VI. On peut trouver l'heure & la latitude par différentes hauteurs de deux étoiles, en les regardant comme une seule étoile, dont la hauteur & la déclinaison auroient varié, & prenant la différence de leur ascension droite, pour la différence des tems, on auroit cet avantage sur les méthodes précédentes, que celle-ci seroit indépendante du mouvement du navire; parce qu'on pourroit observer les deux étoiles presque en même tems.

VII. La méthode la plus facile, & peut-être la plus sûre, pour trouver l'heure à la mer pendant la nuit, est d'observer le moment auquel deux étoiles sont dans le même azimuth, ou paroissent à plomb l'une sous l'autre. Car si l'on connoît la latitude, on trouvera l'heure, ou par le calcul, ou par le demi-cercle sphérique. En effet, soit *P* le pôle du monde, Nord ou Sud, le plus près des deux étoiles observées, ou le centre du demi-cercle sphérique. Soient *PE*, *PA*, les deux méridiens où se trouvent les

étoiles observées E & A . L'angle $AP E$ doit être égal à la différence de leurs ascensions droites, & les lignes PE , PA , doivent être les tangentes de la demi-distance de chaque étoile au pôle. Faites passer par les points E & A , un grand cercle $A E Z$, selon la méthode de cette projection; ce cercle représentera l'azimuth des deux étoiles, & coupera le parallele de latitude en un point Z , qui marquera le zénith; la ligne droite $Z P M$ sera le méridien du lieu de l'observation. Donc on aura l'heure $AP M$ de l'étoile A , ou $EP M$ de l'étoile E . Or la différence de l'ascension droite de chaque étoile & du Soleil, donne l'heure requise.

On voit assez qu'on peut trouver la même chose plus exactement par le calcul. Car dans le triangle sphérique $EP A$, connoissant EP , AP , & l'angle P , on aura l'angle A , & dans le triangle $Z AP$, avec l'angle A & $Z P$, & AP , on aura l'angle horaire $Z P A$.

VIII. Si la latitude n'est pas donnée, ou si l'on n'en est pas assuré, il faut avoir deux observations semblables de 4 étoiles, pour trouver en même tems l'heure & la latitude. Car soient deux autres étoiles a & e , qui se trouvent dans un même azimuth, outre les deux premières A & E , & supposons que le zénith ou le navire n'aient point changé de place. Prenez les angles $AP a$, $a P e$, égaux aux différences d'ascensions droites des étoiles A , a & e , si les deux observations ont été faites en même tems : mais si la deuxième observation a été faite plus tard que la première, ajoutez à l'angle $AP a$, la différence des tems réduite en degrés, & ayant placé les étoiles a & e dans leur cercle de déclinaison, vous ferez passer un grand cercle par les points a & e , qui coupera le premier azimuth $A E Z$ au point Z , & ce point donnera le zénith & la latitude. L'angle $AP M$ sera l'angle horaire de l'étoile A .

Par le calcul ; connoissant PE , Pe , & l'angle EPe , on aura l'arc de grand cercle Ee , & les deux autres angles du triangle EPe ; & par le moyen des triangles EPa , ePa , ayant les angles AEP , $a e P$, j'aurai les angles $Z E e$, $Z e E$, & par conséquent, le côté EZ du triangle EZe , & l'angle EPZ requis, ce qui est trop long & trop difficile pour le commun des Pilotes.

IX. Si le navire a été en mouvement dans l'intervalle des deux observations, le point Z n'est pas le zénith ; mais le zénith doit s'être trouvé dans l'azimuth EZ , au tems de la premiere observation, comme en V , & dans l'azimuth eZ , au tems de la deuxieme comme en u . Donc connoissant la longueur de l'arc Vu , décrit par le navire, & l'angle ZVu ou ZuV de la route, avec l'azimuth EZ ou eZ , par le moyen de la boussole, on aura la correction Zu , en disant : Comme le sinus de l'angle VZu , que font ensemble les deux azimuths, est au sinus de l'arc Vu de la route que l'on prend pour l'arc d'un grand cercle ; ainsi le sinus de l'angle V de la route avec l'azimuth de la premiere observation, est au sinus de l'arc Zu , ou de la correction, ce qui donne la distance Pu du pole au zénith, & l'heure uPe de l'étoile e .

X. Si la différence en ascension droite des étoiles E & A est nulle, le triangle PZE s'évanouit, & il n'est pas nécessaire de connoître PZ pour avoir l'heure. Le cas est le même, lorsque la différence en ascension droite est de 180° . Mais dans ces deux cas, les deux étoiles ne sont dans le même vertical, que l'orsqu'elles sont dans le méridien. Ainsi l'heure se trouvera par la différence entre leur ascension droite & celle du Soleil.

XI. Plus l'une des étoiles E est proche du pole, moins l'observation dépend de la latitude ; en sorte que si l'étoile polaire étoit dans le pole même, il ne seroit pas nécessaire

de connoître la latitude en se servant de cette étoile; c'est pour cela qu'elle est plus utile qu'aucune autre à cette observation, sur tout dans les petites latitudes. Car si le zénith étoit dans l'équateur, l'azimuth de cette étoile le plus éloigné du Nord, n'en seroit éloigné que de deux degrés. On doit donc se déterminer à l'étoile polaire, & chercher, autant qu'il est possible, une autre étoile, qui diffère très-peu de celle-ci en ascension droite, pour trouver l'heure plus exactement.

XII. La latitude étant donnée avec la situation de deux étoiles, que l'on suppose à la même hauteur dans le même tems, on peut trouver l'heure par le calcul, ou par le demi-cercle sphérique. Car en supposant ici la dénomination des principaux élémens de la sphere, tirée de l'Astronomie Nautique de M. de Maupertuis, le calcul, dans le Problème 29, donne $rsx - rsx' = cy'u' - cyu$. Mais par les principes de la Trigonométrie rectiligne, nommant a le sinus de la différence d'ascension droite des deux étoiles, & b son cosinus, on a $u't - ut' = ra$ & $u' = \frac{ra - bu}{r}$, ce qui donne $rsx - rsx' = \frac{cy'ta - cybu}{r} - cyu$, ou $-rrsx + rrsx' + cy'ta = cybu + cyru$. On trouve la même chose par le demi-cercle sphérique, en y appliquant les regles connues de la projection.

Voyez ci-après, p. 194, la Figure & les Formules.

XIII. Comme il est difficile de trouver deux étoiles qui arrivent en même tems à la même hauteur, on peut attendre que la deuxième étoile arrive à la hauteur de la première; & observant la différence des tems, la question se résoudra comme si la deuxième étoile avoit une plus grande ou plus petite différence d'ascension droite avec la première.

XIV. On peut appliquer la même réflexion à la méthode de l'Art. VII. Car si par un compas de variation, on

connoît l'azimuth EA de l'étoile E , & qu'une autre étoile arrive au même azimuth EA après un tems déterminé, on trouvera l'heure de la même maniere.

XV. Si on observe quatre étoiles qui aient de deux en deux la même hauteur, les deux dernières donneront un nouvel azimuth différent du premier, & l'interfection des deux azimuths déterminera le zénith, la latitude & l'heure.

XVI. Si le navire a été en mouvement dans l'intervalle des deux observations, on trouvera le zénith par la méthode de l'Article IX.

XVII. On a différentes méthodes pour trouver l'heure par l'azimuth d'un astre, & la latitude donnée. Car ayant la distance PZ du pole au zénith, l'angle de l'azimuth EZ avec le méridien PZ , & la déclinaison de l'astre, ou sa distance au pole EP , on aura l'heure ZPE . Mais pour la trouver sur le demi-cercle sphérique, il faudra décrire un azimuth EZ , qui fasse avec le méridien PZ l'angle donné, selon la méthode de cette projection. Cet azimuth coupera le parallele de la déclinaison de l'astre en quelque point E , & le méridien PE donnera l'angle horaire ZPE , que l'on réduira à l'heure solaire.

XVIII. On peut encore trouver l'heure par la seule différence des azimuths de deux étoiles, ce qui ne dépend pas de la variation de la boussole, comme les méthodes précédentes. Mais le calcul en est très-difficile, & la question se réduit à un Problème du quatrième degré. Car en me servant des formules, dénominations & figures de M. de Maupertuis, soit a le sinus de la différence des ascensions droites; b le cosinus; f le sinus de la différence des azimuths, & g son cosinus.

La troisième Formule de M. de Maupertuis, donne

$$\frac{rx}{pm} = \frac{su - cx}{t} \quad \left(\text{en prenant } x = \frac{rx}{y}, \text{ pour la tangente de la déclinaison} \right)$$

déclinaison d'un astre) & $\frac{rn'}{m'} = \frac{su'-cx'}{r'}$ pour un autre astre; mais $m' = \frac{gm-fn}{r}$, & $n' = \frac{fm+gn}{r}$. Donc $\frac{rn'}{m'} = \frac{frm+grn}{gm-fn}$ = (à cause de $m = \frac{rnt}{su-cx}$) $\frac{frnt+grsu-grcx}{grt-fsu+fcx} = \frac{su'-cx'}{r'}$; mais nous avons $t' = \frac{bt-au}{r}$, & $u' = \frac{at+bu}{r}$. Donc en substituant ces valeurs, on aura: $\frac{frnt+grsu-grcx}{grt-fsu+fcx} = \frac{ast+bsu-cxx'}{bt-au}$. Ce qui donne l'équation suivante :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{zt - grx}{fc} \\ - \frac{au}{b} \\ - \frac{asx}{bc} \\ + \frac{grrx'}{bcf} \end{array} \right\} z = \left. \begin{array}{l} \frac{rsx'}{bc} \\ + \frac{sx}{c} \\ - \frac{agrx}{bcf} \end{array} \right\} u = \left. \begin{array}{l} + \frac{agr^3s}{bcf} \\ - \frac{rrss}{cc} \\ - \frac{rxx'}{b} \end{array} \right\}$$

que l'on peut exprimer ainsi :

$$\left. \begin{array}{l} zt + A \\ + Cu \end{array} \right\} z + Bu + Dr = 0.$$

Et réduisant ensuite la valeur de $u = \sqrt{rr - tz}$, on aura :

$$0 = Dr + Br \frac{+At}{+Crt} - \frac{Btz}{2r} - \frac{Ct^3}{2r} - \frac{Bt^4}{8r^3} - \frac{Ct^5}{8r^3} - \frac{Bt^6}{16r^5} - \&c.$$

& par le retour des suites, on aura, selon la Formule du P. Renaud, p. 437, première édition, de l'analyse démontrée,

$$z = \frac{-Dr - Br}{A + Cr} - \frac{2rr + Br}{2} \left(\frac{D + B}{A + Cr} \right)^2 + \frac{2r - B(r) + Acr + ccr^3}{2(A + Cr)^3} \left(\frac{-D}{-B} \right)^3$$

+ &c. c'est-à-dire, pour les deux premiers termes,

$$z = \frac{agr^3s - bfrss - ccfrxx' + cfrssx' + bcfrsx - acgrrx}{-bcgrx - acfsx + cgrrx' - accfr} \times \frac{(-2bcfr - frssx' - bfrsx + agrrx) \times (-agrrs + bfrss + ccfx'x')}{2(-bgrx - afsx + grrx' - acfr)^3}$$

Lorsque $f=0$, la premiere équation donne celle du Problème 26. de M. de Maupertuis, $rras = rcx't - bcxt + acxu$, & le premier terme de la suite, donne $rras \equiv rcx't - bcxt + acrx$. Lorsque $b=0$, l'équation donne $t = \frac{-cfsx'u + cgrxu - gr^3s + ccfx'x'}{ccxu + cfsx - cgrx'}$. Lorsque $c=0$, ou que le pole est au zénith, on trouve dans l'équation & dans la suite, t infini; ce que l'on sçait d'ailleurs. Si l'on suppose x & $x'=0$; on trouvera par l'équation:

$$t = \sqrt{\frac{aa + abgrs - bbss}{2} \frac{abgrs - bbss}{cc} + \sqrt{\left(\frac{aa + abgrs - bbss}{2} \frac{abgrs - bbss}{cc}\right)^2 - \left(\frac{bss - agrs}{cc} \frac{bss - agrs}{ccf}\right)^2} rr}.$$

Pour construire cette équation, $\left. \begin{matrix} t + A \\ + Cu \end{matrix} \right\} t + Bu + Dr = 0$, par le moyen de l'hyperbole entre ses asymptotes, dont les coordonnées soient x & y ; faisons $A = \frac{B}{C} - Cu - t$, $+x$ & $t = y - \frac{B}{C}$, ce qui donne $u = \frac{x - t - A}{C} + \frac{B}{CC}$, & l'équation devient $xy - \frac{BA}{C} + \frac{BB}{CC} + Dr = 0$. On voit assez la construction qui résulte de cette réduction, & combien ce Problème est important, puisqu'il est indépendant de la réfraction & de la variation de la boussole. On pourroit le rendre plus facile, par le moyen d'une Table, ou d'un Instrument Géométrique.

FIGURE ET DENOMINATIONS DE L'ASTRONOMIE NAUTIQUE.

Fig. X. LE rayon $CP = r$.

Le sinus de la déclinaison de l'astre $CB = x$, son cosinus $DB = y$.

Le sinus de la hauteur polaire $PQ = s$, son cosinus $CQ = c$.

MANIERE DE TROUVER L'HEURE EN MER. 195

Le sinus de la hauteur de l'astre $CG = h$, son cosinus GL
ou $GE = k$.

Le sinus de l'angle horaire $= t$, son cosinus $= u$.

Le sinus de l'angle azymuthal $= m$, son cosinus $= n$.

FORMULES.

- I. $\pm rsh \mp rsx = cyu$.
- II. $rrx \pm nck = rsh$.
- III. $\pm rnyt \pm rmcx = msyu$, ou $-rnyt \mp rmcx = msyu$, lorsque F est entre B & O .
- IV. $rcht \pm nskt = rmku$.
- V. $mk = yt$.

TROISIEME PARTIE.

*En quelle rencontre l'erreur des Instrumens
influe moins dans la détermination
de l'heure.*

I. **P**OUR trouver dans quelle rencontre l'erreur dans la hauteur influe plus ou moins dans la détermination de l'heure, je me servirai des formules de M. de Maupertuis, nommant dH l'erreur dans la hauteur, & dE celle de l'heure. Or nous avons par la nature du cercle, $r : k :: dH : dh = \frac{k dH}{r}$; & la premiere formule de M. de Maupertuis donne $\pm rrdh = cydu$, ou $du = \frac{rrdh}{cy} = (\text{en substituant la valeur de } dh) \frac{rk dH}{cy}$; Mais l'équation du cercle donne aussi, $t : r :: du : dE = \frac{rrkdH}{tcy}$.

Bb ij

196 MANIERE DE TROUVER L'HEURE EN MER.

Cette expression fait voir combien une erreur commise dans l'observation de la hauteur d'un astre, influe dans le calcul de l'heure; puisqu'en se trompant de la quantité dH dans la hauteur, on se trompe de la quantité $\frac{rrkdh}{tcy}$, dans la détermination de l'heure. Ainsi l'erreur de la hauteur est à celle de l'heure comme tcy est à rrk , ou en supposant c & y constantes, comme t est à k : c'est-à-dire, que l'erreur de l'heure sera d'autant plus petite, que la hauteur sera plus grande, & l'heure plus près de 6 heures; puisqu'alors le cosinus k de la hauteur, sera plus petit, & le sinus t de l'heure plus grand. Par conséquent, on doit préférer les astres qui sont auprès du cercle de 6 heures, & ceux qui sont plus élevés; d'autant plus que ceux-ci sont moins exposés à l'erreur de la réfraction.

II. Pour trouver le *minimum* de cette valeur $\frac{rrkdh}{tcy}$,

j'en prens la différence, en supposant dH , c & y constantes; & l'égalant à l'infini, je trouve $r=u$, ou $t=0$; c'est-à-dire, que la plus grande erreur dans l'heure, est lorsque l'astre est au méridien; ce que l'on sçait d'ailleurs. Mais si on égale cette différence à zéro, on trouve $tdk = kdt$, ou $\frac{t}{k} = \frac{dt}{dk}$. Substituons à cette raison, la valeur tirée de la premiere formule de M. de Maupertuis, $\pm rrdh = cydu$, ou $\pm rrukdk = -cythdt$, ou $\frac{dr}{dk} = \pm \frac{rruk}{cyth}$; ce qui donne $cyth = \pm rruk$, ou $kr\sqrt{u} = t\sqrt{hcy}$, lorsque l'astre est au-dessus du point B , ou entre 6 heures & midi, conformément à la note du problème I. de l'Astronomie Nautique. Mais lorsqu'il est au-dessous, la valeur de k est imaginaire. Ce qui fait voir qu'il faut chercher la moindre erreur dans les hauteurs qui sont entre midi & 6 heures, & non pas au-dessous. Et on

effet, si k étoit $= 0$, l'erreur $\frac{rrkdH}{tcy}$ ne seroit pas $= 0$, parce que t seroit $= 0$. Substituons dans cette formule la valeur de $k = \frac{t}{r} \sqrt{\frac{hcy}{u}}$, nous aurons le moindre $dE = r dH \sqrt{\frac{h}{cyu}}$. Ce qui fait voir qu'entre midi & 6 heures, on doit préférer la moindre hauteur & la moindre distance à midi.

L'équation $k = \frac{t}{r} \sqrt{\frac{hcy}{u}}$, donne $urr(rr-hh) = tthcy$, & $h = -\frac{tscy}{2urr} + \sqrt{rr + \frac{t^4ccyy}{4uur^4}}$. Si $t = r$, ou $u = 0$, l'astre étant au cercle de 6 heures, la quantité rr disparaîtra, & l'on aura $h = 0$. Donc $dE (= r dH \sqrt{\frac{h}{cyu}})$ seroit alors $= r dH \sqrt{0}$ ou $= \sqrt{-\frac{rr}{2} + \frac{rr}{2}}$. Quelle est la valeur de cette fraction 0 ? M. le Marquis de l'Hôpital prescrit (Article 163, des infiniment petits) d'en différencier le numérateur & le dénominateur; ce qui donne encore ici 0 : & M. Jean Bernoulli veut qu'on prenne une 2^e 3^e 4^e , &c. différence des deux termes, jusqu'à ce que la fraction 0 disparoisse. Mais cela ne suffit pas dans le cas présent, puisque quand même on prendroit une infinité de différences, on trouvera toujours 0 , ce qui vient des incommensurables. Il faut donc en délivrer cette fraction, & faire $dE^2 = \frac{rrhdH^2}{cyu}$, & différenciant les deux termes, on aura $\frac{dH^2 rrdh}{cydu}$; & par la substitution de $\frac{dh}{du} = \frac{cy}{rr}$, on aura $dE = dH$, lorsque h & $u = 0$: ce qui se démontre comme la méthode de M. le Marquis de l'Hôpital, en faisant $AB = rr$, $AP = tt$, $PN = h$, $PO = cyu$, & $PM = \frac{rrh}{cyu}$. Cela peut aussi servir à perfectionner la méthode de M. Bernoulli.

III. Dans ce moindre $rdH\sqrt{\frac{h}{cy}}$, il y a encore un moindre, qui est le *minimum minimorum*. On le trouve en égalant à zéro la différence de cette expression; ce qui donne $\frac{dh}{du} = \frac{h}{u}$; & en substituant la valeur $\frac{cy}{rr}$ de $\frac{dh}{du}$, on aura $h = \frac{ucy}{rr}$. Donc le *minimum* est $= dH$; ce qui fait voir que la moindre erreur possible, est égale à celle de la hauteur, & cette erreur est dans le cas de $h = \frac{ucy}{rr}$.

Si l'on substitue dans la première formule $\frac{rrkdH}{cyl}$, la valeur de $yl = mk$, tirée de la 5^e de M. de Maupertuis, on aura $\frac{rrdH}{cm}$, & l'on verra clairement que l'erreur de l'heure ne peut pas être moindre que celle de la hauteur, puisque le carré rr ne peut pas être plus petit que le rectangle cm : mais comme ce carré peut devenir infiniment plus grand que cm , l'erreur de l'heure peut devenir infinie, par rapport à celle de la hauteur, & c'est lorsque c ou $m = 0$; mais cela ne doit s'entendre que dans le cas des deux erreurs infiniment petites: car si l'on supposoit celle de la hauteur finie, on ne pourroit pas conclure que l'erreur de l'heure fût infinie. Comme dans le cercle dont les appliquées sont k , & les coupées depuis le centre, sont h , l'équation étant $rr - hh = kk$, on trouve bien que $dH:dh::r:k$, & que dans le cas de $k = 0$, dH est infini par rapport à dh ; parce qu'alors k devient $= r$, & $dh = 0$; mais on ne peut pas dire que dh devenant une quantité finie, dH soit réellement infinie lorsque $k = 0$.

On voit ici qu'on doit préférer les astres les plus près du premier vertical, dans lequel $m = r$; l'erreur dE étant alors $= \frac{r}{c} dH$. Si c étoit encore $= r$, ou le pôle dans

l'horifon, l'erreur dE feroit $= dH$. En général l'erreur de l'heure $\frac{rrdH}{cm}$ est à celle de la hauteur, en raison composée inverse du cosinus de la hauteur polaire, & du sinus de l'angle azymuthal.

Si dans la valeur trouvée de $h = \frac{ucy}{rr}$, on fait $c = r$, & $y = r$; c'est-à-dire, si l'astre est dans l'équateur, & le pôle dans l'horifon, on aura $dE = dH$; & si l'on avoit substitué ces deux valeurs $y = r$, & $c = r$, dans la premiere formule $\frac{krrdH}{cyr}$, on auroit trouvé $dE = \frac{k dH}{r}$; ce qui revient au même, parce que dans ce cas, $k = r$, ou $u = h$.

IV. Si l'on se trompe seulement dans la hauteur du pôle, soit dS cette erreur, nous aurons $r : c :: dS : ds = \frac{cds}{r}$. La premiere formule de M. de Maupertuis nous donnera $\mp rxdx = cydu + u ydc$, ou $\mp r c x ds + u y ds = ccydu$, & $du = \frac{uys \mp r c x}{cyr} dS$, & la proportion $r : r :: du : dE$ donne $dE = \frac{uys \mp r c x}{cyr} dS$.

On voit d'abord que $dE = 0$, lorsque $uys = \mp r c x$. Si l'astre est dans l'équateur, on a $x = 0$, $y = r$. Donc alors $dE = \frac{us}{cr} dS$, qui seroit $= 0$: si u ou S étoient $= 0$, c'est-à-dire, si le pôle étoit à l'horifon, ou l'astre au Cercle de 6 heures. Et en effet, dans la sphere droite, l'heure ne peut pas varier sans que la hauteur de l'astre varie, & dans la sphere oblique, l'astre est toujours dans le cercle de 6 heures, s'il est dans l'équateur.

Si $u = 0$, ou $r = r$, dE fera $= \mp \frac{x}{y} dS$; & si de plus $x = y$, dE fera $= dS$. Il vaut donc mieux observer les astres qui sont près du cercle de 6 heures, & dont la déclinaison est très-petite.

Il est inutile de chercher le *minimum* de cette formule;

puisque dE peut devenir $= 0$, & c'est lorsque $uys =$

$$\pm rcs, \text{ ou } x = \frac{urs}{\sqrt{r^4 - ssit}}.$$

V. Pour trouver de même dans quelle rencontre l'erreur de l'azymuth (dM) influe moins sur l'heure, nous

avons $r : n :: dM : dm = \frac{n.dM}{r}$. La premiere formule de

M. de Maupertuis donne $dh = \frac{\pm cydu}{rr}$; & la deuxieme, dh

$$= \pm \frac{ckmdm}{nkrs \pm nch}. \text{ Donc } \pm kkmrrdm = (\pm nkyrs \pm nncyh)$$

$$du, \text{ ou } du = \frac{\pm kkmrr}{\pm nkyrs \pm nncyh} du = (\text{en substituant } yt = mk)$$

$$\pm rrk t \pm nkrs \pm nch} dm = \frac{\pm rke}{\pm krs \pm nch} dM. \text{ Mais } t : r :: du : dE$$

$$= \frac{\pm rrk}{\pm krs \pm chn} dM.$$

On voit d'abord que l'erreur est moindre, lorsque les astres sont au-dessus du point B , puisque dans ce cas le dénominateur est $krs + chn$.

Si $s = r$, on a $dE = dM$, lorsque le pole est au zénith.

En prenant la différentielle de cette formule, & si on l'égalé à zéro dans le cas de l'astre au-dessus du point B , en faisant seulement k, h & n variables, on trouvera $(hhn + kkn)$

$$dk = h h k dn, \text{ ou } dk = \frac{h h k}{r s n} dn = (\text{par la deuxieme formule}$$

$$\text{de M. de Maupertuis}) \frac{-ckhdn}{krs + chn}. \text{ Donc } k = \frac{-chhn - crrn}{rsh}.$$

Donc en substituant cette valeur de k dans la formule dE

$$= \frac{-rrk}{krs + chn} dM, \text{ on aura le moindre requis, } \frac{rr + hh}{-rs} dM.$$

Ce qui fait voir que l'erreur est moindre, lorsque la hauteur de l'astre est fort petite au-dessus du point B , & lorsque le pole est fort élevé au-dessus de l'horison. Le moindre

$$\text{au-dessous de } B \text{ est } \frac{r^2 - rhh}{2shh - srr} dM. \text{ Si l'on substitue à la}$$

$$\text{place de } h, \text{ sa valeur } \frac{cyu + r s x}{rr}, \text{ tirée de la premiere formule}$$

de

MANIERE DE TROUVER L'HEURE EN MER. 201
de M. de Maupertuis, on verra que l'erreur est moindre
du côté du cercle de 6 heures, où $u = 0$, dans les astres
qui sont au-dessus de B , ou plutôt dans ceux qui répon-
dent au point B .

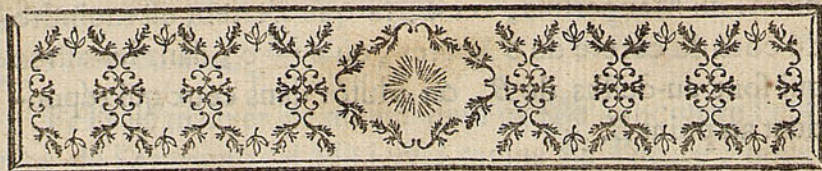
CONCLUSION.

La meilleure maniere de trouver l'heure en mer par
observation, pendant la nuit, est d'observer le passage de
deux étoiles par le même azymuth, parce que cette ob-
servation est très-aisée, & qu'elle n'est pas exposée aux
erreurs de la réfraction, de la variation de la bouffole, &
de la suspension des instrumens à plomb. Un fil à plomb
suffit, lorsque deux étoiles sont dans le même vertical.

La meilleure maniere pendant le jour, est de prendre
deux hauteurs du Soleil, & d'observer la différence des
tems & des azymuths; parce que cette observation est in-
dépendante de la latitude, & que la différence des tems
corrige la différence des azymuths, & au contraire.

On peut aussi se servir de l'heure du lever ou du cou-
cher du Soleil, ayant égard à la réfraction; & il est inu-
tile de répéter ici ce que l'on trouve ailleurs. On peut
encore employer le Problème XXX de M. de Mauper-
tuis, qui est indépendant de la hauteur du pôle & de la
réfraction.





A D D I T I O N S E T C O R R E C T I O N S

Faites à la Piece cottée N° IV, & qui a pour
Sentence & Devise :

Nihil unquam invenietur , si contenti fuerimus inventis.

Sen. Ep. 64

L'ARTICLE second de la premiere Partie, doit être changé en cette maniere.

II. Ce que l'on vient de dire, prouve qu'on peut aujourd'hui observer la hauteur des étoiles sur un navire, beaucoup plus exactement qu'on ne le pouvoit avant l'invention des Octans à miroir. Mais la plus grande difficulté, qui est la suspension des instrumens à plomb, subsiste encore, & il est question de la vaincre, ou au moins de la diminuer autant qu'il sera possible. C'est même le principal objet que nous devons nous proposer, pour suivre les vûes de l'Académie Royale des Sciences.

M. Bouguer a fait sur cette matiere une remarque importante, qui mérite toute notre attention: on la trouve dans le Chap. III^e de sa Méthode d'observer sur mer la hauteur des astres. « Représentons-nous, dit-il, un pendule, un poids suspendu à l'extrémité d'un fil, ce pendule demeurera exactement vertical, tant que le navire » cinglera avec un mouvement parfaitement uniforme;

Fig. 2.

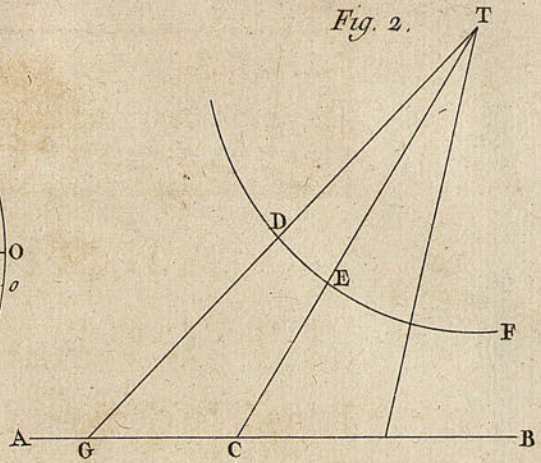


Fig. 4

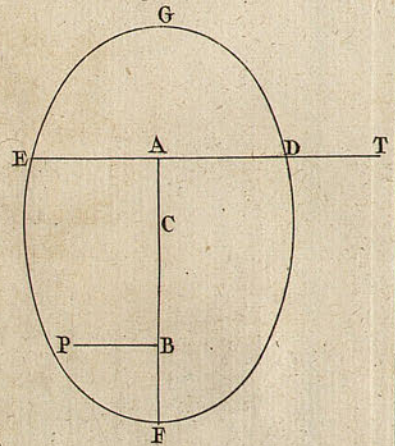


Fig. 3.

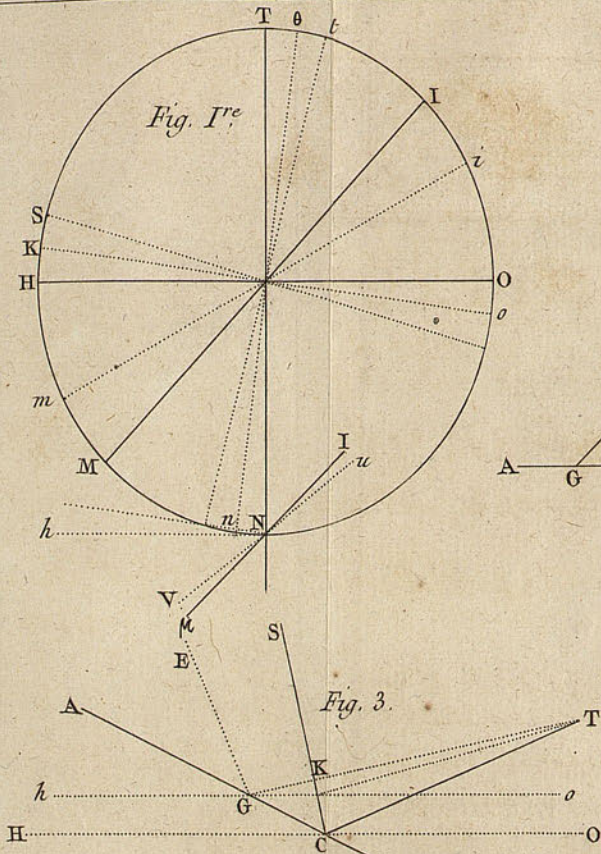
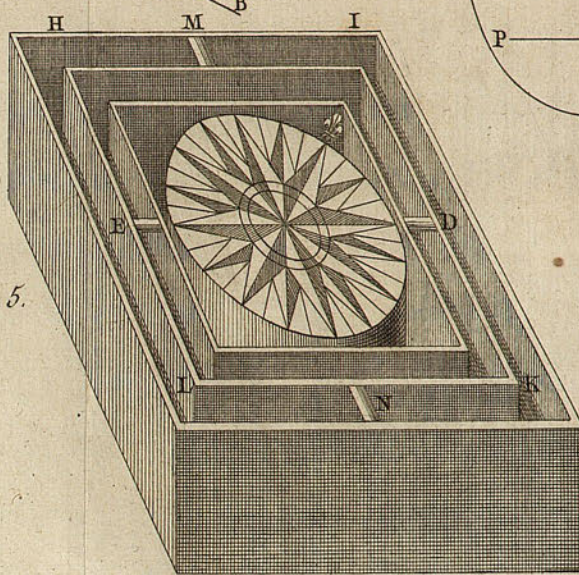


Fig. 5.



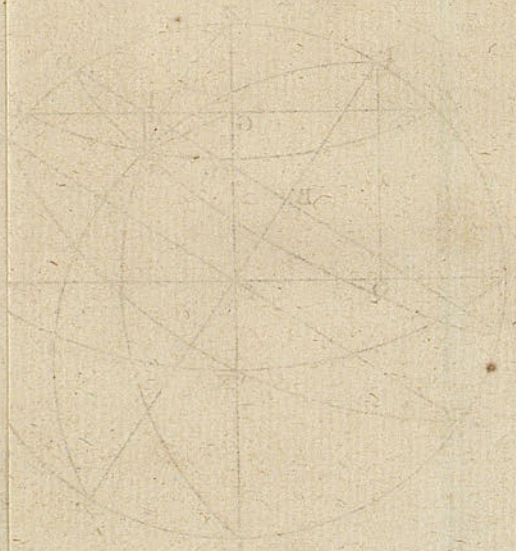
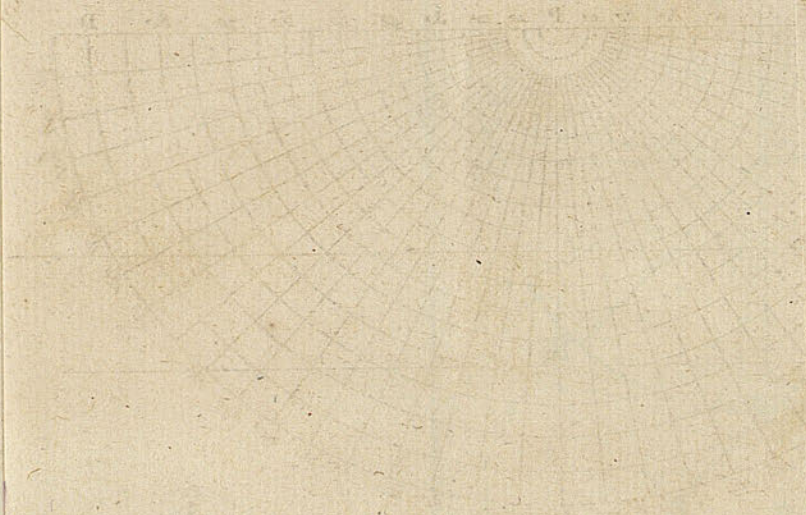


Fig. 7.

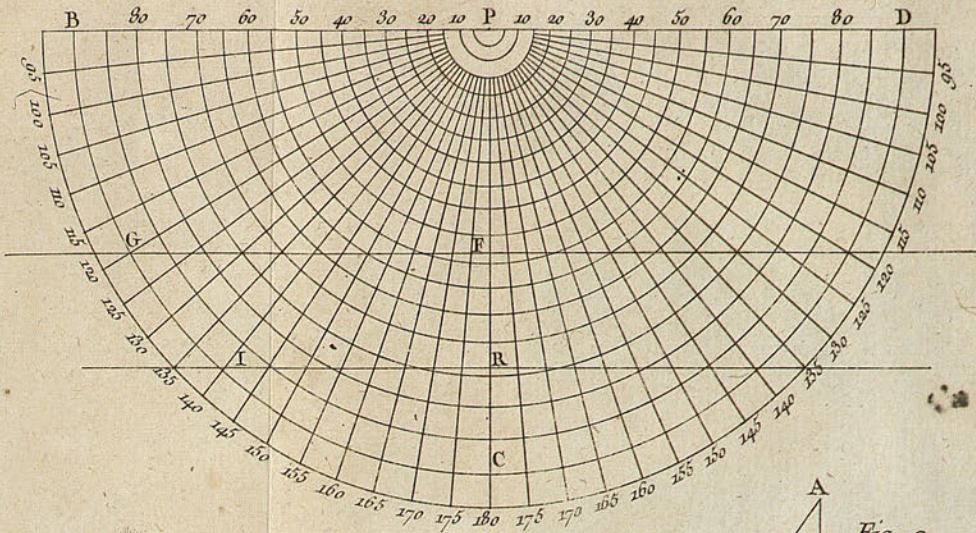


Fig. 6.

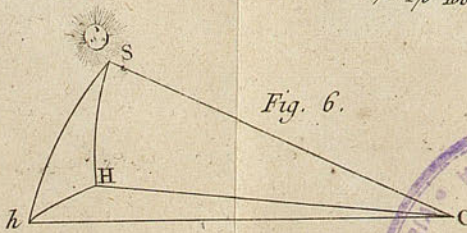


Fig. 9.

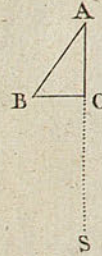


Fig. 8.

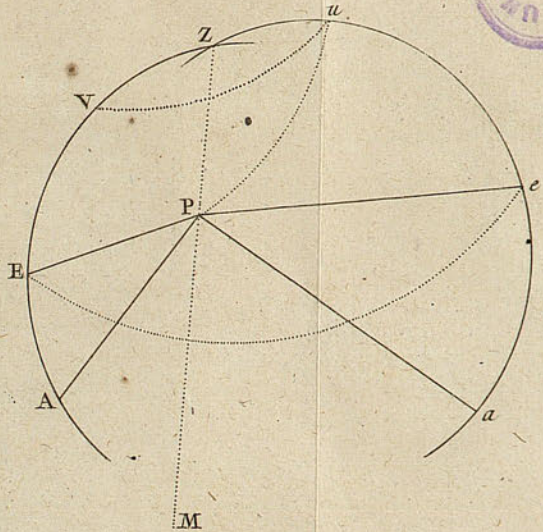
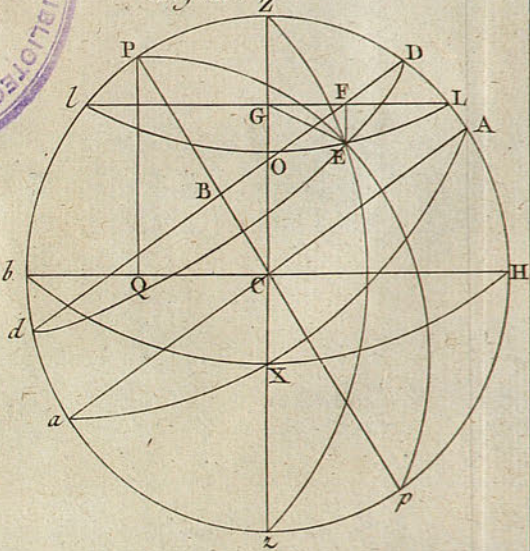


Fig. 10.



» mais il commencera à faire des vibrations, aussi-tôt que
 » la vitesse du sillage souffrira quelque changement ; par-
 » ce que le mouvement du poids ne s'accordera pas avec
 » le mouvement du point de suspension. Si une vague,
 » par exemple, en choquant la proue, fait diminuer tout
 » à coup la vitesse du navire d'une certaine quantité, le
 » poids ira ensuite plus vite que le point de suspension de
 » cette même quantité ; & ainsi il avancera vers l'avant ,
 » en décrivant un arc-de-cercle par rapport au navire ,
 » jusqu'à ce qu'il ait perdu en montant toute sa vitesse re-
 » lative : mais lorsqu'il l'aura perdue , il retournera en ar-
 » riere par sa pesanteur ; il fera donc plusieurs vibrations
 » de part & d'autre ; & comme l'agitation de la mer est
 » continuelle , ces vibrations ne cesseront presque jamais.
 » Or la même chose doit arriver aussi aux instrumens pro-
 » pres à prendre hauteur ; car ce ne sont que des especes
 » de pendules , malgré tous les ressorts & tous les genoux
 » auxquels ils sont attachés. »

D'un autre côté, M. Hughens ayant proposé dans son
 excellent traité, *De Horolog. Oscillat.* de suspendre son
 horloge de la même maniere que l'on suspend les bouffo-
 les, en y ajoûtant un poids de 50 livres, conclut en cette
 maniere : *Quibus ita se habentibus, quâcumque navis incli-*
natione perpendicularare positum servat horologium..... Porro
axium crassitudo quæ pollicem æquat, gravitasque plumbi in-
ferius appensi, nimiam movendi libertatem horologio adimunt,
faciuntque ut, si fortè succussu navis graviore commotum fue-
rit, continuò ad quietem perpendicularumque suum revertatur.

Ces deux sentimens, qui paroissent opposés, doivent
 nous tenir en suspend ; jusqu'à ce que nous ayons bien
 examiné la nature du mouvement d'un Astrolabe, tel que
EMOMD, dont le centre de gravité & de grandeur est Fig. IV. n° 2.
 au point *A*, & que je suppose suspendu comme une

204 MANIERE DE TROUVER L'HEURE EN MER.
boussole, ou comme l'horloge de M. Hughens.

Cet astrolabe étant en repos, ou, ce qui revient au même, *demeurant exactement vertical, tant que le navire se meut d'un mouvement parfaitement uniforme*; je suppose d'abord que la vitesse du fillage venant à augmenter, le point *C* de suspension reçoive une nouvelle impression, selon une direction quelconque, parallele au plan de l'instrument (nous parlerons dans la suite, de la direction oblique, ou perpendiculaire au même plan). On pourra toujours décomposer cette direction parallele en deux autres; l'une *CA*, verticale, & l'autre *CE*, horisontale. La direction verticale ne produira aucun balancement, & il ne restera que la direction horisontale, qui fera effort pour mouvoir toutes les parties *M* de l'Astrolabe, autour d'un centre fixe *B*, que l'on appelle, *centre de rotation*; tandis que la pesanteur réunie au centre de gravité *A*, fera effort pour mouvoir l'Astrolabe autour du point ou de l'axe de suspension *C*.

Pour déterminer exactement le centre de rotation *B*; il faut supposer l'Astrolabe sans pesanteur, ou qu'il se meuve sur un plan horisontal infiniment poli, & sans frottement, parce que ce mouvement de rotation n'est produit que par la seule inertie des particules *M*, & qu'il est indépendant de leur pesanteur. Si de chaque point *M* de l'Astrolabe, on mene au centre *B* une ligne *MB*, on voit que le point *B* étant immobile, toutes les forces d'inertie *M* doivent être en équilibre avec la puissance appliquée en *C*. Supposons donc que le point *C* soit porté en *c* autour de *B*, les particules *M* seront portées en *m* sur les directions *Mm*, perpendiculaires à *BM*, & les petites lignes *Mm* seront proportionnelles aux rayons *BM*, *BM*, &c. Les forces de ces particules sont en raison composée de leurs masses, & de leurs vitesses initiales, ou de *M. BM*;

& il résulte de ces forces qui résistent au mouvement de rotation, une impression (B), qui pousse le centre B perpendiculairement à CB . Cette impression B est dirigée du même côté où tend la force C , selon la direction BP , perpendiculaire à CB .

Prolongeons chaque Mm en H , & abaissons CH perpendiculaire à MH . Nous avons donc un levier coudé HCB , dont le point d'appui est C , & le moment de la force d'inertie $M.BM$, appliqué en H , sera $= M.BM.CH$; ce qui donne pour l'équilibre, $B.CB = M.BM.CH$. Mais abaissons MF perpendiculaire à CB , nous avons (à cause des triangles semblables CHG , FBM , GBM), $CH:CG::BF:BM::BM:GB$. Donc $CG.BF = CH.BM$; & $\overline{BM}^2 = BF.GB$. Donc en substituant ces valeurs, on aura : $B.CB = M.CG.BF =$ (à cause de $CG = CB - GB$) $M.BF.CB - M.BF.GB = M.BF.CB - M.\overline{BM}^2$; & $B = M.BF - \frac{M.\overline{BM}^2}{CB}$. Donc $\int.B = \int.M.$

$BF - \int \frac{M.\overline{BM}^2}{CB}$; Mais $\int.B = 0$, parce que toutes les impressions faites sur le point B , doivent être les unes positives, & les autres négatives, pour conserver ensemble un équilibre qui rende le point B immobile au commencement du mouvement. Donc $\int.M.FB = \int \frac{M.\overline{BM}^2}{CB}$.

Soit A la somme de toutes les particules qui composent l'Astrolabe, on aura par la nature du centre de gravité, ou plutôt du centre de masse, $\int.M.BF = A.BA = \int \frac{M.\overline{BM}^2}{CB}$, & $CB = \frac{\int.M.\overline{BM}^2}{A.BA}$. Donc la distance CB est égale à celle d'un pendule composé, suspendu au point B , & dont le centre d'oscillation seroit en C . Car telle est la propriété du centre d'oscillation, comme l'a démontré

M. Hugheus, pag. 100, de son livre *De Horolog. Oscillat.* Et l'on sçait par les démonstrations du même Auteur, que l'on peut prendre le centre de suspension pour centre d'oscillation, auquel cas C deviendra centre de suspension.

La vitesse du centre de gravité A , est à celle du point C comme BA est à BC . Le point c se trouvant toujours dans la ligne CE , par l'hypothese, le centre de rotation B , décrira la cycloïde ordinaire, comme l'a démontré M. Clairaut, dans les Mémoires de 1736. Le cercle générateur aura pour rayon CB , & son centre roulant sur CE , le point B fera le point décrivant du côté de P . La ligne CB fera la tangente initiale de cette cycloïde.

Si l'on prend l'Astrolabe pour un cercle homogène, on aura, selon la regle d'Hugheus, pag. 128, *De Horol. Oscillat.* $CA : AO :: AO : 2AB$. Donc $AB = \frac{AO^2}{2CA}$. Donc la distance AB , croît en raison composée de la raison directe doublée du rayon AO , & de la raison simple inverse de la distance CA . Donc plus le point C de suspension de l'instrument sera proche de son centre de gravité A , moins il sera exposé à tourner autour de B , ce point étant éloigné à proportion; en sorte que si $CA = 0$, on auroit $AB = \infty$. De même, plus le quarré du rayon AO sera grand, ou plus l'aire du cercle sera grande, moins l'Astrolabe sera exposé à tourner autour de B .

On ne peut pas anéantir la distance CA ; parce que si l'Astrolabe étoit suspendu par son centre de gravité A , on ne feroit jamais assuré que le point O , par où commence la division, fût dans la verticale AB , & qu'ainsi l'astrolabe feroit inutile à l'observation de la hauteur des astres.

Si le point C étoit seulement une ou deux lignes au-dessus du centre de gravité A , on feroit presque dans la

même incertitude. Il faut donc s'attacher principalement à augmenter le rayon AO autant qu'il sera possible; ce qui fournira trois avantages: car si le rayon AO est 10 fois plus grand, les degrés de l'instrument seront 10 fois plus sensibles; le point B fera 100 fois plus éloigné, & la pesanteur de l'Astrolabe 100 fois plus grande. On doit même tâcher d'augmenter considérablement la pesanteur absolue de l'instrument, parce qu'elle résiste beaucoup à ce mouvement de rotation autour du point B , & qu'elle peut même l'anéantir.

En effet, dans le calcul précédent, on n'a pas considéré la pesanteur des particules M de l'Astrolabe, mais seulement leur inertie. Cette pesanteur sera cause que le centre B restera moins en arriere, & qu'il sera repoussé vers P , sur la ligne horisontale BP . Soit A le poids de l'instrument, réuni au centre de gravité A . Soit C la force qui pousse le point C , & lui fait parcourir Cc . Ayant décrit du centre B les petits arcs Cd , Ae , on verra que la puissance C fait effort pour élever le poids A de la hauteur cd , & que le poids A fait effort pour descendre de la hauteur ae . Or, $cd : ae :: CB : AB$; donc le moment de la force $C = C \cdot cd$ étant égal à celui du poids A , dans l'état d'équilibre de ces deux forces, nous aurons $C \cdot cd$

$$= A \cdot ae, \text{ \& } C : A :: AB : CB; \text{ ou } C = \frac{A \cdot AB}{CB}.$$

Mais par la regle d'Hughens, pag. 124, *De Horol. Oscillat. Si magnitudo eadem nunc brevius, nunc longius suspensa agitetur; erunt sicut distantiae axium oscillationis à centro gravitatis; ita contrariâ ratione distantiae centrorum oscillationis ab eodem gravitatis centro.* C'est-à-dire, que dans le pendule

$$CB, \text{ la quantité } C \cdot A \cdot AB \text{ est constante, ou } AB = \frac{aa}{CA},$$

prenant a pour une constante, & $C = \frac{A \cdot aa}{CA \cdot CB} = \frac{A \cdot aa}{aa + CA}.$

Cette force C ne peut pas être infinie, car il faudroit pour cela que $aa + \overline{CA}^2 = 0$, ou $CA = a\sqrt{-1}$. De plus, C ne peut pas être plus grand que A dans l'état d'équilibre. Car soit $C = nA$, prenant n pour un nombre entier, on aura $n(aa + \overline{CA}^2) = aa$; & $aa(n-1) = -n(\overline{CA}^2)$.

Soit $n = 2$; donc $aa = -2\overline{CA}^2$, racine imaginaire. Il faut donc chercher un point C de suspension, tel que le moment $C.CB$ soit le plus petit de tous, en supposant C & A constantes. Pour cela, j'égalé à zéro la différentielle $dCA + dAB$, ce qui donne $dCA = -dAB$, & prenant la différentielle de l'équation $CA.AB = aa$, j'ai $CA.dAB = -AB.dCA$; & en substituant, il vient $CA = AB$. Le plus petit moment $C.CB$, est donc $2CA$, ce qui donne AB ou $AC = \frac{AO^2}{2AB}$. Et faisant $AO = 1$,

j'ai AC ou $AB = \sqrt{\frac{1}{2}}$. La longueur du pendule CB , est $= \sqrt{2}$. Si l'on faisoit AB plus petit, par exemple, $\frac{1}{2}CA$, on auroit $\overline{CA}^2 = 1$; & le pendule CB seroit $= \frac{3}{2} > \sqrt{2}$. Si l'on faisoit AB plus grand, par exemple, $= 2CA$, on auroit $CA = \frac{1}{2}$, & le pendule $CB = \frac{3}{2}$. Ainsi la longueur $= \sqrt{2}$, est celle du pendule brachystochrone, c'est-à-dire, de celui dont les vibrations sont les plus promptes. Donc le moment trouvé $C\sqrt{2} = A\sqrt{\frac{1}{2}}$, est un moindre.

Ce point de suspension C étant ainsi déterminé, il suit que dans l'équilibre $C : A :: \sqrt{\frac{1}{2}} : \sqrt{2} :: 1 : 2$, & que si le poids A de l'Astrolabe est $= 2C$, il n'y aura point de rotation autour de B , en supposant cette suspension; au lieu qu'en la faisant varier, on ne trouve l'équilibre que lorsque $CA = 0$.

Si le poids A étoit $> 2C$, la force C ne pourroit pas l'entraîner, & il n'y auroit point de mouvement de rotation.

rotation. Il faut donc que le poids de l'Astrolabe soit aussi grand qu'il est possible, pour approcher du double de la force C , sans craindre de la surpasser.

Si le poids A est $< 2C$, le centre de rotation B subsistera, & il décrira la courbe déterminée par M. Clairaut, dans les Mémoires de 1736 (Probl. 5, p. 17.) dont l'équation est $\frac{dy}{\sqrt{1-yy}} = \frac{dz}{m} \sqrt{2gy + 2pmm}$, en faisant le sinus total $= 1 = CB$; le sinus de l'angle variable, formé par BC , avec $EC = y$; les constantes $Cc = dz$; la vitesse constante du point $C = m$, la pesanteur $= g$, & p une autre constante. Le premier membre est l'expression de l'angle formé par BC avec bc , ou des deux positions consécutives de cette ligne. Si l'on fait $g = 0$, on trouve que ces angles sont proportionnels aux parties Cc , & que par conséquent cette courbe est une cycloïde. Si dans quelques cas il arrivoit que $\frac{dy}{\sqrt{1-yy}} = 0$, c'est-à-dire, que deux positions consécutives de CB , cb fussent exactement parallèles, par exemple, lorsque $y = a$, on auroit la constante $p = -\frac{ga}{mm}$, & l'équation deviendrait $\frac{dy}{\sqrt{1-yy}} = \frac{dz}{m} \sqrt{2g(y-a)}$, ou $\frac{dy}{\sqrt{1-y.1+y.y-a}} = \frac{dz}{m} \sqrt{2g}$. Le sinus a ne peut pas être $= 1$, ou sinus total, ce qui rendroit le premier membre $= \frac{dy}{(1-y)\sqrt{-1-y}}$ imaginaire. Ainsi le point B ne peut pas décrire une ligne droite parallèle à CE . L'angle $\frac{dy}{\sqrt{1-yy}}$ est proportionnel à $\sqrt{y-a}$. Donc y ne peut pas être $= 0$, & cet angle ne disparoit que lorsque $y = a$; c'est le *minimum* de l'ordonnée y de cette courbe. C'est dans ce point seul que la vitesse horisontale de B est égale à celle de C ; & comme dans ce cas la ligne cb est

oblique à l'horizontale EC , la vitesse de B s'accélère par la pesanteur, & le sinus y devient plus grand. Il faudroit donc arrêter promptement cette accélération, ou la diminuer, en sorte qu'elle devint insensible. C'est ce que fait M. Hughsens, par la grandeur du poids, & par le frottement de l'essieu.

Fig. VI. n° 2.

On fixera donc l'Astrolabe MO par son centre, sur un essieu dont on ne voit qu'une partie AE , dans la Fig. VI n° 2, & qui est vû tout entier dans la Fig. VI n° 3. Le point de suspension est cependant en C , à la distance requise du centre de gravité, à cause des coudes E & R de l'essieu. Le plan de cet Astrolabe est perpendiculaire à l'essieu, ou parallele au côté DAP du chassis qui le soutient. Ce chassis est encore suspendu par deux pivots F & G , en sorte qu'il tourne librement sur le pied de fer ou de bois $FHKG$, lequel doit être fixé sur le plancher du navire, afin qu'il n'ait d'autre mouvement que celui du navire.

L'un des plus grands avantages de cette suspension, est que l'Astrolabe ne peut avoir par ce moyen que deux mouvemens circulaires, l'un autour de l'axe AB , & l'autre autour de l'axe FG . Mais l'axe AB étant mobile autour de l'axe fixe FG , le mouvement circulaire, ou la main de l'Observateur, fait nécessairement une impression sur cet axe AB , & le force à tourner en très-peu de tems autour de l'axe FG . De-là vient que dans les bouffoles, où les pinnules sont toujours placées dans la direction del'axe AB , on voit toujours l'astre à fort peu près dans le même azymuth, & c'est même là le plus grand avantage de la suspension des bouffoles. En effet, le mouvement autour de l'axe FG , quelque grand qu'il soit, n'empêche pas que les pinnules placées dans l'axe AB , ne soient toujours dans le même azymuth, & que par conséquent l'observation

De l'azymuth, ou du rumb de vent ne soit exacte. Il est vrai que le Soleil étant à l'horison, lorsqu'on observe la variation de l'aiguille aimantée, le mouvement de la boussole autour de l'axe AB , ne peut pas faire un écart sensible; au lieu que dans les grandes hauteurs des astres, il faut être bien attentif à détruire tout le mouvement de la boussole autour de AB , pour ne pas se tromper dans le vrai azymuth.

On voit par expérience, que l'astrolabe roulant autour de l'axe FG , ne roule plus autour de l'axe AB , quoique ces deux mouvemens ne soient pas contraires, leurs directions étant perpendiculaires l'une à l'autre. Mais on doit attribuer cet effet principalement au poids de l'instrument, & aux frottemens de l'essieu AB , qui détruisent assez promptement les vibrations de cette espece de pendule.

Il est donc à propos d'augmenter autant qu'il est possible le frottement de l'essieu AB , pour faire cesser promptement ses vibrations. Le meilleur moyen pour cela, est, ce me semble, de le suspendre par une ou plusieurs cordes, qui fassent sur cet essieu, un ou plusieurs tours, & qui soient fixées aux deux côtés opposés FD , GP du chassis. La pression de ces cordes détruira à chaque instant une grande partie de la vibration de l'Astrolabe. Et M. Varignon ayant démontré dans les Mémoires de 1717, que les pressions des cordes sont en raison composée des raisons directes des forces comprimantes, & des longueurs des arcs comprimés, & de la raison inverse des diametres de ces arcs; il suit que plus le poids sera grand, plus la pression sera forte; & que le poids restant le même, le frottement sera proportionnel au nombre des tours de la corde sur le même essieu. On peut donc par ce moyen augmenter le frottement de l'essieu tant qu'on voudra,

212 MANIERE DE TROUVER L'HEURE EN MER:
& diminuer le nombre des vibrations du pendule.

M. Hughs, dans la description de son Niveau à plomb, a employé l'huile pour arrêter les vibrations du pendule. Il me paroît que la pression d'une corde aura plus de force que cette résistance. Si la corde vient à se secher, elle ne fera pas assez tendue pour arrêter le mouvement du pendule : le remede est facile ; on n'a qu'à la mouiller pour la roidir.

Si l'on vouloit éviter les inconvéniens qui peuvent résulter de la multiplicité des tours d'une corde autour de l'essieu, on pourroit fixer à cet essieu une roue assez épaisse, pour recevoir dans toute sa circonférence, une entaille large & profonde, garnie de pointes de fer courtes & fortes, toutes perpendiculaires à la circonférence. La corde embrasseroit cette entaille hérissée de pointes, & seroit fixée, comme auparavant, aux côtés *FD*, *GP* du chaffis.

On voit bien que la pression du poids fera enfoncer les pointes de fer dans les parties inférieures de la corde, & que chaque pointe enfoncée diminuera le mouvement de vibration, en se dégageant difficilement. On pourroit même fortifier l'engrènement des pointes de fer dans la corde, de maniere que le poids ne pourroit pas vaincre le frottement : mais il n'est pas difficile d'éviter cet inconvénient. Cette idée est semblable à celle de M. Bernoulli, dans son *Mémoire sur le Cabestan*, & à celle de M. Hughs, dans son *Horolog. Oscillat. p. 4, Fig. I*, où l'on voit cette roulette représentée par les lettres *DD*.

Les Ouvriers, comme le remarque M. Bernoulli, voulant ménager les cordes, qui souffrent beaucoup par cet engrènement, ont abandonné cette roulette, & y ont substitué une entaille qui va en se rétrécissant vers le centre, afin que quand la corde y est une fois admise, elle y

soit comprimée, en sorte qu'elle ne glisse pas aisément sur la circonférence inférieure. On peut même, pour augmenter le frottement, rendre les deux côtés de l'entaille raboteux, à peu près comme les surfaces des limes.

Pour trouver dans ce cas les rapports du frottement, soit BH le diamètre du trou dans lequel l'essieu BG peut Fig. VI. n° 42.rouler, pour faire tourner la ligne inflexible BC , à laquelle on suppose un poids P attaché. Cette ligne étant fixée à l'essieu, peut représenter l'Astrolabe. Soit B le point d'attouchement de l'essieu contre le cercle BH ; transportons le poids P en B par cette analogie, $B : P ::$

$PC : BC$, ou la force $B = \frac{P \cdot PC}{BC}$, & menons la tangente FBA , le mouvement de cette tangente peut représenter celui de l'anneau BH autour de l'essieu. Supposons donc que le plan incliné FBA se meuve autour du point B ; menons l'horizontale AD , & la verticale FD , le poids P réuni en B , ne s'écartera pas du point B , tant que le frottement sera supérieur à la pression en B , & à la force qui agit selon BA . Soit le sinus total $FA = 1$, le sinus FD de l'angle $FAD = s$, $PC = a$, $BC = r$, rayon de l'essieu. Prenons la verticale EB pour représenter le poids B , & abaissons EK perpendiculaire à BC ; nous aurons $EB : BK ::$ comme le poids B est à sa pression, comme FA , 1 est à $DA, \sqrt{1 - ss}$. Donc la pression en $B = B \sqrt{1 - ss}$.

Soit le rapport de la pression au frottement, comme 1 est à f , qui est, selon les expériences de M. Amontons, comme 3 est à 1. Nous aurons le frottement en $B = f B \sqrt{1 - ss}$. L'effort du poids B , pour descendre le long du plan incliné FA , est au poids B comme FD , s est à FA , 1; cet effort est donc $= Bs$, ou $= \frac{aPs}{r}$, puisque B

$= \frac{P \cdot PC}{BC}$. Soit A la force qui agit selon la direction BA , en vertu de l'accélération acquise au point B ; cette force jointe à l'effort $\frac{aP}{r}$, doit être égale au frottement $fB\sqrt{1-ss}$ dans l'état d'équilibre. Donc $A = fB\sqrt{1-ss} - \frac{aP}{r} = \frac{aP}{r} (f\sqrt{1-ss} - s)$. Si l'on fait $s = \frac{f}{\sqrt{1+ff}}$, cette force dispa roît, & le poids B ou $\frac{aP}{r}$ se soutient par son seul frottement.

Si le rapport de la pression au frottement étoit constant, comme l'a cru M. Amontons, ou comme 3 à 1, f feroit une quantité constante $= \frac{1}{3}$, & l'on auroit $s = \frac{1}{\sqrt{10}}$, ce qui ne peut convenir qu'à certains cas, où le poids P est fort petit. La quantité f n'est donc pas constante, & il est très-vraisemblable que le frottement est en raison composée de la pression & de la surface pressée, la quantité f renferme donc l'étendue de la surface pressée. Soit x cette surface, & $f = nx$; le sinus de l'angle d'équilibre sera donc $s = \frac{nx}{\sqrt{1+nnxx}}$; & comme la surface B dans le cas présent, n'est presque qu'un point ou une ligne, en la prenant physiquement, il arrivera que le pendule ne fera qu'un angle très-petit avec la verticale dans le cas d'équilibre.

Si l'on veut connoître la force F , capable d'élever le poids B dans la direction BF , on trouvera qu'elle doit surmonter l'effort du poids B & son frottement. Donc $F = \frac{aP}{r} (f\sqrt{1-ss} + s)$, lorsqu'elle est sur le point d'enlever le poids B . Le *maximum* de cette quantité donne $s = \frac{1}{\sqrt{1+ff}}$, ou $= \frac{1}{\sqrt{1+nnxx}}$, & $F = \frac{aP}{r} \sqrt{1+nnxx}$.

Lorsque $x = 0$, $s = 1$, & $F : P :: PC : BC$, c'est en

effet le cas où la tangente FA est verticale, & où il faut un très-grand effort pour soutenir le pendule. Lorsque $s = 0$, la force F pour enlever le poids est $\frac{aPf}{r}$ plus petite que dans l'autre cas, f étant une fonction. Elle seroit nulle si le frottement étoit nul, ou si $nx = 0$.

De-là il suit que si la quantité f ou nx proportionnelle au frottement, étoit fort grande, il faudroit un très-grand effort F pour enlever le poids P , & qu'ainsi on doit augmenter le frottement autant qu'il est possible, pour empêcher les vibrations de l'Astrolabe. Les tours de corde, l'entaille, les pointes dont nous avons parlé, augmentent beaucoup nx .

Il semble que si $r = 0$, la force F seroit infinie; mais alors on auroit aussi $f = 0$, & ce cas est contraire à la supposition de la ligne FBA , tangente au cercle BG . Il est vrai que plus r est petit, plus F seroit grand, si f étoit constant; mais on doit remarquer que r diminuant, f diminue; au lieu que f ou nx peut diminuer sans rien changer à r . Ainsi la difficulté F augmente en raison composée du poids P , de la longueur PC , & de $nx \sqrt{1 - ss} + s$; ou en supposant $s = 0$, cette difficulté augmente, en raison composée du poids du levier PC , & du frottement nx .

Enfin, si l'on vient à bout de suspendre l'Astrolabe, en sorte qu'il ne puisse rouler qu'à très-difficilement autour de l'axe BA , il ne roulera plus qu'autour de FG , par des vibrations qui le feront incliner vers la ligne FK ; & dans ce cas, l'erreur dans l'observation de la hauteur des astres sera très-petite. On pourra même l'éviter, en choisissant la plus petite hauteur de toutes celles que l'instrument pourra donner dans ses différentes inclinaisons, comme j'en ai démontré à la fin de l'article second de la première Partie.

Les mêmes principes appliqués à l'Article III, servent à rectifier le Compas de variation, pour le rendre propre à observer l'azymuth des astres.

Je ne dois pas oublier une précaution que l'on doit prendre, pour fixer en tout tems les bouffoles & autres instrumens à plomb: c'est d'avoir des poids de rechange beaucoup plus grands que les poids ordinaires, pour les accrocher à l'instrument dans un gros tems. Un bon Marin m'a assuré, que par ce moyen, il avoit toujours fixé la bouffole dans les tems les plus orageux, tandis que les autres bouffoles du navire étoient dans des agitations continuelles.

Si la direction du sillage est perpendiculaire au plan de l'instrument, elle ne lui donne aucun mouvement autour de l'axe BA , mais seulement autour de FG ; & ce cas a été prévu ci-devant. Si elle est oblique, on peut la décomposer en deux, l'une parallèle, & l'autre perpendiculaire au plan de l'instrument. Ce qui renferme tous les cas.



Fig. 4. n° 2.

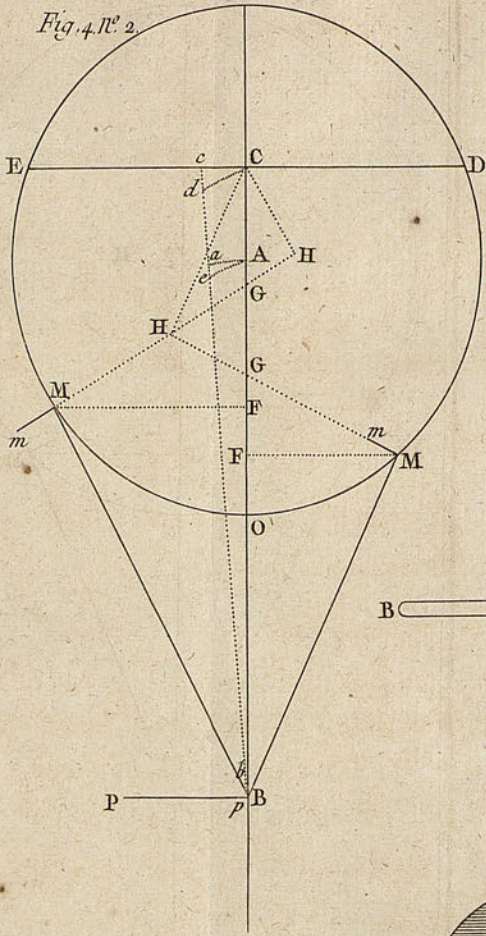


Fig. 6. n° 4.

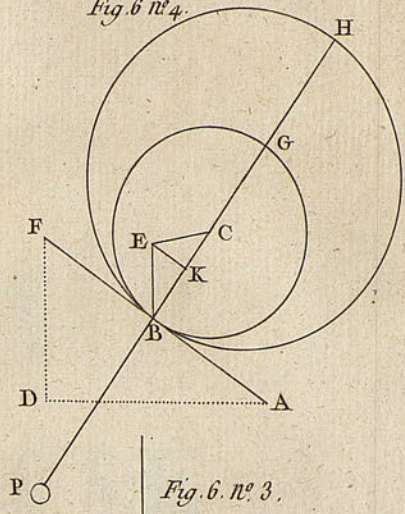


Fig. 6. n° 3.

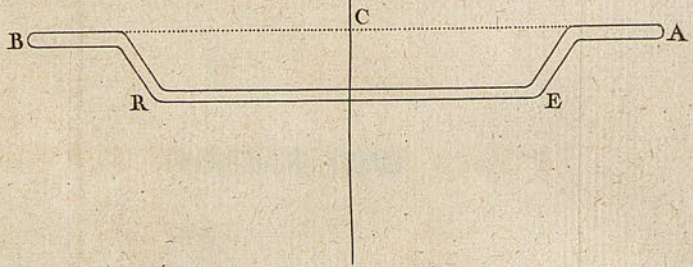
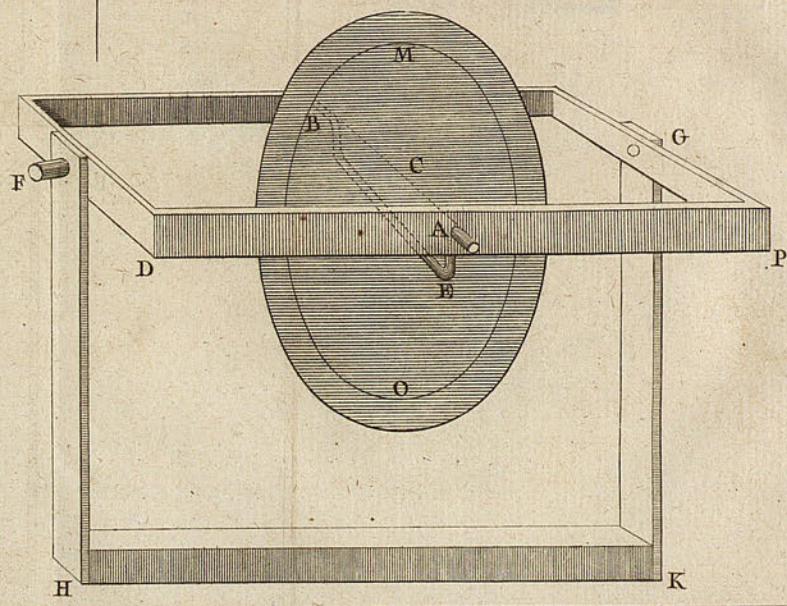
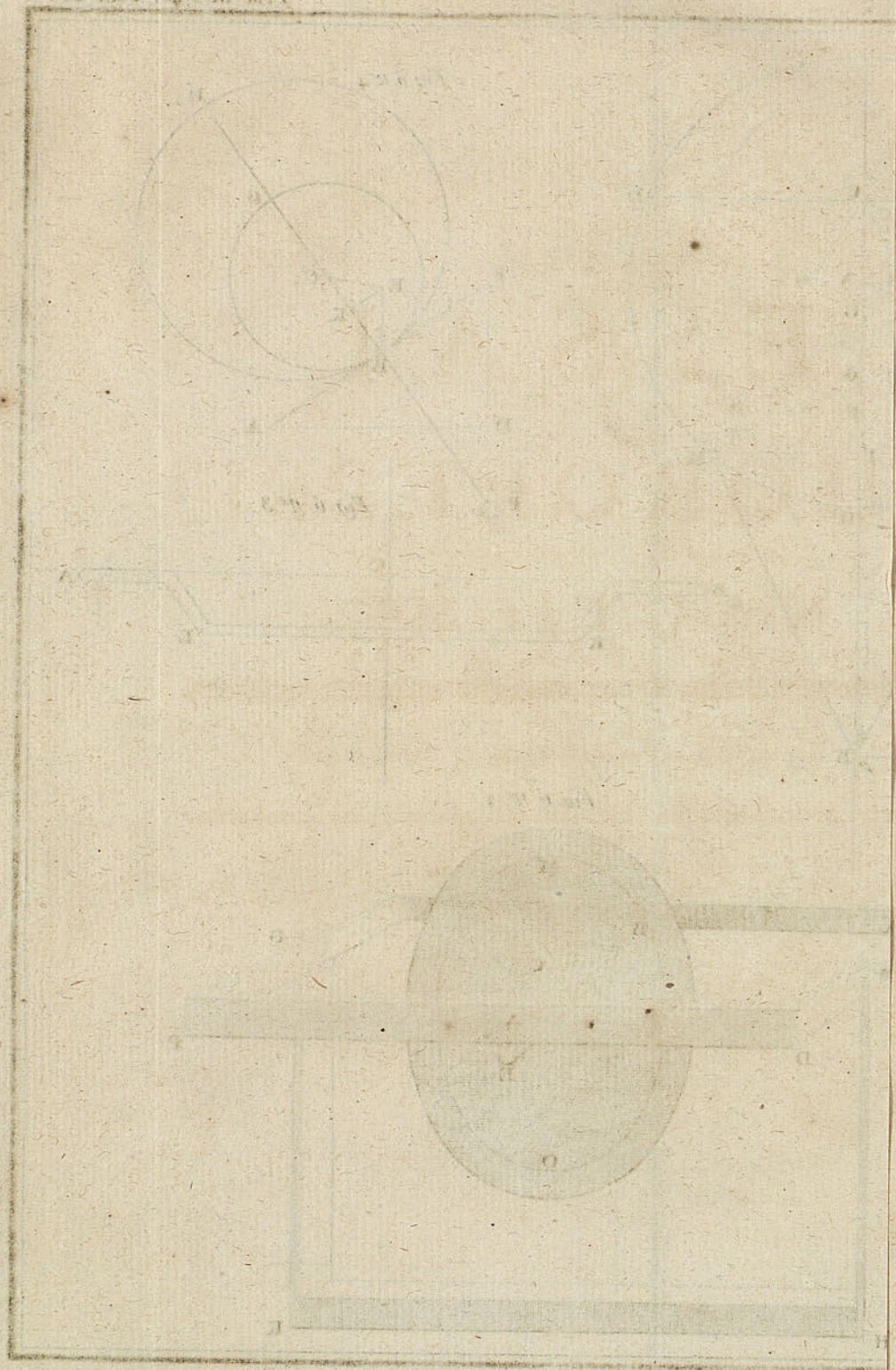


Fig. 6. n° 2.



For the 17th Jan 50



ESSAI D'HOROLEPSE NAUTIQUE.

Nautam ne pigeat cœli convexa tueri.

Terricola heu prorsus sum inglorius ; ô ubi pontus
Et naves ? O qui molis me in vertice sistat ,
Aëriæ cœlique vias & sidera monstret ?



Prim. 1745.

Ee

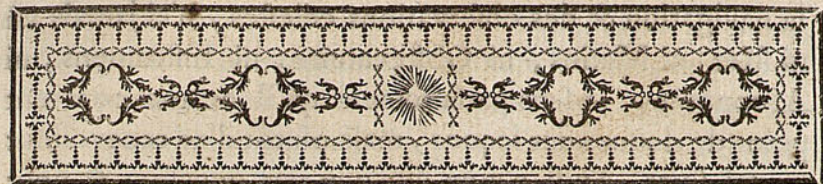
ESSAI

THOROLPSE

NAUTIQUE

THOROLPSE

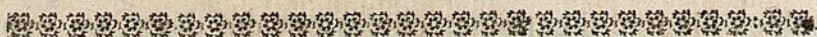
THOROLPSE



ESSAI D'HOROLEPSE NAUTIQUE.

Nautam ne pigeat cœli convexa tueri.

Terricola heu prorsus sum inglorius ; O ubi pontus
Et naves ! O qui molis me in vertice sistat
Aëriæ , cœlique vias & sidera monstret !



I j'ose essayer d'écrire quelques pages sur le Problème proposé par l'Académie Royale des Sciences , pour sujet du Prix de l'année 1745 , ce n'est pas que je me flatte de pouvoir montrer *la meilleure maniere de trouver l'heure en mer par observation* , &c. en quoi consiste ce Problème , ni même d'être capable d'en approcher assez pour mériter quelque distinction à cette Piece. C'est aux personnes versées dans la Marine & dans l'Astronomie , qu'il appartient seulement de traiter ce sujet avec certaine confiance. Pour moi , qui loin d'avoir aucun usage de

E c ij

la navigation & des observations célestes, n'ai jamais vu ni Mer, ni Marins, ni Observatoire, ni Instrumens, ni Astronomes, je sens parfaitement qu'il ne me convient point de donner des leçons, mais plutôt d'en recevoir sur un tel sujet. Aussi n'a-ce été que par occasion & pour m'exercer d'après l'ouvrage d'un fameux Maître, que j'ai pensé au Problème dont il s'agit; & je n'y ai pensé que fort tard, en sorte que je suis resserré dans un espace de tems très-court, pour mettre au net ma tentative. C'est une déclaration dont je me crois obligé de prévenir l'Académie, en prenant la liberté de lui présenter ces feuilles, afin que Messieurs les Commissaires qui verront celles-ci, puissent s'épargner la peine d'aller plus avant, s'ils le jugent à propos. Que s'ils veulent bien se la donner (ce qui est le principal souhait que j'ose former, & ce que je demande comme une grace), j'espère que la déclaration que je viens de faire, pourra engager ces Messieurs à voir mon Essai avec l'indulgence dont je sens qu'il a besoin.

Une autre déclaration que j'ai à faire, c'est qu'étant très-peu fourni de livres d'Astronomie & d'Hydrographie, j'ignore si certaines choses ont été dites, ou par qui elles l'ont été. Ainsi je pourrai tomber, mais malgré moi, dans le double inconvénient de m'arrêter, sans citer personne, sur des points qui auront peut-être été expliqués ailleurs, & mieux expliqués qu'ils ne seront ici. Si j'y tombe, j'espère que cet avou de mon défaut d'érudition me servira d'excuse. Au reste, je ne manquerai point de citer dans l'occasion, les Ouvrages que j'ai entre les mains, & dont j'emprunterai quelque chose.

Je divise cet Essai en trois Parties. Dans la première, j'exposerai divers moyens Astronomico-Algébriques, de trouver l'heure en prenant ce Problème en général, & abstraction faite des circonstances. Dans la deuxième,

J'indiquerai quelques opérations graphiques subsidiaires, à l'usage des Formules de la premiere Partie, & plus faciles: je marquerai aussi des moyens de simplifier dans certains cas les calculs algébriques, &c. Enfin je me propose de parler dans la troisieme Partie, du choix qu'il est à propos de faire entre les diverses sortes d'observations, & d'en parler tant en général, que relativement aux circonstances particulieres énoncées dans le Programme de l'Académie. Je tâcherai aussi de dire quelque chose sur les moyens de faire les observations requises.



PREMIERE PARTIE.

Moyens Astronomico - Algébriques de trouver l'heure, ou usage de l'Algebre pour trouver l'heure, certaines observations étant supposées.

LE mouvement journalier de la terre autour de son axe, fait paroître le ciel & tous les astres, comme emportés circulairement en sens contraire, parallèlement à l'équateur, autour des points du ciel que l'axe de la terre prolongé rencontre ; & cette rotation de la terre, qui par son uniformité est la mesure du tems, fait aussi que les astres changent continuellement, tant d'Azimuth, que d'almicantarath. Or elle les en fait changer différemment, selon que l'un des poles est plus ou moins élevé sur l'horison du lieu, & selon leur diverse distance à ce point. Il y a donc de certaines relations entre l'élevation du pole, le moment d'une observation, la déclinaison d'un astre, sa hauteur & son angle azymuthal. En effet, trois de ces choses étant données, chacune des deux autres est déterminée, & peut être trouvée.

C'est à quoi l'on emploie communément la Trigonométrie sphérique, mais l'algebre peut aussi y être employé, & avec avantage. M. Bouguer nous a donné un exemple de l'application de cette science générale aux questions Astronomiques, dans l'excellente Piece qui a remporté le prix de l'Académie de 1731, Piece qui a pour sujet : *La Méthode d'observer en mer la déclinaison de la boussole* : & les formules de cette Piece sont très-commodes : mais destinées à porter la lumière sur certains détails,

elles ne correspondent pas à toutes les questions que j'ai indiquées. M. de Maupertuis s'étant proposé un objet plus général, les a embrassées algébriquement toutes ces questions, dans le livre élégant qu'il a publié depuis peu, sous le titre d'Astronomie Nautique. Rien ne fait mieux sentir les relations des cinq choses dont il s'agit, que les cinq premiers problèmes de ce livre. Je vais les transcrire ici à titre de Lemme, en y joignant quelques Scholies, parce que les formules qui en résultent, sont le principal fondement de ce que j'ai à dire dans cette Partie. Les expressions des divers sinus, employées par M. de Maupertuis, étant très-bien choisies, je me fais un devoir de les conserver. Je m'étendrai un peu plus & dans ce Lemme & dans la suite, que n'a fait cet illustre Académicien : mais si je m'écarte en cela de l'exemple qu'il nous a donné, ce n'est pas que je ne sente combien grand est le mérite de la brièveté, & que je ne désirasse de me rendre concis, si je le pouvois être sans inconvénient ; mais les circonstances ne paroissent pas me le permettre. Qu'un Sçavant du premier rang soit extrêmement concis, qu'il supprime ou omette certains points dans un Ouvrage, il sçait à quelles personnes & à quel usage il le destine réellement ; d'ailleurs on ne peut le soupçonner de n'avoir pas fait attention à ce qu'il omet, encore moins de l'ignorer ; son Ouvrage, par de tels retranchemens, ne paroît que plus élégant & plus fort de choses, que plus agréable par conséquent à ceux qui sont capables de l'entendre sans peine. Mais si un foible Ecrivain ne disoit pas tout ce que son sujet comporte, sans compter qu'il pourroit passer pour dépourvu de la connoissance de ce qu'il omettroit, ne s'exposeroit-il point au danger de négliger imprudemment quelque chose d'utile & même d'important ? C'est pour mon propre besoin que je suis entré dans

certain détails, en étudiant mon sujet. Je crois donc pouvoir les inférer ici, d'autant plus que si cet écrit devoit public, il s'adresseroit à des personnes, qui, jusqu'à présent, n'ont pas été obligées de s'appliquer beaucoup à l'algebre, & qui sont chargées de plusieurs autres occupations pressantes. C'est aux seuls Navigateurs que je dois être censé parler. Peut-on trop faciliter les matieres aux personnes de cet ordre? Ce sont des pratiques qu'il s'agit de proposer. Peut-on trop s'appliquer à prévenir les méprises qui pourroient s'y glisser? Enfin, & cette dernière raison est forte, je ne serois presque que Copiste dans cette partie, si je me resserrois autant que l'Auteur original que je vais suivre.

LEMME PREMIER.

Touchant les relations entre la hauteur du Pole, la déclinaison d'un Astre, son Angle horaire, sa hauteur & son Angle azymuthal, ces choses étant prises quatre à quatre.

PREPARATION ET DENOMINATION des principaux élémens de la Sphere.

SOIENT (Fig. 1. 2. 3. & 4.) Pp l'axe de la sphere céleste; $PZAHp ZahP$ le méridien, & $HMXh$ l'horizon du lieu; $AeXa$ l'équateur; DEd le cercle que décrit l'astre; $PEep$ le méridien, ou cercle horaire qui passe au point E , où l'astre se trouve; $ZEMz$ son azymuth, & LEl son almicantarath.

Soit le rayon CP nommé r .

Le sinus CB de la déclinaison de l'astre nommé... x ,
son cosinus DB , y .

Le sinus PQ de la hauteur du pole..... s ,
son cosinus CQ , c . Le

Le sinus CG de la hauteur de l'astre h ,
son cosinus GE , k .

Le sinus ef de l'angle horaire t ,
son cosinus fc , u .

Le sinus MN de l'angle azymuthal m ,
son cosinus NC , n .

On aura (à cause de la similitude des triangles PQC & CBO) $CO = \frac{rx}{s}$, & $BO = \frac{cx}{s}$. De plus (à cause des arcs correspondans des cercles DEd & $AeXa$, LEl & $HMXh$), on aura $BF = \frac{yu}{r}$, $GF = \frac{nk}{r}$, & $EF = \frac{yt}{r} = \frac{mk}{r}$, d'où résulte $yt = mk$, cinquieme formule de l'Astron. Nautique, où n'entre point la hauteur du pole.

§. I. Relation entre la hauteur du Pole, la déclinaison d'un Astre, sa hauteur & son Angle horaire.

GO (Fig. 1.) $= GC - CO = \frac{hs - rx}{s}$, & les triangles semblables PQC & FGO donnant $c : r :: \frac{hs - rx}{s} : OF = \frac{rhs - rrx}{cs}$, on a (à cause de $BO + OF = BF$) $\frac{ccx + rhs - rrx}{cs} = \frac{yu}{r}$, ou (à cause de $cc - rr = -ss$) $rrh - rsx = cyu$; premiere Formule.

SCHOLIE. dans la Fig. 2. $GO = CO - GC$, $BF = BO - OF$, & l'on trouve les mêmes signes pour cette formule: mais ils sont différens dans les deux autres cas. Dans celui de la Fig. 3. où l'astre est situé au-dessous du cercle de six heures, on a $GO = CO - GC = \frac{rx - hs}{s}$, donc $OF = \frac{rrx - rhs}{cs}$; $BF = OF - BO$, donc $\frac{yu}{r} = \frac{rrx - rhs - ccx}{cs}$, & parce que $rr - cc = ss$, on a enfin $rsx - rrrh = cyu$. [C'est le cas indiqué dans la note qui est

au bas de la page 4 de de l'Astronomie Nautique.]

Dans le cas de la Fig. 4, où l'astre est situé au-dessous de l'équateur, on a $GO = GC + CO = \frac{hs + rx}{s}$, donc $OF = \frac{rhs + rrx}{cs}$, on a encore $BF = OF - BO$, donc $\frac{yu}{r} = \frac{rhs + rrx - ccx}{cs}$, ou (à cause de $rr - cc = ss$) $rrh + rsx = cyu$.

§. II. Relation entre la hauteur du Pole, la déclinaison d'un Astre, sa hauteur & son Angle azimuthal.

Les triangles semblables PQC , FGO , donnent $s : c :: \frac{nk}{r}$; $GO = \frac{nck}{rs}$. Donc (à cause de $CO + OG = CG$ Fig. 1.) $\frac{rrx + nck}{rs} = h$, ou $rrx + nck = rsh$, deuxième formule.

SCHOLIE. Les signes de cette formule sont différents dans les cas des trois autres Figures. Dans ceux des Fig. 2. & 3. sçavoir lorsque l'astre est situé de la même part du premier vertical que le pole est élevé, soit au-dessus, soit au-dessous du cercle de six heures, on a $CO - OG = CG$; donc $rrx - nck = rsh$. [Le second de ces cas est le seul qui soit indiqué dans la note qui vient d'être citée.]

Dans le cas de la Fig 4, qui est celui où l'astre est situé au-dessous de l'équateur, on a $OG - CO = CG$; donc $nck - rrx = rsh$.

§. III. Relation entre la hauteur du Pole, la déclinaison d'un Astre, son Angle horaire, & son Angle azimuthal.

Les triangles semblables MNC , $EF G$, donnent, $m : n :: \frac{yt}{r} : FG = \frac{nyt}{mr}$; les triangles PQC , FGO , don-

nent $s : r :: \frac{nyt}{mr} : FO = \frac{nyt}{ms}$; donc (à cause de $FO + OB = FB$, Fig. 1.) $\frac{nyt + mcx}{ms} = \frac{yu}{r}$, ou $rnyt + rmcx = msyu$; troisieme formule.

SCHOLIE. Les signes de cette formule sont encore différens pour les cas des trois autres Figures. Dans la Fig. 2, on a $OB - FO = FB$, donc $rmcx - rnyt = msyu$.

Dans les cas des Fig. 3. & 4, sçavoir lorsque l'astre est au-dessous soit du cercle de six heures, soit de l'équateur, on a $FO - OB = FB$, donc $rnyt - rmcx = msyu$.

§. IV. Relation entre la hauteur du Pole, la hauteur d'un Astre, son Angle horaire, & son Angle azimuthal.

Les triangles semblables PQC, FGO , donnent $s : r :: \frac{nk}{r} : FO = \frac{nk}{s}$; $s : c :: \frac{nk}{r} : GO = \frac{nk}{rs}$, & $CO (= CG - OG$ Fig. 1.) $= \frac{rsh - nkc}{rs}$. Les triangles PQC, CBO , donnent $r : c :: \frac{rsh - nkc}{rs} : OB = \frac{rsch - nkcc}{rrs}$; or (à cause des arcs correspondans des cercles $DEd, AIXa$), on a $FB (= FO + OB$, même Fig.); EF ou $\frac{nkrr + rsch - nkcc}{rrs} : \frac{mk}{r} :: u : v$; donc (à cause de $rr - cc = ss$) $rcht + nkst = rmku$; quatrieme formule.

SCHOLIE. Les signes de cette formule sont les mêmes dans le cas de la Fig. 4, où l'on a $CO = GO - GC$, & $FB = FO - OB$.

Dans le cas de la Fig. 2, on a $CO = CG + GO = \frac{rsh + nkc}{rs}$, & $OB = \frac{rsch + nkcc}{rrs}$; de plus, on a $FB = BO - OF = \frac{-nkrr + rsch + nkcc}{rrs}$; donc $-nkst + rcht = rmku$.

Enfin dans le cas de la Fig. 3, on a pareillement
F ij

$CO = CG + GO$, & $OB = \frac{rsch + nkcc}{rrs}$; mais on a d'ailleurs $FB = FO - OB = \frac{nkrr - rsch - nkcc}{rrs}$; donc $nkst - rcht = rmku$.

REMARQUE. On peut aisément reconnoître que tous les cas les moins simples de la situation d'un astre, sont exprimés dans les quatre Figures mentionnées ci-dessus, [dont la premiere est la seule qu'on voie dans l'Astronomie Nautique.] Car où l'astre est du côté du premier vertical, opposé à celui où est le pole élevé, & alors ou il est au-dessus de l'équateur *Fig. 1.* ou au-dessous *Fig. 4.* Et s'il est du côté du premier vertical, où est le pole élevé, il est ou au-dessus du cercle de six heures, *Fig. 2.* ou au-dessous, *Fig. 3.* On peut encore reconnoître cela autrement, & remarquer en même tems quelques différences des quatre Figures; car les triangles semblables BOC , FOG , sont ou opposés par la pointe, & c'est le cas de la *Fig. 1.* ou couchés l'un sur l'autre; & alors ou bien le côté BO du premier est plus grand que l'hypothénuse FO du second (& à plus forte raison CO , hypoth. du premier, est plus grande aussi que le côté GO du second), c'est le cas de la *Fig. 2.* ou bien au contraire, l'hypoth. CO du premier est plus petite que le côté GO du second (& à plus forte raison le côté BO du premier est aussi plus petit que l'hypothénuse du second), & c'est le cas de la *Fig. 4.* ou enfin chacune des hypothénuses surpasse le côté de l'autre triangle couché sur elle, & c'est le cas de la *Fig. 3.*

On peut aussi observer que chacune des quatre formules reçoit seulement trois combinaisons de signes, & que dans un de ses états, elle répond à deux Figures: & il est aisé de voir, surtout à l'égard de trois formules, que cela doit être ainsi. Car dans la premiere, où on laisse à part

l'angle azymuthal, il est indifférent que le cosinus de cet angle puisse être pris positivement ou négativement. Cette formule doit avoir les mêmes signes, si les autres sinus ou cosinus qui y entrent sont placés du même côté; c'est-à-dire, qu'il n'importe que l'astre soit de part ou d'autre du premier vertical, lorsqu'il est entre l'équateur & le cercle de six heures, *Fig. 1. & 2*; parce que dans l'une & l'autre Figure, le cosinus de l'angle horaire est de même part du cercle de six heures; & le sinus de la déclinaison aussi de même part de l'équateur. Dans la deuxième formule, où on laisse à part l'angle horaire, il est indifférent quelle position ait le cosinus de cet angle; la même combinaison des signes doit se trouver dans cette formule, si les sinus ou cosinus qu'elle renferme ont les mêmes positions. Ainsi il n'importe que l'astre soit de part ou d'autre du cercle de six heures, lorsqu'il est du côté du premier vertical où se trouve le pôle élevé, *Fig. 2. & 3*, parce que dans l'une & l'autre situation de l'astre, le cosinus de l'angle azymuthal est placé du même côté du premier vertical, & le sinus de la déclinaison, aussi du même côté de l'équateur. Dans la quatrième formule, où on laisse à part la déclinaison de l'astre, il n'importe qu'elle soit Septentrionale ou australe; les termes de cette formule doivent être affectés des mêmes signes, lorsque l'astre est au-dessus ou au-dessous de l'équateur, *Fig. 1. & 4*, parce que le cosinus de l'angle horaire tombe du même côté du cercle de six heures, & le cosinus de l'angle azymuthal du même côté du premier vertical, dans l'un & l'autre cas. Enfin dans la troisième formule (où on laisse à part la hauteur de l'astre), il est indifférent que l'astre soit au-dessous du cercle de six heures, *Fig. 3*, ou au-dessous de l'équateur, *Fig. 4*: il se fait pour ces cas une compensation, parce que les trois sinus

α, u, n , qui entrent dans la formule, ont dans l'un de ces cas une position toute contraire à celle qu'ils ont dans l'autre cas.

LEMME SECON D,

Touchant la relation du sinus de la somme, ou de la différence de deux Angles ou de deux Arcs aux sinus & cosinus de ces Angles ou Arcs.

1°. LE produit du sinus de la différence de deux angles aigus par le rayon, est égal à la différence du produit du sinus du plus grand de ces angles, par le cosinus du moindre, & du produit du sinus de celui-ci, par le cosinus de celui-là. 2°. Le produit du sinus de la somme de deux angles aigus par le rayon, est égal à la somme des produits du sinus de chacun d'eux, par le cosinus de l'autre.

Soient, par exemple, $\angle CX, \angle Ce$, deux angles aigus, dont $\angle CX$ soit ou la différence, *Fig. 5. & 6*, ou la somme, *Fig. 7. & 8.* * Du point C , pris pour centre, soit décrit le cercle quelconque $AeeXa$, ou $AeeXa$, &c. Des points e, e , soient menées sur XC , prolongée s'il le faut, les perpendiculaires $eg, e\gamma$, & encore du point e , eK , perpendiculaire sur Ce ; on aura eg, Cg pour sinus & cosinus de l'angle $\angle CX$; eK, cK pour sinus & cosinus de l'angle $\angle Ce$, & $e\gamma$ pour sinus de l'angle $\angle CX$. Je dis donc que $e\gamma \times Ce = \pm eg \times cK \pm eK \times Cg$, *Fig. 5. & 6*, ou $\pm eg \times cK \pm eK \times Cg$, *Fig. 7. & 8.*

DEMONSTRATION. Soit prolongée eK jusqu'à la

* Dans le cas de cette *Fig. 8*, où la somme $\angle CX$ des angles $\angle CX, \angle Ce$ est un angle obtus, on peut considérer au lieu de cet angle, $\angle Cx$ qui en est le supplément à deux droits.

rencontre de CX en I , ce qui donne $\epsilon I = \pm IK \mp \epsilon K$, *Figures 5 & 6*, ou $\pm IK \pm \epsilon K$, *Figures 7 & 8*, on aura de plus, trois triangles rectangles semblables, $\epsilon \gamma I$, CKI , Cge , puisque le premier a un angle aigu commun avec le second en I , & que le second a son autre angle aigu en C , commun avec le troisieme. On a donc (en comparant ceux-ci) $Cg : eg :: CK : IK = \frac{eg \times CK}{Cg}$; & (en comparant le premier triangle avec le troisieme)... $Cg : Ce :: \epsilon \gamma : \epsilon I = \frac{\epsilon \gamma \times Ce}{Cg}$. Donc $\frac{\epsilon \gamma \times Ce}{Cg} = \frac{\pm eg \times CK}{\pm Cg}$. $\mp \epsilon, K$ ou bien enfin $\epsilon \gamma \times Ce = \pm eg \times CK \mp \epsilon K \times Cg$. Ce qu'il falloit démontrer.

3°. & 4°. Soient ϵCX , ϵCe , deux angles obtus, dont ϵCx soit ou la différence, *Fig. 9 & 10*, ou la somme; ou, si l'on veut, le supplément à quatre droits, *Fig. 11 & 12*. La formule des cas précédens a encore lieu, parce que les angles obtus ont les mêmes sinus que les angles aigus, dont ils sont les supplémens à deux droits. Les termes de la formule sont affectés des mêmes signes, *Fig. 9. & 10*, que *Fig. 5 & 6*, & *Fig. 11 & 12* que *Fig. 7 & 8*; il est visible en effet, à l'inspection des *Fig. 9 & 10*, qu'on y a $I = \pm IK \mp \epsilon K$, &c. Ces derniers cas pourroient être exprimés autrement, en considérant l'angle ϵCX , qui est ou la somme, *Fig. 9 & 10*, ou la différence, *Fig. 11 & 12* de deux angles ϵCX , ϵCe , l'un aigu & l'autre obtus.

COROLLAIRE, ou autre exemple. Soit ACa (mêmes *Figures*) perpendiculaire au diamètre XCx ; Cg sera le sinus de l'angle ϵCA , ou ϵCa ; eg en fera le cosinus, & $C\gamma$ sera le sinus de l'angle ϵCA ou ϵCa , qui est la somme ou la différence de ce premier angle & de ϵCe . Pour abréger, soit le rayon Ce nommé r , comme ci-devant; Cg ou bien ef , nommé pareillement t , & eg ou Cf , u . Soit

aussi $C\gamma$ nommé t' ; γ, u' ; K, p ; CK, q ; (d'où résulte $ru' = \pm qu \pm pt$, pour expression de l'exemple précédent) on aura $rt' = +qt + pu$, Fig. 5, 6, 9 & 10, parce que dans les deux premières $\angle CA$ est la somme de deux angles aigus $\angle eCA, \angle Ce$; & dans les deux autres $\angle Ca$ est la somme ou le supplément à quatre droits de deux angles obtus $\angle eCa, \angle Ce$. On aura encore $rt' = -qt + pu$, Fig. 7 & 11, ou $= +qt - pu$, Fig. 8 & 12, parce que $\angle CA$, Fig. 7 & 8, est la différence de deux angles aigus, & dans les deux autres, $\angle Ca$ est la différence de deux angles obtus, $\angle eCa, \angle Ce$.

Par les mêmes raisons on aura :

$$rp = \begin{Bmatrix} + \\ + \\ - \end{Bmatrix} r'u \begin{Bmatrix} - \\ + \\ + \end{Bmatrix} tu' \begin{Bmatrix} \text{Fig. 5 \& 9.} \\ \text{Fig. 6, 7, 10 \& 11.} \\ \text{Fig. 8 \& 12, \&c.} \end{Bmatrix}$$

[L'Auteur de l'Astronomie Nautique fait un grand usage de divers cas de ce Lemme, mais sans l'avoir énoncé, & sans avertir de l'espece du cas dont il se sert. Je me souviens d'avoir vû le même Lemme employé dans le Traité de la Manœuvre des Vaisseaux de M. Bernoulli.]

SCHOLIE. Il suffiroit de donner aux termes de chacune des formules précédentes une des trois combinaisons de signes que l'on vient de voir qu'elles peuvent recevoir, si on l'entendoit bien dans cet état, & que l'on eût attention à l'appliquer à propos. Soit proposée la formule du premier exemple ci-dessus, dans l'état $+ \gamma \times Ce = + eg \times CK - K \times Cg$, ou bien $+ ru' = + qu - pt$, qui est l'expression simple & naturelle du cas de la Fig. 5. Si l'on passe au cas des Fig 7 & 8, où le sinus $EK (p)$ est situé relativement à Ce , dans un sens contraire de ce qu'il est Fig. 5, & où par conséquent ce sinus est négatif; si on

la

Je regarde comme positif dans la *Fig. 5*, le signe — dont le terme pt du second membre de la formule proposée est affecté, se réduit à marquer l'addition de ce terme, parce que le retranchement d'un produit négatif équivaut à l'addition de ce même produit, pris positivement. Si l'on se trouve dans le cas de la *Fig. 6*, où le sinus $^e K$ est situé de la même part de Ce que dans la *Fig. 5*, mais où le sinus $^e \gamma$ (u') est situé d'autre part de CX que dans cette Figure, & où ce sinus est négatif; par conséquent, s'il est supposé positif, dans la *Fig. 5*, les signes du second membre de la formule conservent leur signification simple; mais le signe + dont est affecté le premier membre ru' de cette formule, indique réellement la négation de ce membre, parce que la position d'une quantité négative est la même chose que la négation de cette quantité, prise positivement; on a donc effectivement & simplement, *Fig. 6*, $-ru' = qu - pt$, expression qui équivaut à celle ($ru' = -qu + pt$) qui a été employée ci-dessus pour le cas de cette *Fig. 6*.

Quant aux cas des *Fig. 9, 10, 11 & 12*, il faut remarquer en général que le cosinus CK (q) de l'angle $^e Ce$ y est situé en sens contraire de ce qu'il est dans les quatre Figures précédentes; différence de situation, qui provient, comme il est visible, de ce que l'angle $^e Ce$ est aigu dans les cas de ces Figures-ci, & obtus dans les autres. Par conséquent le cosinus q est négatif dans les cas des *Fig. 9, 10, 11 & 12*, si on le suppose positif dans les cas précédens, & il rend négatif le produit où il entre en degré impair. * Or, la position d'une quantité négative équivaut à la négation de cette même quantité entendue positivement: donc le signe + qui affecte le terme qu du

* Cette remarque aura encore quelque usage dans la suite.

second membre de la formule, se réduit à marquer le retranchement de ce terme.

Si donc on se trouve dans le cas des *Fig. 11 & 12*, où le sinus $K(p)$ est situé du même côté de Ce que dans la *Fig. 5*; mais où le sinus $\gamma(u')$ est d'autre part de CX que dans cette *Fig. 5*, & négatif par conséquent, le signe $(-)$ du terme pt du second membre de la formule conserve sa signification simple, mais le signe du premier membre marque en effet une négation, de même que celui du terme qu du second membre. Ainsi on a effectivement & simplement pour ce cas, $-ru' = -qu - pt$, expression qui équivaut à celle $(ru' = qu + pt)$ qui a été employée ci-dessus pour ce cas. Dans le cas de la *Fig. 10*, où au contraire c'est le sinus $K(p)$ qui est autrement situé que dans la *Fig. 5* à l'égard de Ce , & où γ est situé de même part de CX que dans cette Figure. C'est le signe du premier membre de la formule, qui retient sa signification naturelle, & le signe $(-)$ du terme pt du second membre de cette formule, étant exposé à un produit négatif, indique réellement l'addition de ce produit pris positivement. Donc en un mot, chaque signe du second membre de la formule proposée, marque le contraire de sa signification naturelle. Enfin dans le cas de la *Fig. 9*, chacun des sinus u' & p étant situé en sens contraire de ce qu'il est *Fig. 5*, les signes des termes ru' & pt de la formule doivent être changés en leurs contraires; aussi-bien que celui du terme qu , ce qui donne $-ru' = -qu + pt$, ou bien aucun des trois signes ne doit être changé; car l'une de ces manières est équivalente à l'autre.

J'expliquerai plus bas, ce que j'entens par l'application *juste* d'une formule.

A V E R T I S S E M E N T.

QUELQUES-UNES des Formules du premier Lemme, donnent le moyen de découvrir, non-seulement l'heure par l'observation d'une étoile, mais aussi la déclinaison de cette étoile avec la hauteur du pole. Cependant comme il ne s'agit ici que des besoins nautiques, je supposerai dans cette Partie, que la déclinaison des étoiles est connue, & que celle des planetes, quoique variable, l'est aussi. Car *on a par les catalogues d'étoiles, leur déclinaison avec plus de précision qu'il n'est nécessaire pour les besoins du Navigateur; ainsi dès qu'on connoît sur mer l'étoile qu'on observe, il est inutile de chercher sa déclinaison; & si l'on vouloit se servir d'une étoile qu'on ne connoît pas, on seroit exposé à des méprises bien dangereuses*, suivant la remarque de M. de Maupertuis. D'ailleurs les méthodes de trouver l'heure concurremment avec la déclinaison d'une étoile, & la hauteur du pole, sont en petit nombre, compliquées, & supposent que l'Observateur est dans un lieu fixe, ou demandent que l'on fasse certaines corrections aux observations. A l'égard de la déclinaison des planetes, je crois qu'on peut l'avoir, ainsi que leur ascension droite, avec une précision suffisante, par les Ephémérides ou les Tables, & il faut bien sur mer se contenter de les connoître par cette voie.

Quant aux moyens de connoître l'heure, en supposant connue la déclinaison de l'astre ou des astres observés, ils sont en grand nombre, & on peut bien l'appercevoir par la relation qui se trouve entre la hauteur du pole & l'angle horaire d'un astre. Il y a en effet autant de moyens géométriquement bons de trouver l'heure, que de trouver la hauteur du pole. Car 1°. il y en a pour trouver ces deux choses conjointement, ou pour trouver celle qu'on

veut des deux sans avoir l'autre ; & 2°. s'il y a des moyens spéciaux pour trouver la hauteur du pôle , il y en a autant de même qualité pour découvrir l'heure. Ces moyens particuliers de trouver la latitude, sont ceux où l'on suppose que l'heure est connue. En renversant donc les suppositions & l'opération , c'est-à-dire , en supposant la latitude connue , on doit avoir des moyens particuliers de connoître l'heure. Mon dessein est d'exposer ces moyens divers ; il y en a de l'une & de l'autre espèce , qui peuvent avoir leur utilité sur mer , suivant les rencontres , ainsi que je l'expliquerai dans la suite. On voit par-là , que je serai obligé de parler de la recherche de la hauteur du pôle , quoique ce ne soit pas mon objet direct : j'en parlerai même assez amplement , cet objet étant si fort lié avec celui que je dois avoir , qu'on ne peut éviter de les joindre jusqu'à un certain point , sans préjudicier au sujet dont il s'agit. Aussi M. de Maupertuis , dont le principal but a été d'enseigner à trouver la latitude , a beaucoup parlé incidemment de l'invention de l'heure , & je ne peux que le suivre , & tâcher de glaner derrière lui.

Pour observer quelque ordre , je partage cette Partie en trois Chapitres. Dans le premier , je rapporterai les moyens de trouver l'heure sans avoir la hauteur du pôle , ou conjointement avec cette hauteur , lesquels sont fondés sur les plus simples combinaisons d'observations. (J'entens par ces plus simples combinaisons , celles où il n'entre que deux élémens , outre la déclinaison de l'astre ou des deux astres observés , & non celles qui peuvent conduire aux calculs les plus simples.) Dans le second Chapitre , j'indiquerai tous les moyens (que je sçai) de trouver l'heure , la hauteur du pôle étant supposée connue. Enfin dans le troisieme , j'exposerai le reste des moyens de trouver l'heure concurremment avec la hauteur du pôle.

PREMIERE PARTIE.

CHAPITRE PREMIER.

Des moyens de trouver l'heure sans avoir la hauteur du pôle, ou avec cette hauteur.

PROBLEME PREMIER.

L *A hauteur & l'Angle azimuthal d'un Astre étant donné, trouver l'heure.*

La cinquieme Formule de l'Astronomie Nautique, rapportée au commencement du premier Lemme, donne $t = \frac{mk}{y}$, & la différence de l'ascension droite de cet astre & du Soleil, donne l'heure. L'opération que l'algèbre vient de fournir, est la même que prescrit la Trigonométrie Sphérique.

SCHOLIE. A ce Probleme répond celui de trouver la hauteur du pôle, les mêmes élémens étant donnés; & la deuxieme formule du premier Lemme, fournit pour cela une équation du second degré.

REMARQUE. Telles sont les relations entre la hauteur du pôle, la déclinaison d'un astre, sa hauteur, son angle azymuthal & son angle horaire, comme je l'ai déjà observé; que trois de ces élémens divers étant donnés, on peut trouver les deux autres, & on vient d'en donner un exemple. Mais l'on n'iroit pas loin si on n'avoit que cela. Telles sont les relations entre les élémens dont il

s'agit, & telle est l'utilité du second Lemme, qu'une espèce de ces élémens étant donnée double avec une autre d'entre eux, on peut trouver les trois restans. Il y a plus ; la situation respective des astres étant connue, il n'est pas nécessaire que les élémens donnés outre la déclinaison, appartiennent au même astre, pour trouver ce qu'on demande : on y parvient en chassant de quelques-unes des formules du premier Lemme, où il entre deux élémens inconnus, un de ces deux élémens. Quant aux observations sur lesquelles on se fonde, ou elles sont faites en même moment, ou en des tems différens. Dans ce dernier cas, il faut connoître l'espace de tems écoulé entre les deux observations ; mais cela ne rend pas le calcul plus difficile que quand les observations sont contemporaines, & n'y apporte même aucun changement ; car il faut alors concevoir un astre idéal, qui ait la même déclinaison que l'astre réel observé dans un des momens, mais qui soit éloigné de lui en ascension droite sur la sphère céleste, de la quantité de degrés que vaut le tems écoulé entre les observations, & raisonner comme si on eût observé cet astre idéal, & qu'on l'eût observé dans le moment de l'autre observation réelle.

Nous avons trois combinaisons générales d'observations à employer, car l'on a ou deux hauteurs, ou deux angles azymuthaux, ou une hauteur, & un angle azymuthal.

PROBLEME II.

Les hauteurs de deux astres E, E' étant données, avec leur déclinaison & le tems écoulé entre les observations, trouver l'heure de l'une & de l'autre.

REMARQUE. Il est préalable pour la solution de ce probleme de trouver la hauteur du pôle, parce qu'il est

beaucoup plus facile de chasser u que s de la formule dont on a besoin.

Soient les sinus de la déclinaison des deux astres, x, x' , leurs cosinus, y, y' , les sinus des deux hauteurs, h, h' , les cosinus des angles horaires qui leur répondent, u, u' . Soient nommés p & q le sinus & le cosinus de la différence, ou de la somme de l'angle du tems écoulé entre les observations, & de celui qui est la différence des deux astres en ascension droite. C'est la différence de ces angles qu'il faut prendre, si c'est le précédent des deux astres qui a été observé en premier lieu; c'est la somme de ces deux angles qu'il faut prendre, si c'est au contraire le suivant des deux astres qui a été observé en premier lieu. (Cette signification des lettres p, q , subsistera dans la suite.)

On a (par la remarque qui précède ce probleme, & par le second Lemme) $ru' = qu - pt$, ou $ru' - qu = -p \sqrt{(rr - uu)}$, en supposant que les deux points de l'équateur, auxquels répondent l'astre réel & l'astre idéal au moment de l'une des observations, sont dans le cas de la Fig. 5, où ces points sont désignés par les lettres e . Mettant dans la formule $ru' - qu = -p \sqrt{(rr - uu)}$ les valeurs de u & de u' , prises dans la première formule du premier Lemme, pour le cas où l'astre est observé tant au-dessus de l'équateur, que du cercle de six heures,

$u' = \frac{rrh' - rxx'}{cy'}$, & $u = \frac{rrh - rxx}{cy}$, quarrant chaque membre, afin de chasser l'incommensurable, mettant pour cc , la valeur $rr - ss$, & substituant, pour abrégé, rr au lieu de $xx + yy$, dans un des termes du coefficient de ss , & rr au lieu de $pp + qq$, dans un des termes tous connus, il vient l'équation du second degré,

$$\left. \begin{aligned} (rx'y - qxy')^2 \\ + rr pp y'y' \end{aligned} \right\} s s \left\{ \begin{aligned} - 2r^3 h'x'yy \\ + 2r^2 qh'xyy' \\ - 2r^3 hxx'y'y' \\ + 2r^2 qhx'yy' \end{aligned} \right\} s = \left\{ \begin{aligned} + rr pp yy y'y' \\ + 2r^3 qhh' yy' \\ - r^4 h'h' yy \\ - r^4 hh y'y' \end{aligned} \right.$$

Et prenant $A = (rx'y - qxy')^2 + rr pp y'y'$, $B = r^2 h'x'yy - r q h'x yy' + r^2 h x y' y' - r q h x' y y'$, & $C = pp yy y'y' + 2r q h h' y y' - r^2 h' h' yy - r^2 h h y'y'$, on a pour le sinus de la hauteur du pôle,

$$s = \frac{rB}{A} + \frac{r}{A} \sqrt{(BB + AC.)}$$

Ayant la hauteur du pôle, il est évident qu'on aura les angles horaires par les équations $u = \frac{rrh - r s x}{c y}$, ou $u' = \frac{rrh' - r s x'}{c y'}$, & l'heure des observations, par l'ascension droite des astres.

S C H O L I E S.

I. Le calcul précédent n'a été fait que sur l'hypothèse d'une certaine situation respective des deux astres, & il en est bien d'autres possibles; car non-seulement les deux astres peuvent encore être supposés tous deux au-dessous de l'équateur, ou au-dessous du cercle de six heures, mais encore l'un peut être au-dessus de ces deux cercles, le second étant au-dessous de l'un des deux; un des astres peut être dessous l'équateur, & l'autre dessous le cercle de six heures; l'un peut être d'une part, & le second d'autre part du Méridien: enfin l'angle Ce , dont p est le sinus, peut être obtus aussi-bien qu'aigu. Or il seroit long de calculer le problème pour toutes les combinaisons possibles d'hypothèses, l'une après l'autre, mais on peut

peut éviter ce travail , pourvû que l'on entende bien la formule qui vient d'être trouvée , & qu'on y change ; quand il s'agira de la mettre en pratique , les signes qui n'auront pas leur signification simple , en leurs contraires. Pour ne rien laisser au hasard , j'ai calculé le Probleme relativement à diverses hypotheses , d'entre celles que je viens d'indiquer , en observant de bien marier le second Lemme avec le premier , & je suis toujours parvenu à une formule composée des mêmes termes , & affectée dans quelques cas des mêmes signes , & qui en d'autres cas différoit seulement par quelques signes , de celle que je viens de donner. J'ai trouvé de plus , que la mutation des signes étoit réglée par des loix que je vais marquer ; c'est pourquoi je me suis dispensé de continuer le calcul du probleme , pour le reste des hypotheses possibles.

Ce que j'appelle bien marier (pour le dire en passant) les formules des deux Lemmes , c'est les prendre dans leurs états correspondans , ainsi que j'ai fait ci-dessus , & que je vais le montrer plus en détail par un autre exemple.

Supposons que l'un des astres E , ait été observé au-dessus tant de l'équateur , que du cercle de six heures , & que l'autre E' , l'ait été au-dessous de ce deuxieme cercle , il faut faire $u = \frac{rrh - rxx}{cy}$, & $u' = \frac{-rrh' + rxx'}{cy'}$: si de plus , les deux astres ont été observés du même côté du méridien , & que l'angle $\angle Ce$, dont p est le sinus , soit aigu , ce qui est le cas de la *Fig. 6.* (où A représente le point de l'équateur , que rencontre la portion supérieure du méridien , & a le point opposé). Il faut faire $ru' = -qu + pt$, ou $ru' + qu = pt$: mais si l'angle $\angle Ce$ est obtus , ce qui est le cas de la *Fig. 11* , il faut prendre $ru' = qu + pt$. Ainsi , appliquer à propos la formule du second Lemme , prise dans un état quelconque , entre les trois

dont elle est susceptible, c'est l'appliquer à quelqu'un des cas de la situation respective de deux ou plusieurs points du ciel auxquels elle peut convenir; car on fera, par ce moyen, un bon calcul, & dont le résultat bien entendu, ne se bornera pas à la seule hypothèse sur laquelle on aura travaillé; au lieu que si on marioit au hasard la formule du second Lemme, avec une de celles du premier, prise dans un état quelconque, on s'exposeroit peut-être à faire un calcul vicieux, ou du moins on en feroit un qui seroit inutile, faute de pouvoir discerner ce à quoi il conviendrait.

Voici les loix des signes de notre Formule. Elle convient naturellement dans l'état où elle est, à tous les cas où les deux astres déclinent du côté du pôle élevé, & où l'angle *C* est aigu: que si cet angle est obtus, il faut prendre négativement son cosinus *q*; & si l'un des astres observés, ou tous les deux, déclinent du côté du pôle abaissé, il faut prendre négativement le sinus α ou α' de cette déclinaison. Cela posé, s'il n'y a dans un terme de la formule qu'une quantité qui doive être prise négativement, & qui soit linéaire, il faut changer le signe de ce terme en son contraire; il en est de même s'il se trouvoit trois quantités négatives dans le même terme, ou si le carré d'une quantité négative y étoit multiplié par une autre quantité négative linéaire: mais si deux quantités négatives sont multipliées l'une par l'autre dans un terme, ou si une quantité négative y est au second degré, il faut laisser le signe de ce terme.

On comprend apparemment assez sans que j'en avertisse, qu'après avoir mis la formule précédente de la hauteur du pôle dans l'état convenable, & après s'en être servi pour trouver cette hauteur, il faut encore avoir soin, en revenant à la première formule du premier Lemme,

pour trouver l'un ou l'autre des angles horaires, de choisir l'état de cette formule qui convient à l'observation de l'astre dont on veut avoir l'angle horaire; il faut, dis-je, avoir le soin au moins de discerner le cas où cyu est égal à la somme des termes rrh & rsx (c'est celui où l'astre est sous l'équateur), d'avec ceux où cyu est égal à la différence de ces termes.

II. Nous avons une équation du second degré, pour trouver la hauteur du pôle, & deux racines par conséquent, qui sont la valeur vraie ou apparente du sinus de cette hauteur. Il est donc à propos de voir ce que sont en effet ces racines; & cela convient d'autant plus, que l'Auteur de l'Astronomie Nautique, qui a donné un Problème subordonné à celui-ci, s'est abstenu d'entrer dans aucune discussion sur ce point, qui est peut-être capable d'embarrasser, je ne dis pas un Astronome de profession, mais quelqu'un de l'ordre des Navigateurs. [C'est apparemment pour laisser une matière d'exercice, que M. de Maupertuis a glissé sur le point dont il s'agit, car il a bien voulu s'arrêter d'ailleurs (Scholie du Probl. XV.) à rechercher la nature des deux racines de l'équation, que l'on a pour trouver le jour du plus court crépuscule, afin de prévenir le *qui pro quo* auquel on étoit exposé en certain cas, & il a même traité cette affaire d'importante.] Nous avons deux racines; mais pourquoi (peut-on demander d'abord) en avons-nous deux? Le voici. C'est qu'il y a un point du ciel autre que le pôle, qui a même relation que le pôle aux deux points donnés du ciel, qui sont à certaines distances de l'horison; il ne s'agit que de sçavoir laquelle des deux racines de notre équation est la vraie valeur de s .

J'observe par préalable, que si les deux astres observés déclinent du côté du pôle abaissé, la somme B est néces-

faiblement négative : il y a donc une racine de l'équation qui est visiblement négative , mais l'autre racine doit être de la qualité contraire. Si les deux astres déclinent de différens côtés , il doit y avoir aussi une racine négative , & une racine positive : si enfin les deux astres déclinent du côté du pôle élevé , une des racines peut encore être négative , & l'autre positive ; mais il se peut aussi que les deux racines soient positives , & c'est ce qui arrive lorsque $B > \sqrt{(BB+AC)}$, c'est-à-dire , lorsque la somme C est négative. (Si C est zéro , une des racines est aussi zéro , & il faut joindre ce cas à celui où les deux racines sont positives).

Dans les cas où les deux racines sont de qualités contraires , on peut présumer que c'est la racine positive qui est la vraie valeur du sinus de la hauteur du pôle , & cela est en effet. Aussi est-il constant , que lorsqu'on cherche une chose *directement* par l'algebre , ce n'est aucune des racines négatives qui peuvent être mêlées dans la solution , qui est la vraie valeur de ce qu'on cherche , c'est autre chose que donnent ces racines (& si l'on a la curiosité de faire une nouvelle opération , pour chercher *directement* la chose qu'a donnée une des racines négatives , provenues de la première opération , on ne manquera pas de retrouver la valeur de cette chose , affectée du signe positif.) Mais dans le cas où les deux racines sont positives , laquelle des deux est la valeur du sinus cherché ? C'est ce cas qui peut *embarrasser*.

Pour lever la difficulté , je dis qu'il faut revenir sur les observations qui ont été faites , ou bien les deux astres ont été observés de différens côtés du méridien , ou du même côté. Dans le premier de ces cas subalternes , il faut remarquer le vertical où étoit un des astres , lorsqu'on a observé sa hauteur , & voir de quel côté de ce vertical a été observé l'autre astre. Si ç'a été du côté de ce vertical où

est le pole élevé, c'est la moindre des deux racines positives qui est le sinus de la hauteur du pole ; si c'est du côté de ce vertical où n'est pas le pole élevé qu'ait été observé le second astre, c'est la plus grande des deux racines qui donne la hauteur du pole. Que si les deux astres ont été observés de même part du méridien, il faut remarquer le vertical où étoit l'astre observé à la moindre hauteur, & voir pareillement de quel côté de ce vertical a été observé l'autre astre : si c'est du côté où se trouve le pole élevé, c'est encore la moindre des deux racines positives qui donne la hauteur du pole ; & c'est la plus grande de ces deux racines qui donne cette hauteur, si l'astre observé à la plus grande hauteur, l'a été du côté du vertical susdit, où n'est pas le pole élevé. Ainsi l'une ou l'autre des racines positives de notre formule, peut être utile suivant les circonstances, & comme ces circonstances qui caractérisent la racine utile, n'entrent point dans le calcul du problème, il falloit bien que l'algebre, pour fournir ce qu'on lui demandoit, nous donnât plus que nous ne demandions, c'est-à-dire, une équation du second degré, où il y a une apparence de superfluité. Dans les cas-mêmes où les deux racines sont de qualité contraire, la racine négative n'est point absolument superflue, elle indique, étant prise positivement, la hauteur du point du ciel qui feroit le pole, si les astres observés déclinoient de l'équateur, du côté opposé à celui où ils sont, ou (pour exprimer la chose autrement) qui feroit le pole à l'égard d'un Observateur situé de l'autre côté de l'équateur que celui qui a fait réellement les observations, & qui auroit vu les mêmes astres aux mêmes hauteurs.

Les deux racines contenues dans la formule, peuvent non-seulement être toutes deux positives, mais encore égales, & c'est ce qui arrive lorsque $BB + AC = 0$,

H h iij

c'est-à-dire, lorsque la somme C est négative, & que B est moyenne proportionnelle entre la somme A & cette somme C prise positivement; & c'est ce qui doit se rencontrer lorsque les deux astres ont été observés dans le même azymuth. Ce n'est aussi que dans ce cas que l'égalité des racines doit avoir lieu, si on suppose que les hauteurs aient été prises dans l'exactitude géométrique; mais si l'on y a commis quelque erreur, les deux racines peuvent encore être égales, lorsque les astres ont été observés dans des azymuths réellement différens, mais peu éloignés.

Pour ne rien omettre, disons que les deux racines contenues dans notre formule peuvent se trouver imaginaires. C'est ce qui n'arriveroit jamais, à la vérité, si les hauteurs données étoient géométriquement exactes, mais qui est possible, à cause des erreurs auxquelles les observations sont sujettes. On sera exposé à cette espece d'inconvénient, lorsque l'on observera les deux astres dans le même vertical, ou dans des verticaux voisins [c'est-à-dire, qui font un petit angle]. Je dis que de rencontrer des racines imaginaires, est seulement une espece d'inconvénient, parce qu'en ajoutant aux hauteurs observées, ou en retranchant quelques minutes, on retrouvera les racines réelles que l'on avoit manquées. C'est à la plus suspecte des deux observations, s'il y en a une de telle, qu'il faut sans doute faire toute la correction, ou la principale correction; mais en cas d'égalité, la correction doit être partagée entre les deux observations; & voici, par exemple, ce qui doit être fait dans ce cas. Si les deux astres ont été observés de part & d'autre du méridien, il faut augmenter chacune des hauteurs observées. Si au contraire, les deux astres ont été observés de même part du méridien, il faut augmenter la plus grande

des hauteurs observées, & diminuer la moindre. On connoît assez que la correction des hauteurs ne doit aller que jusqu'à faire $BB + AC = 0$. (On verra dans la seconde Partie, le fondement de ce que j'ai dit dans cette Scholie).

III. Notre Probleme a quelque étendue, & il comprend sous lui plusieurs cas particuliers, deux desquels sont traités séparément dans l'Astronomie Nautique, & doivent par conséquent passer pour intéressans. On peut, en considérant ces cas d'une certaine façon, arriver à leurs solutions, par des opérations plus simples que celles de notre probleme. Mais si on veut avoir ces cas résolus avec une entière exactitude, il faut faire certaines corrections à quelques-uns des élémens employés dans les formules trouvées par ces opérations particulières, ou bien il faut se servir de celle qui est ci-dessus. Cette formule a donc la propriété d'être plus exacte par elle-même, & plus générale qu'aucune autre : & si c'est un *avantage* * d'avoir plusieurs Problemes résolus par une même méthode & un même calcul, la voie que j'ai prise n'est point à mépriser, quoique d'autres puissent lui être préférables, soit à raison du plus de simplicité des opérations, soit à raison du génie que suppose l'invention des corrections qui sont nécessaires, quand on prend ces voies. Au reste, celle que j'ai suivie peut fournir les mêmes formules auxquelles on parvient par ces autres voies, ainsi qu'on va voir dans les Corollaires suivans.

COROLLAIRE I. On peut employer deux hauteurs du même astre, au lieu des hauteurs de deux astres. Dans ce cas (qui est celui du Probl. XXII. de l'Astron. Naut.), si l'astre observé est une étoile, les quantités exprimées par x' & y' dans la formule du probleme précédent, sont précisément les mêmes que x, y . Et si c'est le Soleil, ou

* Voyez la Préface de l'Astron. Nautique ; p. XXXIX.

une planete qui ait été observée, supposons pour un moment, que x' & y' sont aussi les mêmes que x , y , en faisant abstraction du changement de l'astre en déclinaison. Tous les termes de la formulé donnée ci-dessus, se trouvent donc multipliés par yy ; ainsi on doit supprimer ce facteur commun. D'ailleurs on a lieu d'abrégér la formule, en substituant o à l'expression $r - q$, ou $r + q$ du sinus verse de l'angle Ce : ainsi dans la formule

$$s = \frac{r^B}{A} \pm \frac{r}{A} \sqrt{(BB \pm AC)}, \quad A \text{ est } = ooxx + rrp p,$$

$$B = \pm ox(rh + rh'), \quad \& \quad C = ppyy + 2rohh' - (rh + rh')^2$$

(ou $= ppyy - 2rqhh' - rrhh - rrh'h'$). Ces valeurs de s & de A, B, C , reviennent à celles que donne l'Auteur de l'Astronomie Nautique, dans la solution du Probleme cité, solution dont j'ai emprunté ci-dessus jusqu'au discours.

SCHOLIE. Lorsque c'est le Soleil ou une planete, dont on a observé les hauteurs, si on veut avoir égard au changement de déclinaison que l'astre a pû souffrir dans l'intervalle des observations, il n'y a que deux ou trois partis à prendre. L'un est de revenir à la formule générale donnée ci-dessus; un autre est de substituer à l'un des élémens employés dans les formules particulieres qu'on vient de voir pour A, B, C , celui qui auroit eu lieu à peu près, si l'astre n'eût point changé en déclinaison, tout le reste étant le même. C'est ce second parti qu'a pris M. de Maupertuis. Il faut, dit-il, mettre pour h' le sinus de hauteur à laquelle on auroit observé l'astre, si la déclinaison étoit demeurée la même, &c. Et pour trouver le sinus de cette hauteur idéale, il cherche sa différence d'avec h' , c'est-à-dire, la variation dh' qui répond à la variation dx du sinus de la déclinaison, ou à celle dy de son cosinus. La valeur de dh' étant ajoûtée à h' , ou en étant retranchée, on a la

a la quantité qui doit être substituée à h' dans les sommes particulieres B, C . Or, pour avoir la valeur de dh' , M. de Maupertuis remonte à l'équation $u' = \frac{rrh' - rss}{cy}$, où il fait varier h', x & y , pendant que c, s & u' demeurent constantes. On a donc $du = 0$, de même que le numérateur de la fraction $\frac{rrydh' - rrh'dy - rsydx + rsxdy}{cyy}$, qui est $= du'$, d'où on tire : $dh' = \frac{rh'dy - sxdy + sydx}{ry}$, ou en substituant $-\frac{ydy}{x}$ à dx , parce que x croissant, y diminue, on a $dh' = \frac{rh'x - sxx - syy}{ryx} dy$, ou $= \frac{hx - rs}{yx} dy$, ou encore en substituant $-\frac{xdx}{y}$ à dy , $dh' = \frac{rs - hx}{yy} dx$, parce que $xx + yy = rr$.

Le sinus de la hauteur du pole se trouvant enveloppé dans l'expression de la quantité qui doit être ajoutée à h' , ou en être retranchée, pour avoir le sinus de la hauteur où eût été l'astre dans le moment d'une des observations; s'il n'eût point changé de déclinaison; il est visible qu'en prenant le parti qui vient d'être exposé, on seroit dans la nécessité de faire deux calculs sur la formule du Coroll. précédent, pour avoir la hauteur du pole avec l'exactitude désirée; car il faudroit faire un premier calcul sur cette formule, pour avoir un sinus approchant de celui de la hauteur du pole; ce sinus serviroit à trouver la valeur de dh' , puis ayant pris la différence, ou la somme de h & de dh' , & ayant substitué cette différence ou cette somme au lieu de h' , dans la formule du Corollaire, il faudroit réitérer le calcul sur cette formule, pour avoir un sinus plus approchant de celui de la hauteur du pole que le premier: ce seroit un circuit, & un circuit peu court.

Si l'on n'adopte pas le premier parti, il vaudroit mieux, j'ose le dire, prendre un troisieme parti, que celui qu'on

vient de voir. Il consiste, ce troisieme parti, à corriger le sinus trouvé par le premier calcul, fait sur la formule du Corollaire, lequel sinus n'est pas exactement celui de la hauteur du pole: je veux dire qu'il faudroit chercher l'erreur, que la négligence du changement de déclinaison fait commettre sur le sinus de la hauteur du pole: l'expression algébrique de cette erreur, n'est ni difficile à avoir, ni fort compliquée.

Pour l'avoir, je fais varier dans la formule $u' = \frac{rrh' + rsx}{cy}$ les quantités s, c, x, y , pendant que h' & u' demeurent constantes, & j'ai

$$du' = 0 = \frac{-rrh'cdy - rrh'ydc + rscxdy + rsxydc - rscydx - rcxyds}{ccyy}$$

substituant $-\frac{sds}{c}$ à dc dans le numérateur de cette fraction égale à zéro, parce que c croissant, s diminue; substituant encore $-\frac{ydy}{x}$ à dx , puis rr tant à $ss + cc$ qu'à $xx + yy$, & multipliant tous les termes par $\frac{cx}{rr}$, j'ai $(rxxxy - h'sxy)ds = (rsc - h'xcc)dy$; & $ds = \frac{h'x - rs}{h's - rx} \times \frac{cc}{xy} dy$. Telle est la valeur de l'erreur que la négligence d'un petit changement de déclinaison, indiqué par dy (qui est la différence des cosinus des deux déclinaisons données) apporte au sinus de la hauteur du pole. Retranchant donc cette valeur de la quantité erronée s trouvée en nombres, par la formule du Coroll. précédent, ou l'y ajoutant, on aura le sinus corrigé de la hauteur du pole. On voit sans doute que dy est positive, si la déclinaison de l'astre est moindre lorsqu'il est observé à la hauteur dont h' est sinus, que lorsqu'il l'est à la hauteur marquée par h , & que dy est négative dans le cas opposé. On doit encore comprendre, que lorsque l'astre déclinera du côté du pole



abaissé, ce qui donne $cyu' = rrh' + rsx$, il faut avoir égard à la différence des signes de ce cas, d'avec ceux de l'hypothese faite ci-dessus. On a dans celui-ci, $ds = \frac{h'x + rs}{h's + rx} \times \frac{cc}{xy} dy$. Au reste, si la valeur de ds se trouve positive, cela marque que le sinus peu exact s , peche par excès; ainsi il faut en retrancher ds , pour avoir le sinus corrigé de la hauteur du pole. Si au contraire, la valeur de ds est négative, le sinus erroné s peche par défaut, & pour le corriger, il faut lui ajouter ds prise positivement.

Au lieu de corriger le sinus non exact de la hauteur du pole, on peut corriger la hauteur même, à laquelle appartient ce sinus. Soit dD le petit arc qui est la différence des deux déclinaisons, & dL le petit arc du méridien, qui est l'erreur commise sur la hauteur du pole, en négligeant le changement de déclinaison, on a $dy = \frac{x dD}{r}$ & $ds = \frac{cdL}{r}$: substituant ces valeurs de dy & ds , dans la formule précédente, on a en général $dL = \frac{h'x + rs}{h's + rx} \times \frac{c}{y} dD$; cette formule-ci est un peu plus simple que celle-là, & plus avantageuse par conséquent, au moins pour ceux qui chercheront seulement la hauteur du pole, & non l'heure.

Quand on ne mettroit pas en pratique l'une ou l'autre correction que je viens de proposer, leurs formules ne laisseront pas d'avoir quelque utilité. Elles nous feront connoître de quelle conséquence peut être la négligence d'un petit changement de déclinaison (la formule donnée par M. de Maupertuis pour dh' , peut servir au même usage). Je remarque d'abord que quand l'astre décline du côté du pole abaissé, l'erreur sur la déclinaison en cause toujours une réelle sur la hauteur du pole, parce que le numérateur $h'xc + rsc$ de la fraction qui entre dans la valeur de dL , ne peut être que réel: mais lorsque l'astre

décline du côté du pôle élevé, l'erreur sur la hauteur du pôle peut être nulle, parce que l'on a alors $h'xc - rsc$ pour numérateur de ladite fraction, & que $h'x$ peut quelquefois être $= rs$. C'est ce qui arrivera, si le sinus h' de la hauteur à laquelle l'astre a été observé dans le moment pour lequel on lui attribue une fausse déclinaison, est à celui de la hauteur du pôle, comme le rayon est au sinus de la déclinaison, ou bien si $h' : r :: s : x$. Or, comme h' ne sçauroit surpasser r , & qu'au contraire elle est supposée moindre que r par la qualité du Probleme (puisque si on avoit $h' = r$, cette seule observation donneroit $s = x$, & $u' = r$): on voit déjà que la hauteur du pôle doit être moindre que la déclinaison de l'astre, pour avoir $ds = 0$; c'est-à-dire que l'astre doit être un de ceux qui passent entre le zénith & le pôle, dans la partie supérieure de leur cours, astres dont on sçait que l'angle azymuthal ne peut croître que jusqu'à un certain point, après quoi il décroît. L'algebre seroit bien capable de nous faire voir dans quel point de son cours un de ces astres arrive à la hauteur qui a pour sinus $h' = \frac{rs}{x}$; mais une legere connoissance de la doctrine de la sphere, ou l'inspection seule d'une sphere, suffisent pour discerner ce dont il s'agit.

Soit ici MhR une partie de l'horison, P le pôle, Ph le méridien, EM le vertical de l'astre, EPR une portion de son cercle horaire, nous avons (à cause de l'angle R commun aux deux triangles sphériques, PhR , EMR , & de leurs angles droits, h , M) cette analogie. $\sin. EM(h') : \sin. Ph(s) :: \sin. ER : \sin. PR$, qui devient $h' : s :: r : x$, si ER est un arc de 90 degrés, car PR sera égal à l'arc de la déclinaison, dont PE est le complément. Or dans ce cas, l'angle PEM est droit, ainsi le cours de l'astre (cours perpendiculaire au cercle horaire) est dirigé suivant EM ,

lorsque $h/x = rs$. C'est donc lorsque le vertical d'un astre est perpendiculaire à son cercle horaire, ou bien lorsque le cours d'un astre est perpendiculaire à l'horison (tems où on sçait que son angle azymuthal est le plus grand), que la petite erreur commise sur sa déclinaison, n'en cause point sur la hauteur du pole. Et cela est assez visible par la Figure citée, ou sur la sphere, indépendamment du calcul différentiel, qui fournit pour ce cas $hx = rs$. Car ER étant supposé perpendiculaire à EM , ce qui le fait valoir 90 degrés, si E est un très-petit arc, le sinus de l'arc R fera très-peu différent du sinus de ER , ou du sinus total, & doit même lui être réputé égal, si on traite E comme un infiniment petit. Or, les sinus des hauteurs EM , μ , sont en même rapport que les sinus de ER & de R . On a donc pour μ , le même sinus que pour EM ; ainsi on peut négliger sans conséquence, la petite différence de déclinaison E , c'est-à-dire, supposer l'astre en ϵ , au lieu qu'il est en E , lorsqu'il est question d'employer le sinus de la hauteur de cet astre, puisque celui de la vraie hauteur EM ne differe point de celui de la hauteur du point ϵ , où on le suppose.

L'analogie $h : s :: r : x$, fait voir que la hauteur où il faut qu'un astre ait été observé pour négliger quelque chose sur sa déclinaison, sans tirer à conséquence pour la hauteur du pole, doit être plus grande que cette hauteur & d'autant plus grande, que la déclinaison est plus petite. Ainsi les grandes hauteurs n'étant pas aisées à observer avec exactitude, la plus grande déclinaison du Soleil & des planetes, ne passant pas 29 degrés, & la hauteur du pole devant d'ailleurs être moindre que la déclinaison de l'astre, ce ne peut être que dans les pays où le pole est fort bas, que l'on ait l'avantage d'avoir $h/x = rs$, à l'égard du Soleil, ou d'une planete.

Puisqu'une petite erreur dans la déclinaison, n'en cause point sur la hauteur du pôle, dans le cas où l'astre est observé lorsqu'il monte ou descend perpendiculairement à l'horison, ou bien lorsque le vertical de l'astre est perpendiculaire à son cercle horaire, il en faut conclure que l'erreur sur la hauteur du pôle est au contraire la plus grande, dans le cas où l'astre est observé lorsque sa direction est parallèle à l'horison, ou bien lorsque son vertical se confond avec son cercle horaire, c'est-à-dire, lorsqu'il est au méridien. Or dans ce cas, l'erreur sur la hauteur du pôle est précisément de même quantité que celle sur la déclinaison; car le numérateur $h'xc + rsc$ de la fraction qui multiplie dD dans la valeur de dL , est alors égal au dénominateur $h'sy + rxy$ de cette fraction: c'est ce qu'il est aisé de reconnoître, en considérant que lorsqu'un astre est au méridien, sa hauteur est alors la somme, ou la différence de sa déclinaison, & de la hauteur de l'équateur (qui est complément de celle du pôle); on a donc par le Lemme second $rh' = cy - xs$, pour le cas où l'astre décline du côté du pôle abaissé, &c.

Il naît de ce qu'on vient de remarquer touchant l'erreur commise sur la hauteur du pôle, une conséquence pour la pratique; sçavoir que si l'on ne veut pas porter l'exactitude jusqu'à corriger la hauteur du pôle, trouvée par la formule du Corollaire précédent, les sinus & cosinus x, y , qu'il faut employer dans le calcul, sont ceux de la déclinaison qui convient au moment de l'observation où l'astre est le plus près du méridien; parce que le cours de l'astre étant moins oblique à l'horison dans l'autre moment, l'erreur qu'on commettra en lui attribuant une fausse déclinaison pour ce moment, fera de moindre conséquence sur la hauteur du pôle. C'est le parti qu'on pourra prendre, si les deux hauteurs sont fort différentes,

& surtout si elles ont été prises de même part du méridien ; mais si les hauteurs ont été prises de part & d'autre du méridien, & surtout si elles sont peu différentes, on doit faire autrement. Il faut attribuer à l'astre, une déclinaison moyenne entre celles qui lui appartiennent, aux momens des deux observations ; car si les deux hauteurs étoient égales, les erreurs que les attributions d'une fausse déclinaison à l'astre pour chacune des observations, causeroient séparément sur la hauteur du pôle, seroient égales, & d'ailleurs en sens contraires. Il s'opere donc une compensation de ces erreurs, en faisant conjointement les deux attributions d'une déclinaison moyenne à l'astre.

COROLLAIRE II. Si l'astre dont on a observé les hauteurs, est dans l'équateur (c'est le cas du Probl. 24. de l'Astron. Nautique), on a $x = 0$, & $y = r$; & la formule du probleme se réduit à $ppss = r^2pp \pm 2rqhh' - r^2hh = r^2h'h'$, d'où on tire $s = \frac{1}{p} \sqrt{(rrpp \pm 2rqhh' - r^2hh - r^2h'h')}$. Il sera encore plus commode de substituer $rr - cc$ à ss , car on en déduira $ppcc = \pm 2rqhh' + r^2hh + r^2h'h'$, & $c = \frac{1}{p} \sqrt{(\pm 2rqhh' + rrhh + rrh'h')}$. A l'égard de l'heure, on a pour ce cas-ci, $u = \frac{rrh}{c} = \frac{rhp}{\sqrt{(\pm 2rqhh' + rr(hh + h'h'))}}$.

COROLLAIRE III. Si l'on a le tems écoulé entre l'observation de la hauteur d'un astre, & le moment de son coucher, ou de son lever (ce qui est le cas du Probl. 23. de l'Astron. Nautique), on peut encore trouver la hauteur du pôle, & l'heure des observations, par la formule du Probleme précédent, ou par celle du Corollaire I, pourvû que l'on sçache combien la réfraction moins la parallaxe, élève les astres qui paroissent à l'horison ; car il n'y aura qu'à prendre le sinus de cette élévation

pour h' ; mais il faut aussi prendre garde aux signes qu'on donnera à la valeur de u' , tirée de la première formule du premier Lemme. Lorsqu'un astre paroît à l'horison, il est réellement abaissé sous ce cercle à l'égard de l'Observateur, & élevé au-dessus de ce cercle à l'égard de l'antipode de l'Observateur. Or cet antipode verroit sous le cercle de six heures l'astre qui décline du côté du pôle abaissé pour l'Observateur; & au contraire sous l'équateur, l'astre qui décline du côté du pôle élevé pour l'Observateur: il faut donc faire $cyu' = rrh' + rsx$, si l'astre qui paroît à l'horison décline du côté du pôle élevé, ou $= -rrh' + rsx$, s'il décline du côté du pôle abaissé.

SCHOLIE. M. de Maupertuis propose pour ce cas, de faire $= 0$ le sinus de la hauteur de l'astre, au moment de son coucher ou de son lever; & négligeant encore le changement de déclinaison que l'astre peut avoir souffert,

il trouve $\left. \begin{smallmatrix} 00xx \\ r r p p \end{smallmatrix} \right\} ss - 2r^2 o h x s = \left\{ \begin{smallmatrix} r r p p y y \\ - r^2 h h \end{smallmatrix} \right.$; puis il avertit que

la réfraction horisontale faisant paroître l'astre sur l'horison plus long tems qu'il n'y est réellement, cette formule ne donneroit la hauteur du pôle que peu exactement, à moins qu'on ne changeât quelqu'un des élémens qui y entrent. Au reste, il renvoie à son Problème 34, pour trouver le moyen de faire cette espèce de correction, qui consiste à retrancher du tems écoulé entre les deux observations, ce que la réfraction apporte de retardement au coucher de l'astre, ou d'avancement à son lever. Pour cela, M. de Maupertuis cherche la variation du' , qui répond à dh' , le reste étant constant; puis il met pour dh' l'arc dH du vertical, dont dh est sinus, & substitue à du'

sa valeur en arc dE de l'équateur (on a $du' = \frac{r dE}{r}$). Mais les sinus & cosinus de l'angle horaire, se trouvent enveloppés

enveloppés dans la formule qui provient de ces opérations (& quand on voudroit les en chasser, ce ne seroit qu'en y faisant rentrer les sinus & cosinus de la hauteur du pole). Or si ces quantités t' , u' , peuvent être supposées connues dans le cas propre de ce problème 34 *, ou dans les cas approchans, indépendamment de la hauteur du pole : il n'en est pas de même dans le cas où nous sommes, nous ne pouvons avoir t' & u' qu'après avoir trouvé la hauteur du pole, au moins grossièrement. Ainsi à suivre la proposition de M. de Maupertuis, il faudroit, pour avoir la hauteur du pole avec l'exactitude désirable, faire un circuit comme celui dont j'ai parlé Coroll. I.

On évitera ce circuit, si l'on cherche ce qu'une erreur commise sur la hauteur d'un astre, en cause sur la hauteur du pole; c'est-à-dire, si l'on cherche la valeur de la variation ds , qui répond à la variation dh' , le reste étant constant. Prenant donc la formule $u' = \frac{+rrh' - rsx}{cy}$,

qui sert au cas où l'astre décline du côté du pole élevé (il n'est pas nécessaire ici de pratiquer l'observation faite au Coroll. précédent); on a $du = \frac{rrh'dc - rrcdh' + rcsds - rsxdc}{c cy}$

$= 0$. Substituant $\frac{-ds}{c}$ à dc , & rr à $ss + cc$, il vient $ds = \frac{cc}{rx - h's} dh'$. Dans le cas où l'astre décline du côté du

pole abaissé, cyu' étant $= rrh' + rsx$, on a $ds = \frac{cc}{-rx - h's} dh'$.

Or, la réfraction élevant l'astre à l'égard de l'Observateur, dh est une quantité positive, si on la prend pour la différence de sinus de la hauteur vraie & de la hauteur apparente; ainsi l'erreur commise sur le sinus de la hauteur du pole, en négligeant l'effet de la réfraction, est négative, si l'astre décline du côté du pole abaissé; elle peut être

* On y suppose que la durée du jour solsticial est donnée,

positive, si l'astre décline du côté du pôle élevé, & elle est en effet positive, lorsque h est petite. Pour appliquer la formule générale qu'on vient de voir, au cas particulier de ce Corollaire, j'observe que si x est fort grand & s petit, on pourroit supposer $h' = 0$, & supprimer le terme sh dans cette formule, ce qui la feroit devenir $ds = \frac{rc}{\pm rx} dh'$: mais comme l'effet de la réfraction horizontale est assez considérable, il sera plus sûr de laisser ce terme, & on mettra pour h' ainsi que pour dh' , le sinus de la quantité, dont la réfraction, moins la parallaxe, élève un astre qui paroît à l'horison.

Au lieu de chercher l'erreur du sinus de la hauteur du pôle, grossièrement déterminé, on peut chercher l'erreur de cette hauteur même, & la formule en sera plus simple.

Mettant dH pour dh' , & $\frac{cdL}{x}$ pour ds , on a $dL = \frac{rc}{\pm rx - sh} dH$.

Il est visible que par le moyen de l'une ou de l'autre de ces formules, & de l'une de celles de la scholie du Coroll. premier, on pourra corriger conjointement les deux erreurs commises sur la hauteur du pôle, par la supposition que $h' = 0$ lorsque l'astre paroît à l'horison, & par la négligence du changement de déclinaison qu'il a pu souffrir pendant le tems écoulé entre les deux observations. C'est peut-être là un mérite pour ces formules.

Au reste, il est bon d'avertir que ces formules proposées pour corriger la hauteur du pôle, ne conviennent point au cas où l'astre est dans l'équateur, ou passe par l'équateur dans l'intervalle des observations, & qu'elles sont même peu justes lorsque la variation dh , qui est l'effet de la réfraction, ou qui répond à la variation du sinus de la déclinaison, n'est pas dans un petit rapport à ce

sinus, surtout si h est peu considérable & s aussi : mais ce défaut des formules ne vient point du calcul, il naît en premier lieu, de ce que l'une des suppositions sur lesquelles est fondé le calcul, ne peut pas être vraie lorsque l'astre est dans l'équateur ; car dans ce cas, la première formule du premier Lemme, devient $cu' = rh'$: ainsi en regardant c comme donné, on a $cd u' = rd h'$; la variation du' est donc réelle, si dh' est réelle ; on ne peut donc pas supposer $du = 0$ pour le cas où l'astre est à l'équateur, si h' est sujette à une variation réelle, telle qu'est celle que cause la réfraction, ou une erreur sur la déclinaison. Quant au cas où l'astre est fort voisin de l'équateur, on peut à la vérité y supposer $du' = 0$, quoique dh' soit réelle : mais alors la variation ds ou dL , qui répond à dh' est fort grande par rapport à elle, & d'autant plus grande que h' est plus petit, & que c est plus grand (les formules mêmes le font voir) : ainsi ds ou dL est dans un grand rapport à α ; on n'a donc pas droit de traiter ces variations comme étant d'un ordre de grandeur très-inférieur à α , ainsi que les principes du calcul différentiel requerroient qu'elles fussent.

Lors donc que la déclinaison de l'astre sera nulle ou petite, il ne sera pas à propos, je l'avoue, d'entreprendre de corriger la hauteur du pôle grossièrement déterminée, ou son sinus, de corriger, dis-je, ces quantités par les moyens que j'ai proposés ; il faudra, si l'on veut employer les formules du Coroll. I. ou du Coroll. précédent, revenir au genre de moyen indiqué par M. de Maupertuis (Prob. XXIII.), parce que ce moyen tend non à découvrir l'erreur ds , ou la variation dh' , mais à empêcher que s ne soit erroné, quoiqu'on prenne un faux h' ou un faux α pour le moment de l'une des observations ; je veux dire qu'il faut changer le tems écoulé entre les deux observa-

tions, en celui qui auroit lieu si l'astre ne changeoit point de déclinaison dans leur intervalle, ou si la réfraction n'augmentoît pas la durée de son apparition (la deuxième Partie fournira une manière d'éviter sinon le circuit, du moins la longueur du circuit, à quoi ce genre de moyen engage).

1°. Pour le cas où l'on veut attribuer à l'astre une déclinaison un peu différente de celle qu'il a en certain moment, prenant la variation des quantités u' , x' , y' dans la première formule du premier Lemme, $cyu' = r rh' - rsx'$, ou $= &c.$ en faisant h, s, c constans, l'on a $cydu' = -rsdx' - cu'dy'$; & substituant à du' sa valeur en arc dE de l'équateur, $(du' = \frac{r dE}{r})$, à dx' sa valeur $\frac{y dD}{r}$, à $-dy'$ sa valeur $\frac{x' dD}{r}$; l'on a enfin $dE = \frac{cu'x - rsy}{cyr'} dD$, ou, &c. L'arc dE étant réduit en tems, ce tems est ce qu'il faut ajoûter à celui qui s'est écoulé entre les deux observations, ou qu'il faut en retrancher, pour avoir le tems qui se seroit écoulé entre ces observations, si l'astre n'eût point changé de déclinaison. C'est du Probleme 37 de l'Astronomie Nautique que je tire cette formule pour dE ; j'y laisse les sinus s & t , ainsi que leurs cosinus, parce que ces quantités peuvent être déterminées concurremment par l'opération grossière qui doit précéder la recherche du vrai sinus s .

2°. Pour le cas où l'on veut attribuer à l'astre une hauteur un peu différente de celle qu'il a en certain moment, prenant la variation des quantités u' , h' dans la même formule du premier Lemme, $cyu' = rsx - r rh'$, ou, &c. en faisant s & x constans, l'on a (observant que dans le cas supposé, qui est celui où l'astre est vû au dessous du cercle de six heures, u' diminue, lorsque h' croît) $cydu' = rrdh'$.

Substituant à du' sa valeur $\frac{r'dE}{r}$, & pour dh' mettant $\frac{kdH}{r}$, on a enfin $dE = \frac{rrk}{cyt} dH$. Cette formule est tirée du Probleme 34 de l'Astron. Nautique : la précédente se combinera aisément avec celle-ci, pour le cas où l'on voudra attribuer tout-à-la-fois à l'astre, une déclinaison & une hauteur un peu différentes des siennes.

COROLLAIRE IV. Si l'on connoît le tems écoulé entre le lever ou le coucher de deux astres (ce qui est le cas du Probl. 39 de l'Astron. Nautique), on aura encore la hauteur du pole & l'heure des observations, par la formule du Probleme précédent, en mettant pour h ainsi que pour h' les sinus des quantités dont la différence de la réfraction & de la parallaxe horifontale, élèvent l'un & l'autre de ces astres, & observant la précaution marquée au Coroll. III.

Si l'on veut faire h & $h' = 0$, on le peut, en substituant au tems écoulé entre les deux observations, celui qui auroit eu lieu, cessant la réfraction & la parallaxe, ou en se réservant de corriger l'erreur que ces suppositions de h & $h' = 0$ causent sur la hauteur du pole, lorsqu'on fait servir dans le calcul le vrai tems écoulé entre les deux observations. Il ne s'agit plus que de voir à quoi se réduit la formule du Probleme. Lorsqu'on fait h & $h' = 0$, elle devient :

$$ss = \frac{rr pp yy y'y'}{rr pp y'y' + rr x'x' yy - 2rq xx' yy' + qq xx y'y'} . \text{ Et nommant } X$$

& X' les tangentes des déclinaisons des deux astres, nous pouvons rendre cette formule plus simple, en mettant pour x & x' leurs valeurs $\frac{Xy}{r}$, $\frac{X'y'}{r}$; car tous les termes de la fraction se trouveront multipliés par $y'y'$, on aura

$$\text{donc } ss = \frac{r^4 + pp yy}{r^4 pp + rr X'X' yy - 2rq XX' yy + qq XX yy} ; \text{ mettant dans}$$

le terme r^4pp , $xx + yy$ pour rr , ce qui fera $pprrxx + rpppyy$, puis substituant à $rrxx$, la valeur $XXyy$, tous les termes de la valeur de ss se trouveront multipliés par yy ; mettant enfin $rrXX$ pour $ppXX + qqXX$, on aura $ss = \frac{r^4pp}{rrpp + rrXX + rrX'X' - 2rqXX'}$. Et si l'on veut substituer $rr - cc$ à ss , on aura :

$$cc = \frac{rr(rrXX + rrX'X' - 2rqXX')}{rrpp + rrXX + rrX'X' - 2rqXX'}$$

Nous pouvons déduire de ces valeurs de ss & cc , qui ont un même dénominateur, $\frac{rrss}{cc}$

$$= \frac{r^4pp}{rrXX + rrX'X' - 2rqXX'}, \text{ ou bien } \frac{rs}{c}$$

$$= \frac{rrp}{\sqrt{(rrXX + rrX'X' - 2rqXX')}}. \text{ Or, } \frac{rs}{c} \text{ est la tangente}$$

de la hauteur du pôle. (La valeur que nous venons d'en trouver est la même que celle qu'en donne M. de Maupertuis, dans le Probl. cité).

Quant à l'heure, nous avons (puisque h est supposé

$$= 0) rsx = cyu, \text{ ou } \frac{rs}{c} = \frac{yu}{x} = \frac{ru}{X} \text{ (parce que } y:$$

$$x::r::X) \text{ donc } u = \frac{rpX}{\sqrt{(rrXX + rrX'X' - 2rqXX')}}. \text{ Cette va-}$$

leur de u sera exacte, si on retranche du tems écoulé entre les observations, la différence des retardemens que la réfraction apporte au coucher de chaque astre, ou des avancemens qu'elle apporte à leur lever; ou bien si l'on retranche de ce tems, ou si on lui ajoute la somme de l'avancement & du retardement, lorsqu'on aura observé le lever d'un des astres & le coucher de l'autre, sinon il faudra chercher pour u la correction dont il aura besoin.

La formule de cette correction est $du = \frac{rr}{cy} dh$.

Cette formule étant fort simple, on pourra s'en servir dans le cas du Coroll. précédent, après avoir déterminé grossièrement l'heure sur le sinus peu exact de la hauteur du pôle, supposé qu'on ne se soucie pas d'avoir ce sinus même corrigé.

SCHOLIE. I. Au lieu d'observer les astres au moment de leur lever ou de leur coucher, c'est-à-dire, dans un tems où ils sont au-dessous de l'horison rationel, il seroit plus à propos, par deux raisons, de les observer, s'il est possible, lorsqu'ils sont dans cet horison. La premiere est visible, on éviteroit par-là le besoin de correction.

Je tire la deuxieme de la Piece déjà citée de M. Bouguer. Cet habile homme y a fait un paragraphe exprès (c'est le troisieme de la deuxieme Partie), pour montrer qu'il vaut mieux tâcher d'observer les astres lorsqu'ils sont exactement dans l'horison rationel, que de les observer à l'horison sensible; & il fonde ce conseil, sur ce que la réfraction horizontale est sujette à des irrégularités deux fois plus grandes environ, que celles de la réfraction qu'éprouve l'astre, lorsqu'il est dans l'horison rationel. Dans ce même paragraphe, M. Bouguer propose un expédient à l'égard du Soleil, pour l'observer à peu près dans l'horison, c'est de l'observer lorsque le bord inférieur de son disque paroît élevé au-dessus de l'horison, à la vûe simple, d'environ la moitié de son diametre apparent, parce que le diametre est à peu près égal à la quantité dont la réfraction l'élève alors. L'Auteur de l'Astron. Nautique propose, pag. 88, une pratique qui revient à l'expédient de M. Bouguer.

II. Il y a un cas approchant de celui du Corollaire précédent, mais où il ne doit pas être question de chercher l'heure, parce qu'on la suppose connue exactement, ou à peu près, sans calcul, & avant d'avoir la hauteur

du pole. C'est à l'invention de cette hauteur seulement ; que se dirige la considération de ces cas. On suppose que la durée de l'apparition d'un astre au-dessus de l'horison , ou de son occultation sous ce cercle , est connue , ou pour parler autrement , que le tems écoulé entre le lever & le coucher d'un astre , ou entre son coucher & son lever est connu (si l'astre décline du côté du pole abaissé , c'est la durée de son apparition , & s'il décline du côté du pole élevé , c'est la durée de son occultation , que l'on a dû tâcher d'observer , afin que l'observation se représente moins de l'imperfection de l'instrument employé pour mesurer le tems). En parlant ici d'un astre , j'entends le Soleil , ou une des planetes les plus lumineuses , parce que les étoiles ne sont pas visibles à l'horison ; ainsi l'astre a pû souffrir , dans le cas dont il s'agit , un changement de déclinaison auquel il faut avoir égard. Or , un moyen sûr pour cela , c'est de se servir de la formule du Coroll.

$$\text{précédent } \frac{rs}{c} = \frac{rrp}{\sqrt{(rrXX + rrX'X' + 2rqXX')}} \quad (\text{je mets ici}$$

le signe $+$ devant le terme où entre q , parce que la durée de l'apparition ou de l'occultation d'un astre situé dans le zodiaque , est ordinairement plus grande que six heures , & moindre que dix-huit) , on obtiendra , dis-je ; la hauteur du pole avec une grande précision , par cette formule : mais notre cas ne requiert pas absolument qu'on prenne la peine de s'en servir. Lorsque la déclinaison de l'astre ne sera pas fort petite , il suffira de lui en attribuer une moyenne entre celles de son lever & de son coucher , & l'on pourra employer un autre calcul , dont j'emprunte la formule du Probl. 32 de l'Astron. Nautique. Soit X la tangente de la déclinaison moyenne entre celles X , X' , du lever & du coucher de l'astre , & Y sa cotangente ; h étant supposée $= 0$, nous avons $\frac{rs}{c}$

$$= \frac{yu}{x} \left(= \frac{ru}{X} \right) = \frac{Yu}{r}, \text{ parce que } 'y : 'x :: 'Y : r.$$

(C'est la dernière valeur de $\frac{rs}{c}$, dont il faut faire usage dans la pratique, parce qu'elle indique un calcul plus facile que celle $\frac{ru}{X}$, qui la précède. On va voir pourquoi j'ai présenté celle-ci).

M. de Maupertuis attribue à l'astre, pour le cas où nous sommes, une des deux déclinaisons qu'il a aux momens de son coucher & de son lever, & propose de retrancher ou d'ajouter au tems écoulé entre ces momens, ce que le changement de déclinaison apporte de retardement ou d'avancement à l'un de ces momens : mais je m'imagine que le calcul de la hauteur du pôle, fait selon l'idée que j'ai proposée, équivaut bien dans tous les cas, à la double opération prescrite par M. de Maupertuis ; c'est-à-dire, qu'il donne un résultat aussi exact [& je m'étonne même que cet habile homme n'y ait pas pensé]. On peut se rappeler ce que j'ai dit ci-dessus (à la Schol. du Coroll. I.), pour établir la bonté de l'expédient dont il s'agit, & je pourrois m'en tenir à cela ; cependant je vais encore montrer la chose par une autre voie, afin de lever tout scrupule.

Deux quantités, dont la différence est petite en comparaison de ces quantités, étant élevées chacune au quarré, il est aisé d'appercevoir que la somme de ces deux quarrés ne surpasse que de bien peu le double du produit de ces deux quantités. Soient a , & $a + d$ ces quantités, le double de leur produit est $2aa + 2ad$, & la somme de leurs quarrés est $2aa + 2ad + dd$, qui ne surpasse la première somme que du quarré dd , qui est bien peu de chose, & que l'on peut négliger. Nous pouvons donc mettre $2XX'$ au lieu de $XX + X'X'$, dans la formule

Prix. 1745.

L1

rigoureuse $\frac{rs'}{c} = \frac{rrp}{\sqrt{(rrXX + rrX'X' + 2rqXX')}} , \& \text{ faisant}$
 $'X = \sqrt{XX'}$, nous aurons $\frac{rs}{c} = \frac{rrp}{'X\sqrt{(2rr + 2rq)}} .$ Or ,
 je dis que cette valeur de $\frac{rs}{c}$ est précisément la même
 que celle $\frac{ru}{'X}$, que j'ai proposée ci-dessus : car on a
 par le Lemme second, & par l'hypothese du cas où nous
 sommes, $rp = 2ut$, & $pp = \frac{4uut}{rr} = \frac{4uut}{tt+uu}$, & $qq = rr$
 $- pp = \frac{(tt+uu)^2 - 4uut}{rr} = \frac{(tt-uu)^2}{rr}$; donc $q = \frac{tt+uu}{r}$,
 & $rq = tt - uu$. Substituant donc dans la dernière éga-
 lité, $2ut$ à rp , $tt - uu$ à rq , & tt à $rr - uu$, nous aurons
 enfin $\frac{rs}{c} = \frac{2rut}{'X\sqrt{4tt}} = \&c.$

J'ai pris ici $'X$ moyenne géométrique, entre les deux
 déclinaisons X & X' du lever & du coucher de l'astre :
 mais il ne sera pas nécessaire dans la pratique de cher-
 cher un $'X$ qui soit tel précisément, il faudra prendre
 la déclinaison qui convient à peu près au tems du passage
 de l'astre par le méridien ; ce qui ne coutera pas plus
 pour ce tems, que pour un autre quelconque.

Si on supposoit que les observations du lever & du
 coucher de l'astre se fissent en des lieux différens en lati-
 tude, mais de peu différens, la formule $\frac{rs}{c} = \frac{'Yu}{r}$
 donneroit assez exactement la latitude moyenne entre
 celles de ces lieux ; & si leur différence en latitude est
 connue à peu près, on aura aisément la latitude de l'un
 ou de l'autre, après avoir trouvé la moyenne (la justesse
 de cette pratique est sensible, par ce que l'on vient de
 voir à l'égard de la déclinaison). Mais M. de Maupertuis
 propose un autre procédé pour ce cas ; c'est de retran-
 cher ou d'ajouter à la durée de l'apparition (ou de

l'occultation) de l'astre, ce que le changement de l'Observateur en latitude a apporté pour lui d'augmentation ou de diminution à cette durée, après quoi l'on cherchera la hauteur du pôle, pour l'un ou l'autre des lieux où le lever & le coucher de l'astre ont été observés. Or, ce n'est qu'à l'aide du calcul différentiel, que M. de Maupertuis trouve la formule $dE = \frac{r^3 x}{cc y^2} dL$, pour l'altération causée à la durée dont il s'agit, par le changement dL de l'Observateur en latitude. Le résultat du procédé exposé par ce Sçavant, ne peut donc être plus juste que celui de l'opération que je viens d'indiquer, & celui-là le feroit même un peu moins que celui-ci, parce que M. de Maupertuis fait entrer dans la valeur de dE , le cosinus de la hauteur du pôle grossièrement déterminée.

(Si les deux lieux où le lever & le coucher de l'astre ont été observés différoient notablement en latitude, on n'auroit qu'imparfaitement leur latitude moyenne, par la formule $\frac{sr}{c} = \frac{Yu}{r}$, & par conséquent on n'auroit aussi qu'imparfaitement leurs latitudes propres. Mais si l'on étoit fort curieux d'avoir l'une ou l'autre de ces latitudes avec une grande précision, j'avertis en passant, qu'on y parviendroit par une équation du quatrième degré, pour la tangente de la hauteur du pôle de l'un des lieux. Voici les fondemens de cette équation. Soient s & s' les hauteurs du pôle pour les deux lieux, c , c' leurs cosinus; β le sinus de la différence donnée de ces lieux en latitude, β son cosinus; t , t' les sinus des angles horaires au lever de l'astre pour l'un des lieux, & à son coucher pour l'autre; u , u' leurs cosinus: on a $u' = \frac{s'X}{c}$, $u = \frac{sX}{c}$, $t = \frac{1}{c} \sqrt{(rrcc - ssXX)}$; il faut substituer ces va-

leurs de u' , u , t dans l'équation $ru = -qu + pt$; puis observant que $rs' = c\delta + s\beta$, & que $rc' = s\delta + c\beta$, dans le cas où les deux lieux sont de même part de l'équateur, il faut chasser s' & c' , par le moyen de ces équations, &c.)

Moins la différence de latitude des deux lieux où le lever & le coucher de l'astre auront été observés sera petite, & moins parfaite sera l'invention de la latitude moyenne entre les leurs. Or, c'est sur mer que l'hypothèse du changement de lieu en latitude peut devenir réelle; & plus l'intervalle entre les momens du lever & du coucher de l'astre sera long, plus la différence des lieux où l'on observera ces momens pourra être grande: d'ailleurs cette différence sera connue avec d'autant moins d'exactitude, puisqu'elle ne peut l'être que par estimation. Voilà deux nouvelles raisons pourquoi le Navigateur doit observer la durée de l'occultation de l'astre, par préférence à celle de son apparition, lorsque l'astre déclina du côté du pôle élevé. Et comme le Navigateur peut aussi changer de lieu en longitude (ce qui allonge ou diminue la durée, soit de l'apparition, soit de l'occultation de l'astre, & oblige de la corriger par la soustraction ou l'addition du tems qui répond à la différence des longitudes), il naît encore de-là une raison pour observer la moindre de ces durées, plutôt que la plus grande. Ces mêmes considérations font voir qu'il est à souhaiter que la déclinaison de l'astre soit considérable, sur-tout si la hauteur du pôle est petite. Il est vrai que moins la déclinaison de l'astre & la hauteur du pôle seront grandes, & moins les irrégularités de la réfraction horizontale en apporteront sur la durée de l'apparition ou de l'occultation de l'astre, & moins par conséquent elles causeront d'erreur par elles-mêmes dans la recherche de la hauteur du

pole ; mais d'un autre côté , un même degré d'erreur dans l'observation de cette durée , en produit une d'autant plus grande dans le calcul de la hauteur du pole , que la déclinaison de l'astre & que cette hauteur sont petites. Ne commît-on donc d'erreur sur la durée de l'apparition ou de l'occultation d'un astre , qu'en conséquence de l'irrégularité de la réfraction horisontale , il n'y a pas d'avantage (ou il y en a peu) à ce que la déclinaison de l'astre soit petite. Au reste , voici le rapport d'une erreur dans la durée dont il s'agit , erreur mesurée par le petit arc dE de l'équateur , à celle dL qui en dérive sur la hauteur du pole.

Nous avons , par l'hypothese , $rsx = cyu$. Faisant varier u, s, c , pendant que x est constant , nous aurons $rxds = cydu + uydc$; mettant pour ds & dc leurs valeurs $\frac{cdL}{r}$ & $-\frac{sdL}{r}$, & pour du sa valeur $\frac{tdE}{r}$, puis substituant à yu sa valeur $\frac{rsx}{c}$, à cyr sa valeur , $r\sqrt{(ccyy - ssxx)}$ ou $rr\sqrt{(cc - xx)}$, multipliant tout par c , & mettant rr pour $cc + ss$, nous aurons enfin $rx dL = c\sqrt{(cc - xx)} dE$. Prenons maintenant un exemple ou deux , afin de voir sensiblement le rapport des deux erreurs dL, dE . Soient r, c, x , dans la raison des nombres 8 , 5 , 3 , ce qui suppose que la hauteur du pole est de $51^{\circ} 19'$ & la déclinaison de l'astre de $22^{\circ} 2'$, & d'où il suit que son angle horaire au moment de son lever ou de son coucher , est de $30^{\circ} 21'$, en sorte que la durée de son apparition sur l'horison est de plus de 16 heures , & celle de son occultation de moins de 8 heures. Posé qu'il décline du côté du pole élevé , nous aurons $8 \times 3 dL = 5 \sqrt{(16)} dE$, ou bien $dL = \frac{5}{8} dE$; mais si nous mettons r, c, x , dans la raison des nombres $\frac{410}{2}$, 41 , & 9 , ce qui suppose que la hauteur du pole est

de $25^{\circ} 51'$, la déclinaison de l'astre, de $11^{\circ} 24'$, & d'où il suit que son angle horaire, au moment où il est à l'horison rationel, est seulement de $5^{\circ} 36'$, en sorte que la durée de son séjour d'un côté de l'horison, est de 12 heures trois quarts, ou de 11 heures un quart, nous aurons $410 dL = 41 \times 40 dE$, ou $dL = 4 dE$. Et si nous supposons maintenant que l'erreur commise sur le tems écoulé entre les deux passages de l'astre à l'horison rationel, est d'une minute d'heure, qui en vaut 15 de l'équateur, l'erreur sur la hauteur du pole fera en ce cas d'un degré.

On peut voir, par ces exemples, jusqu'où on peut compter sur la proposition de trouver la hauteur du pole, par l'observation de la durée du jour, c'est-à-dire, du séjour du Soleil au-dessus de l'horison, faite dans l'Astron. Nautique [Problème dont on assure qu'il n'y a que deux jours dans l'année, sçavoir ceux de l'équinoxe, où l'on ne puisse pas le pratiquer. Préf. pag. xxvij]. Au reste, je dois dire que ma remarque peut bien faire sentir que cette proposition doit être limitée, mais que je ne m'ingere point pour cela de prétendre qu'on doive absolument la rejeter; j'y applaudis au contraire, & c'est pour en faciliter la pratique, que je me suis engagé dans cette longue digression. En effet, si l'on tâche d'observer le Soleil au moment du passage de son centre par l'horison rationel, il ne restera aucune difficulté qui puisse dégoûter de faire usage de ce Problème, auquel M. de Maupertuis s'est tant appliqué [pour me servir de ses termes, pag. 73], & au sujet duquel il a donné plusieurs belles choses, mais qui, pris d'une certaine façon, est moins difficile par ses circonstances, qu'il n'a paru d'une première vûe à cet habile Astronome.

P R O B L E M E I I I.

La hauteur d'un astre, & l'angle azymuthal d'un autre étant donnés, avec leurs déclinaisons & le tems écoulé entre les observations, trouver l'heure de l'observation du premier astre.

Il est encore préalable de trouver la hauteur du pôle.

On a, par la premiere formule du premier Lemme,

$$u = \frac{rrh - rsx}{cy}; \text{ par conséquent } uu = \frac{r^2(rrhh - 2rshx + ssxx)}{ccyy},$$

$$\& \text{ } tt = rr - uu = \frac{rr(ccyy - rrhh + 2rshx - ssxx)}{ccyy}$$

$$= \frac{rr(rryy - rrhh + 2rshx - rrss)}{ccyy}, \& \text{ } t = \frac{r}{cy} \sqrt{(rryy - rrhh + 2rshx - rrss)}.$$

Par le second Lemme on a, dans le cas de la Fig. 5, $ru' = qu - pt$, $rt' = qt + pu$; substituant dans ces deux équations les valeurs qu'on vient de

$$\text{voir pour } u \& t, \text{ on a } u' = \frac{qrh - qsx - p\sqrt{(rryy - rrhh + 2rshx - rrss)}}{cy}$$

$$\& \text{ } t' = \frac{prh - psx + q\sqrt{(rryy - rrhh + 2rshx - rrss)}}{cy}.$$

D'un autre côté, on a par la troisieme formule du premier Lemme, $rny't' + rmcx' = msy'u'$, ou, en nom-

mant $N = \frac{rn}{m}$ la cotangente de l'angle azymuthal, &

$X' = \frac{rx'}{y'}$ la tangente de la déclinaison, $Nt' + cX' = su'$.

Substituant dans cette égalité les valeurs de t' & u' , multipliant tous les termes par cy , & substituant $rr - ss$ à cc , on a :

$$\begin{aligned} +X'y\} ss + Np\} s - rrX'y &= ps\} \sqrt{(rryy - rrhh + 2rshx - rrss)} : \\ -qx\} + rqh\} - rNph & Nq\} \end{aligned}$$

& les deux membres de cette égalité étant élevés au quarré, on aura pour s une équation du quatrieme degré,

sur laquelle je ne m'arrêterai pas, parce qu'un Problème dont le calcul est si compliqué, ne peut être d'usage. *Il est de théorie plutôt que de pratique, & c'est pour ne rien laisser sans discussion de ce qui peut appartenir à mon sujet, que je le présente ainsi que le suivant.*

PROBLEME I V.

Les angles azymuthaux de deux astres étant donnés, avec leur déclinaison, & l'intervalle des observations, trouver l'heure, ou la hauteur du pôle.

On a, par la troisième formule du premier Lemme : $Nt + cX = su$, & $N't' + cX' = su'$. Substituant dans la deuxième de ces égalités les valeurs de t' & u' , fournies par le second Lemme, & mettant $\sqrt{(rr - ss)}$ pour c , & $\sqrt{(rr - uu)}$ pour t , il ne restera que deux inconnues, s & u , dont on pourra chasser celle qu'on voudra, puisqu'on a pour elles deux équations ; mais l'équation qui en résulteroit pour le Problème, seroit d'un degré très-élevé, & il est inutile que je m'y arrête.



C H A P I T R E II.

*Moyens de trouver l'heure, la hauteur du Pole
étant connue.*

P R O B L E M E V.

L *La hauteur du pole, la déclinaison & la hauteur d'un
astre étant donnés, trouver l'heure de l'observa-
tion.*

La premiere formule du premier Lemme, donne $u = \frac{rrh + rsx}{cy}$ pour le cas où l'astre décline du côté du pole abaissé, $u = \frac{rrh - rsx}{cy}$ pour le cas où il décline du côté du pole élevé, & est au-dessus du cercle de six heures, &c.

P R O B L E M E VI.

*La hauteur du pole, la déclinaison & l'angle azymuthal
d'un astre étant donnés, trouver l'heure de l'observation.*

La troisieme formule du premier Lemme, donne $rnyr = \pm msyu \pm rmcx$ pour les cas où l'astre est au-dessus de l'équateur & du cercle de six heures; ou bien $Nt = \pm su \pm cX$. Elevant les deux membres de cette égalité au quarré, & substituant $rr - uu$ à tt , on a

$$\left. \begin{matrix} ss \\ NN \end{matrix} \right\} uu - 2scXu = \begin{cases} +rrNN \\ -ccXX \end{cases}, \quad \& u = \pm \frac{scX}{ss + NN}$$

$$\pm \frac{N}{ss + NN} \sqrt{(rrNN + rrss - ccXX)}.$$

Prix. 1745.

Mm

Ces deux valeurs de u sont positives, & la moindre est pour le cas où l'astre est situé du côté du premier vertical, qui regarde le pôle-élevé; la plus grande est pour le cas où l'astre est de l'autre côté de ce vertical.

Lorsque l'astre est au-dessous de l'équateur, ou du cercle de six heures, on a $Nt = su + cX$, & $u = -\frac{scX}{ss + NN} + \frac{N}{ss + NN} \sqrt{(rrNN + rrss - ccXX)}$.

PROBLEME VII.

La hauteur du pôle étant connue, & deux astres E, E' , dont les déclinaisons & les ascensions droites sont données, étant vus dans un même vertical, trouver l'heure de l'observation.

Soient X, X' les tangentes des déclinaisons des deux astres, t, t' les sinus de leurs angles horaires, u, u' leurs cosinus; & soit a le sinus de leur différence d'ascension droite, & b son cosinus.

La troisième formule du premier Lemme donne, pour le cas où les deux astres sont au-dessus de l'équateur, & du côté du premier vertical, où n'est pas le pôle élevé, $\frac{su - cX}{t} = \frac{rn}{m} = \frac{su' - cX'}{t'}$, ou (en supposant que E' est le supérieur des deux astres) $stu' - st'u = cX't - cXt'$. Or par le Lemme second, Fig. 8. (où e est l'arc dont le sinus vient d'être nommé a), $-t'u + tu' = ra$, & $t' = \frac{bt - au}{r} = \frac{bt - a}{r} \sqrt{(rr - tt)}$, on a donc $rrras - rcX't + bcXt = acX \sqrt{(rr - tt)}$, & après avoir quarré chaque membre,

$$\left. \begin{array}{l} + rrcXX \\ - 2rbccXX' \\ + rrcX'X' \end{array} \right\} tt - 2r^3acsX' \left. \begin{array}{l} \\ + 2r^2bacsX \end{array} \right\} t = + rraaccXX - r^4aa ss.$$

Et prenant $A = rrc\cos XX - 2rbccXX' + rrc\cos X'X'$, $B = +rracsX' - rbacsX$, & $C = aaccXX - rraass$, on a, pour le sinus de l'angle horaire de l'astre inférieur E ,

$$t = \frac{r}{A} B \pm \frac{r}{A} \sqrt{(BB \pm AC)}.$$

SCHOLIE I. Ce Problème, pour le cas qu'on vient de voir, est le XXVI^e de l'Astron. Nautique : mais il y a cinq autres cas * que M. de Maupertuis n'a pas touchés, & dont il n'est peut-être pas hors de propos d'en dire un mot. Les deux astres peuvent être du côté du premier vertical, où est le pôle élevé, soit tous deux au-dessus du cercle de six heures, soit tous deux au-dessous, soit l'un au-dessus & l'autre au-dessous de ce cercle ; & dans chacun de ces trois cas on trouve les termes de l'équation pour t , affectés des mêmes signes que ci-dessus (par exemple, E'' étant au-dessus du cercle de six heures, & E au-dessous, on a $\frac{su+cX}{t} = -\frac{su'+cX'}{t'}$, & $su'+st'u = cX't - cXt'$; or dans ce cas, $tu' + t'u = ra$, & $t' = bt + a\sqrt{(rr - tt)}$, posé que la différence d'ascension droite des deux astres soit au-dessous de 90 deg. ce qui est le cas de la Fig. 6, on a donc $rras - rcX''t + bcXt = -acX\sqrt{(rr - tt)}$, ce qui revient au même que ci-dessus). En effet, les signes doivent être les mêmes dans l'équation pour t , tant que ceux des quantités XX'' sont les mêmes. Si donc l'une de ces quantités, ou toutes deux, sont posées en sens contraire à celui de ces premiers cas, on doit avoir d'autres signes dans l'équation dont il s'agit. Soit, par exemple, E'' au-dessus de l'équateur, & E au-dessous, on a $\frac{su+cX}{t} = \frac{su'-cX''}{t''}$,

* Je ne compte ici que les cas où les deux astres ont été vus de même part du zénith, cas dans lesquels la différence de ces astres en ascension droite, est moindre que 90 degrés, pour l'ordinaire.

& $stu'' - st''u = cX''t + cXt''$. Or, $tu'' - t''u = ra$, & $t''t = bt - a\sqrt{(rr - tt)}$, donc $rras - rcX''t - bcXt = -acX\sqrt{(rr - tt)}$, &

$$\left. \begin{array}{l} + rccXX \\ + 2brccXX'' \\ + rrcX''X'' \end{array} \right\} tt - \left. \begin{array}{l} - 2r^3acsX'' \\ - 2br^2acsX \end{array} \right\} t = -raaccXX - r^4aass.$$

Si les deux astres sont au-dessous de l'équateur, les termes du coefficient de tt ont les mêmes signes que dans les premiers cas; mais l'on a $+2r^3acsX'' - 2br^2acsX$, pour coefficient de t .

II. Nous avons deux valeurs pour le sinus de l'angle horaire de l'astre inférieur; il s'agit de voir s'il n'y auroit point lieu de se méprendre dans le choix qu'il faut faire entre ces valeurs, & se prémunir contre ce danger. Je remarque donc que les astres qui peuvent se trouver dans un même vertical, pour les endroits qui ont une certaine latitude, ne se rencontrent pas ainsi une seule fois dans leur révolution journalière, mais deux fois. Pour dire la chose autrement, si le grand cercle de la sphere sur lequel sont deux astres, peut passer par le zénith de quelque endroit, il y passe deux fois en 24 heures. Il est vrai que deux astres qui étoient dans certaine position à l'égard du zénith & de l'horison, lorsqu'ils se sont rencontrés une fois à un même vertical, peuvent n'être pas dans la même position, lorsque le grand cercle sur lequel ils sont, passera une deuxième fois par le zénith. Si c'est par le sens de la vue, & à l'aide d'un fil à plomb, que l'on sçait que deux astres ont été dans le même vertical en certain moment, il faut qu'ils aient été alors au-dessus de l'horison, & de même part du zénith; & il peut se faire que dans leur seconde rencontre, à un même vertical, ils soient de part & d'autre du zénith, ou bien que celui qui étoit supérieur à l'autre dans la

première rencontre, lui soit inférieur dans la seconde, &c. mais il est possible aussi que dans l'une & l'autre, le même astre soit supérieur, &c.

Si l'astre dont on cherche l'angle horaire, n'est pas de même part du méridien dans ses deux rencontres à un même vertical avec l'autre astre, les racines de notre équation pour t doivent être de qualités contraires, & c'est la positive qui convient au cas observé : la négative est pour le cas de l'autre rencontre, & on l'eût trouvée positive, si on eût fait le calcul directement pour ce cas.

Mais si l'astre dont on cherche l'angle horaire, est du même côté du méridien dans l'une & l'autre rencontre, les deux racines de notre équation doivent être positives, & il faut sçavoir choisir entre elles. Je remarque sur cela que dans ce cas, c'est de différens côtés du premier vertical, qu'est situé l'astre dont on demande l'angle horaire, en ses deux rencontres avec l'autre astre à un même vertical. Il faut donc considérer de quel côté du premier vertical a été observé l'astre dont on cherche l'angle horaire. Si ç'a été du côté où est le pôle élevé, c'est la plus grande des deux racines qui est la vraie valeur de t : si c'est de l'autre côté du premier vertical, & au-dessus de l'équateur, qu'a été observé l'astre, c'est la moindre des deux racines qui est la vraie valeur de t . Enfin, si c'est au-dessous de l'équateur que l'astre a été observé, c'est la plus grande racine qui se retrouve vraie valeur du sinus demandé. Je remarque au reste, que les deux racines positives, peuvent être utiles à l'égard de certains astres, entre ceux qui déclinent du côté du pôle élevé, parce que ces astres peuvent se trouver au-dessus de l'horison, dans leur double rencontre dont il s'agit ; mais que d'autres étant plongés sous l'horison dans l'une de ces rencontres, une seule des racines positives fera utile à leur

égard. Il n'y a pareillement qu'une seule des racines positives qui puisse être d'usage, à l'égard des astres qui déclinent du côté du pôle abaissé. Or, ce n'est pas un défaut au calcul, de fournir dans le cas en question deux valeurs positives pour le sinus de l'angle horaire de ces astres. Le calcul roule sur la supposition que deux astres sont dans un même vertical, on laisse à l'écart la considération de leur hauteur. Il n'importe donc pour la justesse du résultat du calcul, que la hauteur de l'astre dont on cherche l'angle horaire, soit positive ou négative, c'est-à-dire, qu'il soit au-dessus ou au-dessous de l'horison : il suffit, pour avoir deux valeurs positives de l'angle horaire d'un astre, qu'il soit de même part du méridien au moment de ses deux rencontres avec un autre astre à un même vertical. C'est seulement par la nature des observations que le service de la formule qui contient cette double valeur positive est limité.

Au lieu de former une équation pour le sinus de l'angle horaire de l'un des astres, on pourroit en faire une pour le cosinus de cet angle, & l'on seroit pareillement obligé d'entrer dans de certaines discussions, pour faire un bon choix entre les deux valeurs qu'on trouveroit pour ce cosinus.

III. L'équation pour t ne se borne pas aux cas où les deux astres sont de même part du zénith (cas qui sont les seuls qui puissent être observés à l'aide d'un simple fil à plomb), elle embrasse ceux-mêmes où les deux astres sont de différens côtés de ce point. C'est pourquoi je proposerai dans la suite un moyen d'observer des astres ainsi disposés à leur rencontre à un même vertical. Si ce moyen (ou quelque autre de même fin) est mis en usage, il faudra prendre garde que la différence des deux astres en ascension droite, pourra alors être plus grande que 90 degrés,

& que le cosinus b de cette différence, deviendra dans ce cas une quantité négative, ce qui obligera à changer les signes des termes où elle se trouvera linéaire.

IV. Le Probleme dont il s'agit, étant un des plus utiles par la qualité de l'observation qu'il suppose; mais conduisant, par la solution algébrique & directe qu'on vient d'en voir, à un calcul fort compliqué pour la pratique, je donnerai dans la suite un moyen indirect de le résoudre, qui sera assez simple, certaines Tables, qui auront plus d'un usage, étant une fois faites.

V. Il n'est pas nécessaire pour le Probleme proposé; que les deux astres aient été vus dans un même vertical au même moment; c'est la même solution, si ces astres ont passé par certain vertical en momens différens, pourvu qu'on connoisse le tems écoulé entre ces passages. Alors a dans la formule, ne marquera pas simplement le sinus de la différence d'ascension droite des deux astres, mais il marquera le sinus de la somme ou de la différence de l'angle du tems écoulé entre les deux observations, & de celui qui répond à la différence d'ascension droite des deux astres. (J'ai spécifié au Probleme second, en quel cas il faut prendre la somme de ces angles, & en quel cas il faut prendre leur différence. C'est une regle générale pour toutes les observations qui ne sont pas contemporaines.)

COROLLAIRE I. On peut observer le tems écoulé entre les deux passages d'un même astre par le même vertical; & nommant $o = r \mp b$, le sinus verse de l'angle de ce tems, on aura:

$$2orccXXt - 2orraacsXt = rraaccXX - r^4aass,$$

$$\& t = \frac{ras \pm ra}{2cX} \sqrt{\left(ss \mp \frac{2ccXX - rrs}{or} \right)}.$$

COROLLAIRE II. Si (E) , l'un des deux astres E, E' ,

vûs dans un même vertical, est dans l'équateur, on aura $t = \frac{ras}{cX'}$, ou (en prenant $S = \frac{rs}{c}$ pour la tangente de la hauteur du pole), $t = \frac{aS}{X'}$.

COROLLAIRE III. Si la différence d'ascension droite des deux astres vûs dans un même vertical, est nulle, ou de 180 degrés, ce qui rend $a = 0$, on a aussi $t = 0$; c'est-à-dire, que les deux astres sont au méridien. Ce cas est celui du Probleme XXVII de l'Astronomie Nautique.

PROBLEME VIII.

La hauteur du pole étant connue, & le tems écoulé entre les passages de deux astres au même almicantharath étant aussi connu, ainsi que les déclinaisons & les ascensions droites de ces astres, trouver l'heure des observations.

(Ce Probleme est l'inverse du XXIX^e de l'Astronomie Nautique, qui consiste à trouver la hauteur du pole, connoissant l'heure à laquelle on voit dans un même almicantharath, deux astres, &c.)

Soient, comme ci-dessus, a & b le sinus & le cosinus de la somme, ou de la différence de l'angle du tems écoulé entre les observations, & de celui auquel répond la différence d'ascension droite des deux astres. La premiere formule du premier Lemme, donne pour le cas où les astres sont au-dessus de l'équateur, & du cercle de six heures, $rsx + cyu = rrh = rsx' + cy'u'$; on a donc $rsx - rsx' + cyu = cy'u'$, en supposant que x' est moindre que x . Soit donc que les deux astres soient de même part du méridien, ce qui est le cas de la Fig. 8, soit qu'ils soient de différens côtés de ce cercle, & dans le cas de la Fig. 7, on a, par le second Lemme, $u' = bu + a\sqrt{(rr - uu)}$, donc

$rrs(x - x') + rcyu - bcy'u = acy' \sqrt{(rr - uu)}$: quar-
rant chaque membre, & substituant rr à $aa + bb$ on a,

$$\left. \begin{array}{l} + rrccyy \\ - 2brccyy' \\ + rrccyy' \end{array} \right\} uu + \left. \begin{array}{l} + 2r^3scy(x - x') \\ - 2br^2scy'(x - x') \end{array} \right\} u = \left\{ \begin{array}{l} + rr aa cc y' y' \\ - r^4 ss (x - x')^2 \end{array} \right.$$

Prenant $A = rcc(ryy - 2byy' + ry'y')$, $B = rsc(-ry + by')(x - x')$, & $C = aa cc yy - rr ss (x - x')^2$, on aura,

$$u = \frac{rB}{A} \pm \frac{r}{A} \sqrt{(BB + AC)}.$$

SCHOLIE. On comprend sans doute, que si quel-
qu'une ou plusieurs des quantités b , x , x' sont de qualité
contraire à celle qui a été supposée dans le calcul précé-
dent, il faut changer les signes des termes où elles se
rencontrent, ainsi qu'il a été expliqué sous le Probleme
second.

Nous avons deux valeurs pour u , & cela fait voir que
si deux astres passent à un même almicantarath en même
moment, ou avec certain tems d'intervalle, il y a quel-
qu'autre almicantarath où ces astres se rencontreront en
même moment, ou passeront avec le même tems d'inter-
valle. Or, les deux valeurs de u peuvent non-seulement
être l'une positive, & l'autre négative, mais aussi toutes
deux positives; & dans ce cas, il y a un choix à faire,
lequel exige certaines attentions. Je suppose, pour être
plus court, que les deux astres ont passé au même almi-
cantarath au même instant. Soient ici PE , PE' les com-
plémens des déclinaisons des deux astres E , E' ; soit EQE'
l'arc de grand cercle de la sphere qui joint ces deux astres,
& PQ un autre arc de grand cercle, qui passe par le pole,
& par le milieu de EQE' . Si PQ est plus grand que le
complément de la hauteur du pole, le point Q , mitoyen
entre les deux astres, se trouvera de même part du méridien

Fig. 40.

aux deux rencontres des deux astres à un même almicantharath, mais il sera de différens côtés du premier vertical. Si ce point a été, au moment de l'observation, du côté du premier vertical où est le pôle élevé, & que les deux racines de l'équation soient positives, c'est la moindre de ces racines qui est la vraie valeur de u . Si au contraire le point Q a été de l'autre côté du premier vertical au tems de l'observation, c'est la plus grande des deux racines qui convient à ce tems.

Si PQ est moindre que le complément de la hauteur du pôle, le point Q , mitoyen entre les deux astres, sera du côté du premier vertical où est le pôle élevé, & de différens côtés du méridien, aux deux rencontres des astres à un même almicantharath. Dans ce cas, il faut considérer lequel des deux astres est le plus près du méridien au tems de l'observation. Si c'est le plus voisin du pôle qui soit aussi le plus proche du méridien, & que l'on ait deux racines positives, c'est la plus grande de ces racines qui est la vraie valeur de u pour ce tems (quel que soit celui des deux astres auquel appartienne u) : que si c'est l'astre le plus éloigné du pôle qui est le moins éloigné du méridien au moment de l'observation, c'est la moindre des racines qui est valeur de u à ce moment.

On trouvera dans la suite, un moyen de faire un calcul plus simple pour ce Probleme, dans le cas où les deux astres passent en même moment au même almicantharath, & de discerner plus facilement la quantité qui fait connoître l'heure de l'observation.

REMARQUE. On trouve l'heure dans les deux Probl. précédens, par la supposition que la différence de hauteur de deux astres est zéro, soit en même tems, soit en des momens dont l'intervalle est connu, ou par la supposition que l'angle des azymuths de deux astres est pareille.

ment zéro, soit en même tems, soit en des momens dont l'intervalle est connu. On peut donc juger que la différence de hauteur de deux astres, ou bien l'angle de leurs azymuths, sont des élémens propres (au moins spéculativement) à faire découvrir l'heure par leur combinaison avec quelqu'autre élément. C'est ce qui est vrai en effet, & j'en vais donner un exemple dans les deux Problèmes suivans, qui sont plutôt de théorie que de pratique.

P R O B L E M E I X.

La hauteur du pôle étant connue, & l'angle des azymuths où sont deux astres, en des momens dont l'intervalle est connu, étant donné, ainsi que les déclinaisons & les ascensions droites de ces astres, trouver l'heure de l'une des observations.

Soit g le sinus de l'angle des azymuths des deux astres, γ son cosinus, a le sinus de la somme, ou de la différence de l'angle du tems écoulé entre les observations, & de celui qui répond à la différence des deux astres en ascension droite; b le cosinus de cette somme ou de cette différence; X, X' les tangentes des déclinaisons des deux astres; m, m' les sinus de leurs angles azymuthaux, &c.

La troisième formule du premier Lemme donne;

$$n = \frac{m}{rt} (su - cX), \text{ \& } nn = rr - mm = \frac{mm}{rrtt} (su - cX)^2 \\ = \frac{(rr - nn)}{rrtt} (su - cX)^2; \text{ donc } n = \frac{r(su - cX)}{\sqrt{(rrtt + (su - cX)^2)}},$$

$$\text{\& } m = \frac{r^2 t}{\sqrt{(rrtt + (su - cX)^2)}}. \text{ Par la même raison, } m'$$

$$= \frac{r^2 t'}{\sqrt{(rrt't + (su' - cX')^2)}}. \text{ Or par le second Lemme, on a}$$

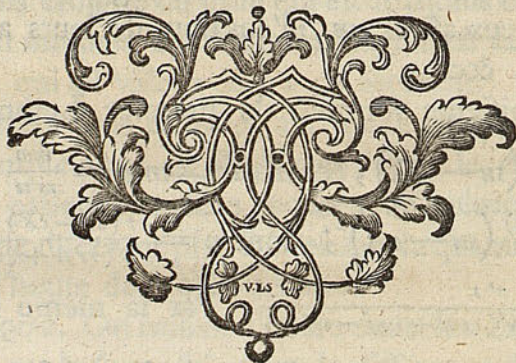
$rm' = ym \pm gn$; substituant dans cette égalité, les valeurs qu'on vient de voir, de m', m, n , on en aura une

où il ne restera d'inconnues que t', u', t, u . On pourra chasser les deux premières, en prenant leurs valeurs dans les égalités $rt' = bt - au$, $ru' = bu + at$, &c.

PROBLEME X.

La hauteur du pôle étant connue, & la différence des hauteurs où sont deux astres en des momens dont l'intervalle est connu, étant donnée, &c. trouver l'heure de l'une des observations.

Soit f le sinus de la différence des deux hauteurs h, h' ; l son cosinus, &c. On a, par la première formule, $h' = \frac{cyu' + rsx'}{rr}$, $h = \frac{cyu + rsx}{rr}$, $k = \sqrt{(rr - hh)} = \frac{1}{rr} \sqrt{(r^6 - (cyu + rsx)^2)}$. Substituant ces valeurs de h', h, k , dans l'égalité $rh' = lh - fk$, que fournit le second Lemme, on aura $rcy'u' + rrsx' - lcyu - rlsx = f \sqrt{(r^6 - (cyu + rsx)^2)}$, où il faut substituer la valeur de ru' , que fournit encore le second Lemme, &c.



C H A P I T R E III.

Suite des moyens de trouver l'heure, concurremment avec la hauteur du Pole.

L'UNE des especes d'éléments employées dans les Problemes VII & VIII, peut être prise deux fois, ou être combinée, soit avec l'autre, soit avec un des éléments employés dans les Problemes IX & X, &c. & cela donne autant de moyens de trouver l'heure, concurremment avec la hauteur du pole. Il nous reste donc quantité de Problemes pour ce Chapitre : mais il suffira de résoudre les plus avantageux, & d'indiquer les autres.

P R O B L E M E. X I.

Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de quatre astres E, E', ϵ , ϵ' , & l'intervalle de tems entre les momens où E se trouve dans un même vertical avec E', & où ϵ se trouve dans un même vertical avec ϵ' , trouver l'heure de l'une des observations (& la hauteur du pole.)

(Ce Probleme est une extension du XXX^e de l'Astronomie Nautique, où l'on ne suppose que trois astres, mais il ne demande pas un autre calcul.)

Soient les tangentes des déclinaisons des quatre astres X, X', ξ , ξ' ; les sinus & cosinus des angles horaires du premier & du second, τ , τ' , u , u' ; les sinus & cosinus des angles horaires du troisieme & du quatrieme θ , θ' , v , v' ; p & q , les sinus & les cosinus de la somme, ou de la différence de l'angle du tems écoulé entre les observations

des astres E , e , & de l'angle qui répond à leur différence d'ascension droite; a & b le sinus & le cosinus de la différence d'ascension droite, des astres E , E' ; a' , b' , le sinus & le cosinus de la différence d'ascension droite des deux autres astres. (Si E & E' ne se trouvent pas au même instant au même vertical, a & b doivent être les sinus & cosinus de la somme ou de la différence de l'angle du tems écoulé entre leurs passages, & de celui qui répond à leur différence d'ascension droite. Il faut entendre le même pour a' & b' , si, &c.)

Je suppose que les quatre astres déclinent tous du côté du pôle élevé, que les angles dont p , a , a' font les sinus, sont tous aigus, &c. On aura, par la troisième formule

du premier Lemme $\frac{su - cX}{t} = \frac{rn}{m} = \frac{su' - cX'}{t'}$, $\frac{sv - c\xi}{\theta} = \frac{rn'}{m'} = \frac{sv' - c\xi'}{\theta'}$, & par conséquent $sa't - sut' = cX't - cXt'$, $sv'\theta - sv\theta' = c\xi'\theta - c\xi\theta'$, ou $\frac{X't - Xt'}{u't - ut'} = \frac{s}{c} = \frac{\xi'\theta - \xi\theta'}{v'\theta - v\theta'}$, ou (parce que $ra = u't - ut'$, & $ra' = v'\theta - v\theta'$ par le second Lemme) $\frac{X't - Xt'}{a} = \frac{\xi'\theta - \xi\theta'}{a'}$, ou $a'X't - a'Xt' = a\xi'\theta - a\xi\theta'$, ou (à cause de $rt' = bt - au$, & de $r\theta' = b'\theta - a'v$), $a'bXt - a'aXu - ra'X't = ab'\xi\theta - aa'\xi v - ra\xi'\theta$. Mais l'angle horaire, dont θ est le sinus, étant supposé moindre que celui auquel appartient t ; & v étant par conséquent $> u$, on a, par le second Lemme, & par la supposition que p appartient à un angle aigu, cas de la Fig. 8, $r\theta = qt - pu$, $rv = qu + pt$; & mettant les valeurs de θ & de v dans l'équation précédente, on trouve pour la cotangente de l'angle horaire du premier astre,

$$\frac{ru}{t} = r \left(\frac{ra'bX - rra'X' - ab'q\xi + a'ap\xi + raq\xi'}{ra'aX - a'aq\xi - ab'p\xi + rap\xi'} \right).$$

Mais si l'on suppose que $\theta > t$, & que $v < u$, par conséquent, ce qui est le cas de la Fig. 5, on aura $r\theta = qt + pu$, $rv = qu - pt$, & on trouvera pour cotangente de l'angle désiré :

$$\frac{ru}{s} = r \left(\frac{ra'bX - rra'X' - ab'q\xi - a'ap\xi + raq\xi'}{ra'aX - a'aq\xi + ab'p\xi - rap\xi'} \right).$$

Et si l'on suppose qu'on soit dans le cas de la Fig. 7, on aura $r\theta = -qt + pu$, $rv = qu + pt$, & on trouvera,

$$\frac{ru}{s} = r \left(\frac{ra'bX - rra'X' + ab'q\xi + a'ap\xi - raq\xi'}{ra'aX - a'aq\xi + ab'p\xi - rap\xi'} \right).$$

(Ayant trouvé l'angle horaire du premier astre, on a aussi l'angle horaire du second, par l'équation $rt' = bt - au$, supposée ci-dessus, & la hauteur du pole, en substituant les valeurs de t & de t' , dans l'équation $\frac{s}{c} = \frac{X't - Xt'}{ar}$).

SCHOLIE I. Ce Probleme, au témoignage de M. de Maupertuis, peut être d'une grande utilité sur terre & sur mer, parce qu'il n'y a point d'observation plus facile ni plus sûre, que celle du passage des astres par un vertical, & qu'on évite ici entièrement l'effet de la réfraction, qui apporte tant de troubles aux autres observations : mais on doit reconnoître aussi, qu'il exige une grande attention aux circonstances des observations, quand on y procède algébriquement, pour donner les signes convenables à chacun des neuf termes dont est composée la fraction qui est la valeur de la cotangente de l'angle horaire désiré. J'ai supposé que tous les astres étoient, non-seulement au-dessus de l'équateur, mais aussi au-dessus du cercle de six heures ; que t outre cela étoit plus grand que t' , & θ plus grand que θ' ; enfin, que p appartenait à un angle aigu : & après tout cela, il reste encore lieu à trois différences

de circonstances [dont la premiere est la seule à laquelle on ait eu égard dans l'Astronomie Nautique]. J'ai eu quelque envie de parcourir tous les cas possibles, & de les réduire sous autant de chefs, qu'il peut y avoir d'états différens pour la formule précédente, en supposant que tous les astres déclinent du côté du pole élevé, en sorte qu'il n'y eût à changer dans ces formules particulieres, que les signes de l'une ou de plusieurs des tangentes X, X', ξ, ξ' , au cas qu'un ou plusieurs des astres observés, déclinaissent du côté du pole abaissé; mais j'ai craint que ce détail ne fût trop long (je le donnerai pourtant, si on le souhaite), & j'ai pensé qu'un Navigateur, avec une médiocre teinture d'algebre, pourroit bien construire, sur le modele des formules précédentes, celles dont il aura besoin dans l'occasion. Son opération n'en sera que plus sûre, & je ne sçai si on devroit compter sur celle que feroit un autre Navigateur d'après une formule choisie entre plusieurs qu'il trouveroit toutes construites dans un livre. Il n'est pas particulier à la Trigonométrie, avouons-le avec franchise (& j'ai quelque droit de le dire, après les remarques faites sur les Problemes II, VII & VIII ci-dessus), il n'est pas particulier, dis-je, à la Trigonométrie, de donner *des regles dont l'origine peut n'être gueres présente à l'esprit d'une partie de ceux qui s'ingerent de les pratiquer, & dont l'application est souvent ambigue pour certains génies*. Il y a des écueils en plus d'une plage, & un homme pourroit

Incidere in Scyllam cupiens vitare Charibdim.

Heureux le genre humain, s'il y avoit des arts dont les préceptes pussent être *contenus dans quelques lignes*, & ne laissassent lieu à aucune méprise dans leur application.

II. Outre l'embarras du choix des signes qui doivent être employés dans la formule ci-dessus, ou dans les égalités sur lesquelles on en construïroit d'autres, il est à remarquer qu'elle conduit à un calcul assez compliqué, & peu commode, par conséquent, en pratique. C'est pourquoi j'indiquerai dans la suite une autre solution pour ce Probleme, solution qui sera plus simple, & moins sujette à embarras.

III. On pourroit (comme a fait M. de Maupertuis) ne supposer que trois astres, en prenant E & ε pour le même, ce qui rendroit ε la même chose que X ; mais il faut dans ce cas, qu'il y ait certain intervalle de tems entre les passages de cet astre aux deux verticaux, où il doit se rencontrer avec chacun des deux autres astres. Or, cela est à la vérité indifférent sur terre, mais il n'en est pas de même sur mer; il est à souhaiter que toutes les observations que requiert une recherche Nautique, soient contemporaines, ou faites en des momens peu éloignés. Or, en prenant quatre astres, les deux passages de ces deux paires d'astres à deux verticaux, peuvent se rencontrer au même instant, ou en des instans si voisins, que le déplacement du vaisseau dans leur intervalle soit de très-petite conséquence. On peut encore sur terre ne prendre que deux astres pour le Probleme dont il s'agit.

IV. (Ceci regarde la recherche de la hauteur du pole. Si $a = 0$, c'est-à-dire, si le vertical où deux astres ont été observés, est le méridien, on a $t = 0$, & $\theta = p$, & $v = q$. Mettant ces valeurs de θ & v dans l'égalité que fournit le second Lemme pour θ' , puis substituant les valeurs de θ' & θ' dans l'équation $\frac{s}{c} = \frac{\xi'\theta - \xi\theta'}{a'}$, on aura ainsi la tangente de la hauteur du pole, que l'autre équation pour $\frac{s}{c}$ ne peut donner, parce que tous les termes y sont zéro.)

PROBLEME XII.

Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de quatre astres E, E', ε , ε' , & le tems écoulé entre les momens où E se trouve dans un même almicantarath avec E', & où ε se trouve dans un même almicantarath avec ε' , trouver l'heure de l'une des observations, (& la hauteur du pole.).

Soient x , x' , i , i' les sinus & cosinus des déclinaisons des astres ε , ε' , & le reste comme ci-dessus, on a en certains cas, par la première formule du premier Lemme, $rsx + cyu = rrh = rsx' + cy'u'$, & $rsx + ci v = rrh' = rsx' + ci'v'$, par conséquent $\frac{y'u' - yu}{x - x'} = \frac{rs}{c} = \frac{i'v' - iv}{x - x'}$, ou (mettant pour abrégé z pour $x - x'$, ζ pour $x - x'$) $\zeta y'u' - \zeta yu = \zeta i'v' - \zeta iv$; or en certains cas, on a $ru' = bu - at$, & $rv' = b'v - a'v$. Mettant les valeurs de u' & de v' , tirées de ces deux égalités, dans la précédente on a

$$\zeta y'bu - \zeta yat - r\zeta yu = b'z i'v - a'z i'v - rziv.$$

Or en certain cas, on a $r^0 = qt - pu$, & $rv = qu + pt$; mettant donc les valeurs de u & v dans l'équation précédente, on trouve pour la tangente de l'angle horaire du premier astre,

$$\frac{rt}{u} = \left(r \left(\frac{rr\zeta y - rb\zeta y' - rqzi - a'pzi + b'qzi}{-ra\zeta y + rpzi + a'qzi - b'pzi} \right) \right).$$

(Ayant trouvé l'angle horaire du premier astre, on a aussi l'angle horaire du second, par l'équation $ru' = qu - pt$, ou telle autre qui conviendra, & la hauteur du pole en substituant les valeurs de u & de u' , dans l'équation $\frac{rs}{c} = \frac{y'u' - yu}{x - x'}$).

SCHOLIE. La plupart des remarques faites sur le Probleme précédent, conviennent à celui-ci.

P R O B L E M E X I I I.

Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de quatre astres E, E', ε, ε', & le tems écoulé entre les momens où E se trouve dans un même vertical avec E', & où ε se trouve dans un même almicanth avec ε', trouver l'heure de l'une des observations, (& la hauteur du pole.)

On a en certains cas, par la premiere formule du premier Lemme,

$$rsx + civ = rrh' = rsx' + ci'v', \text{ donc } \frac{rs}{c} = \frac{i'v' - iv}{\zeta}.$$

Et par la troisieme formule du même Lemme,

$$\frac{su - cX}{t} = \frac{rn}{m} = \frac{su' - cX'}{t'}, \text{ donc } \frac{rs}{c} = r \left(\frac{X't - X't'}{u't - ut'} \right) = \frac{X't - X't'}{a},$$

donc $ai'v' - aiv = \zeta X't - \zeta X't'$. Or, on a en certains cas, par le second Lemme, $rv' = b'v - a'\theta$, & $rt' = b't - a'u$. Mettant les valeurs de v' & de t' , tirées de ces égalités dans la précédente, on a

$$ab'i'v - aa'i'\theta - raiv = r\zeta X't - b\zeta X't + a\zeta Xu;$$

& substituant dans cette équation les valeurs de θ & v , que fournit le second Lemme en certain cas ($r\theta = q\theta - pu$, $rv = qu + pt$), on trouve pour la cotangente de l'angle horaire du premier astre,

$$\frac{ru}{t} = r \left(\frac{rb\zeta X - rr\zeta X' - rap\theta - aa'q\theta' + ab'p\theta'}{ra\zeta X + raq\theta - aa'p\theta - ab'q\theta'} \right).$$

(Ayant trouvé l'angle horaire du premier astre, on a aussi celui du second, & l'on en déduit la hauteur du pole, comme dans le Probl. XI.)

SCHOLIE. Ce Probleme peut être d'une utilité

presque aussi grande que le XI^e, au moins sur terre, parce qu'on évite entièrement l'effet de la réfraction dans l'une des observations, & que dans l'autre on n'est exposé qu'à la petite irrégularité qui peut provenir, dans la réfraction, de la diversité de constitution de l'atmosphère en différens verticaux. D'un autre côté, ce Problème a quelque avantage sur l'onzième, même pour les besoins nautiques, parce que trois astres peuvent absolument y suffire, celui que l'on observe dans un même vertical avec un second, pouvant se rencontrer dans un même almicantharath avec un troisième au même instant, ou dans un tems peu éloigné. Pareil avantage se trouve dans le Problème précédent : trois astres vus ensemble au même almicantharath, ou vus, le premier avec le second, & le premier avec le troisième dans des almicantharaths fort voisins, y suffisent parfaitement, si ces astres sont à certaines distances, & deux paires d'astres y conviendroient moins, si elles étoient l'une au-dessus de l'autre, ou à peu près. On verra dans la Partie suivante, le fondement de ces remarques : le reste de celles qui ont été faites sur le Probl. XI, convient encore à celui-ci.

P R O B L È M E X I V.

Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de trois astres, E, E', ε, & le tems écoulé entre le moment où les deux premiers se trouvent dans un même vertical, & celui où l'on a observé la hauteur du troisième, trouver l'heure de l'une des observations (& la hauteur du pôle).

Je cherche en premier lieu la hauteur du pôle. Outre les dénominations employées ci-dessus, soient p' & q' le sinus & le cosinus de la somme ou de la différence de l'angle du tems écoulé entre les observations des astres E', ε, &

de la différence de ces astres en ascension droite.

On a en certains cas, par la troisieme formule du premier Lemme $su't - sut' = cX't - cXt'$, ou $ras = cX't - cXt'$, ou 1° (à cause de $rt' = bt - au$), $rras = rcX't - bcXt + acXu$. 2°. On a d'ailleurs par le second Lem-

me $rv = q'u' - p't'$, ou $\frac{rv + p't'}{q'} = u' = \frac{bu - at}{r}$, donc

$rp't' = bq'u - aq't - rrv$, & $t' = \frac{bq'u - aq't - rrv}{rp'}$. Sub-

stituant cette deuxieme valeur de t' dans l'égalité $ras = cX't - cXt'$, on a $rrp'as = rp'cX't + aq'cXt + rrcXv - bq'cXu$. Or, on a encore par le second Lemme, rv

$= qu - pt$, ou $\frac{rv + pt}{q} = u$. Substituant cette valeur de u dans les deux égalités où entre ce cosinus, on a $rrqas - racXv = ct(rqX' - bqX + apX)$, & $rrp'qas - rrcXv + rq'bcXv = ct(rp'qX' + aqq'X - bpq'X)$, ou

$$\frac{rp'qas - rrcXv + q'bcXu}{rp'qX' + aqq'X - bpq'X} = \frac{ct}{r} = \frac{rrqas - racXv}{rrqX' - rbqX + rapX};$$

ou en mettant, afin d'abrégier, A au lieu du dénominateur de la premiere fraction, & B au lieu de celui de la deuxieme,

$Brp'qas - BrqcXv + Bq'bcXv = Arrqas - AracXv$, ou $(AraX + Bq'bX - BrqX)cv = (Araq - Bp'aq)rs$, ou,

en mettant C pour la quantité qui multiplie cv , & D pour

celle qui multiplie rs , $\frac{Drs}{C} = cv = \frac{rrh - rsx}{i}$, par la

formule premiere du premier Lemme, donc $iDs + xCs$

$= rhC$, & $s = \frac{rhC}{iD + xC}$.

Ayant trouvé la hauteur du pole, on aura l'angle horaire de l'astre s , par l'équation $v = \frac{rrh - rsx}{ci}$.

SCHOLIES. I. On doit voir que la formule de ce Probleme est susceptible de divers signes, de même que celles des Problemes précédens.

II. La méthode de ce Probleme est aisée à appliquer à celui où l'on auroit l'observation de deux astres à un même almicantharath, combinée avec l'observation de la hauteur d'un troisième astre.

III. La solution que je viens de donner, conduiroit à un calcul compliqué & pénible pour la pratique : c'est pourquoi j'en proposerai une autre dans la Partie suivante.

P R O B L E M E X V.

Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de trois astres, E, E', e, & l'angle compris entre le vertical, où les deux premiers se trouvent en certain moment, & le vertical du troisième astre, trouver l'heure, (& la hauteur du pôle.)

REMARQUE. Au défaut de l'une des observations nécessaires, au XI ou au XIII^e Probl. celui-ci peut, si je ne me trompe, être utile sur mer, parce que l'on évite l'effet de la réfraction dans les observations qu'il suppose, & que ces observations n'exigent pas que l'horison soit découvert, ou ne l'exigent pas plus qu'aucune autre espèce d'observation. Celle de l'angle compris entre deux azymuths, est sans doute la plus difficile, ou bien la moins sûre des deux dont il s'agit : mais elle est peut-être susceptible d'une exactitude suffisante, surtout si l'astre solitaire dans son azymuth, est fort bas, & l'un des deux autres aussi ; d'ailleurs je ne la propose que pour servir au défaut de toute autre qu'on jugera plus sûre. De plus, cette espèce d'observation n'est pas une chose nouvelle & inusitée sur mer ; on y cherche la déclinaison de la boussole, & il faut, pour la trouver, observer l'angle de l'azymuth

de quelque astre , & de l'un des azymuths de la bouffole , &c. Au reste , la solution de ce Probleme , par la méthode générale suivie jusqu'ici , seroit trop compliquée pour être mise en pratique : ainsi je la laisse , & me réserve d'en donner une plus commode dans la suite. Je laisse pareillement ici sans solution , le Probleme suivant.

P R O B L E M E X V I.

Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de deux astres , E , E' , & l'angle compris entre leurs azymuths au moment où ils sont dans un même almicantharath , trouver l'heure , (& la hauteur du pôle).

REMARQUE. Il reste quelques autres combinaisons d'hypotheses , dans lesquelles l'heure & la hauteur du pôle se trouvent déterminées , combinaisons que j'ai déjà indiquées en général , & qu'il n'est pas difficile d'imaginer , après celles qu'on a vûes : mais je m'abstiens d'en faire le détail , soit parce qu'elles sont moins avantageuses que les précédentes , soit parce qu'il ne sera pas difficile à ceux qui pourroient le souhaiter , de résoudre quelques-uns de ces cas , par les voies qui seront employées dans la Partie suivante. Je finis celle-ci par la solution d'un Probleme qui peut avoir son utilité , au défaut des précédens , en ce que l'on y évite une partie des mauvais effets de la réfraction en certains cas.



PROBLEME XVII.

La hauteur d'un astre E, & l'angle de son azymuth avec celui d'un autre astre E' étant donnés, ainsi que le tems écoulé entre les deux observations, &c. trouver l'heure, (& la hauteur du pole).

REMARQUE. Si on vouloit résoudre ce Probleme directement, on tomberoit dans une équation du quatrième degré pour le moins : mais l'on peut y procéder indirectement, & l'opération en sera plus simple, quoiqu'elle renferme un circuit. Ce procédé consiste à chercher d'abord la hauteur du second astre : cette hauteur étant découverte, on est dans le cas du Probleme II. J'ai dit que celui-ci peut être utile en certain cas, & cela est aisé à montrer maintenant. Car si (E') l'un des deux astres qui se présentent à un Observateur, est fort bas, il fera peu sûr d'observer sa hauteur, à cause de l'irrégularité de la réfraction que souffrent les rayons très-inclinés à l'horison : ainsi il vaudra mieux prendre seulement la hauteur de l'astre (E) le plus élevé des deux, & conclurre la hauteur de l'autre, de l'observation de l'angle de son azymuth, & de l'azymuth de l'astre plus élevé (je suppose que cette espece d'observation soit par elle-même aussi juste que celle de la hauteur) : car la hauteur conclue ne se ressentira du côté de la réfraction, que du même degré d'erreur que cette cause peut jeter sur la hauteur observée.

Voici la maniere de trouver la hauteur du second astre. Je suppose que la distance des deux astres est connue, & je nomme Δ le cosinus de cette distance : cela posé, j'observe que l'on est dans le même cas pour découvrir la hauteur de l'astre E' , que celui où l'on est pour découvrir la
hauteur

hauteur du pôle Ph , *Fig. 40*, lorsque la déclinaison d'un astre a (dont le complément est Pa), sa hauteur am , & mZh son angle azymuthal sont donnés : car nous avons de même, *Fig. 41*, EE' distance des deux astres; EM hauteur de l'un d'eux; MZM' angle des deux verticaux; ZEM , $ZE'M'$ où ils sont situés, & nous cherchons $E'M'$ (dont je nomme le sinus h' , & le cosinus k').

Je prends donc la deuxième formule du premier Lemme dans l'état $rrx + nck = rsh$ (ou dans tel autre qui conviendra à la question), & j'y substitue δ , cosinus de EE' , au lieu de x , cosinus de aP ; h' & k' , sinus & cosinus de $E'M'$, au lieu de s & c , sinus & cosinus de Ph ; γ , cosinus de l'angle MZM' au lieu de n , cosinus de l'angle mZh ; & j'y laisse h , k , qui sont sinus & cosinus de am , pour sinus & cosinus de EM . J'ai donc $rr\delta - \gamma k'k = rh'h$; ou bien $rr\delta - rh'h = \gamma k'k$; & après avoir élevé chaque membre au quarré, & substitué $rr - h'h$ à $k'k$, je trouve l'équation

$$\left. \begin{matrix} rrhh \\ \gamma\gamma kk \end{matrix} \right\} h'h - 2r^3\delta h'h' = rr\gamma\gamma kk - r^4\delta\delta.$$

Prenant $A = rrhh + \gamma\gamma kk$, $B = rr\delta h$, $C = \gamma\gamma kk - rr\delta\delta$, on a,

$$h' = \frac{rB}{A} \pm \frac{r}{A} \sqrt{(BB + AC.)}$$

Et c'est la moindre de ces racines qui est valeur du sinus de $E'M'$, dans la supposition que $E'M'$ est plus petite que EM .

J'ai supposé que la distance des deux astres étoit connue. Voici une manière de la déduire de leurs déclinaisons, & leur différence d'ascension droite : nous sommes en même situation pour découvrir cette distance, que celle où l'on est pour découvrir la déclinaison d'un astre a (de laquelle Pa est complément), *Fig. 43*, lorsque la

hauteur du pole Ph , la hauteur am de cet astre, & son angle azymuthal mZh sont donnés : car P étant le pole dans la Fig. 44, toute semblable à la 43, & $e e'$ l'équateur, nous y avons pareillement EE' & Ee distances des astres à l'équateur, & ePe' , angle des méridiens où ils sont situés, & nous cherchons EE' , qui répond à aP dans la Fig. 43.

Je prends donc encore la deuxieme formule du premier Lemme $rrx = rsh - nck$, & j'y substitue encore δ , cosinus de EE' , au lieu de x cosinus de aP ; x & y , sinus & cosinus de Ee , au lieu de h & k , sinus & cosinus de am ; x' & y' , sinus & cosinus de $E'e'$, au lieu de s & c , sinus & cosinus de Ph ; enfin, q cosinus de ePe' , au lieu de n , cosinus de mZh , & j'ai $rr\delta = rxx' - qyy'$, ou bien,

$$\delta = \frac{rxx' - qyy'}{rr}.$$


REMARQUES POUR LE PROBLEME XIV.

de l'Essai d'Horolepse Nautique , I. Partie.

IL y a un changement à faire à cet article : la solution que j'y ai donnée est défectueuse. Son défaut consiste en ce que deux quantités fractionnaires, qui semblent composées d'éléments différens, mais qui se réduisent en effet à une même expression, y sont employées pour faire évanouir une des inconnues, en sorte que tout se détruit par cette opération, & il ne reste que zéro divisé par zéro, pour valeur de l'inconnue qui paroît conservée. Voici quel a été le mauvais emploi. Après avoir formé l'égalité $rrqas - raXcv = (rqX' - bqX + apX)ct$, d'où j'ai

déduit $\frac{rqas - aXcv}{rqX' - bqX + apX} = \frac{ct}{r}$, j'ai voulu avoir une autre valeur de $\frac{ct}{r}$, & j'ai cru l'obtenir, en formant une égalité où les éléments $p'q'$ se trouvaient. J'ai donc fait $rrp'qas + rXcv(bq' - rq) = (rp'qX' - bpq'X - aqq'X)ct$; mais cette deuxième égalité n'est autre chose que la première multipliée par p' dans tous ses termes : car on a, par le second Lemme, $rq = bq' + ap'$, ou bien, $bq' - rq = -ap'$; donc le terme $+rXcv(bq' - rq)$ du premier membre de la deuxième égalité, se réduit à $-rp'aXcv$, & l'on voit déjà que tout ce membre ne diffère du premier de la première égalité, qu'en ce qu'il est multiplié par p' . Il en est de même du second, car on a encore, par le second Lemme, $rp = bp' - aq'$, & (multipliant tout par q) $rq = bp'q - aqq'$, puis (en substituant à rq sa valeur $bp'q - aqq'$), $bpq' + app' = bp'q$

— $aq'q'$, ou enfin, — $bpq'X - aqq'X = bpqX - appX$.
 Donc la partie (— $bpq'X - aqq'X$) et du second membre de la deuxième égalité, se réduit à (— $bp'qX + ap'pX$)
 et, qui est la même chose que les termes (— $bqX + apX$)
 et de la première égalité multipliés par p' , &c.

Ce vice foncier de ma solution, n'est pas le seul qui l'infecte, il en a entraîné un autre dans la forme, & celui-ci consiste en ce que l'inconnue s n'est que linéaire dans le résultat du calcul, au lieu qu'elle doit monter au second degré, comme on le verra dans la suite.

Dès le tems que je rédigeai ce mauvais calcul, j'en soupçonnai le défaut radical : mais je n'avois pas alors (à la fin d'Août) assez de tems pour le vérifier, & d'ailleurs je n'avois plus d'espérance d'en trouver un meilleur, lequel fût construit d'après les formules de l'Astronomie nautique. Ainsi je passai par-dessus mon scrupule, tant par l'espece de contrainte où j'étois, que parce que je me réservoïs, comme il est marqué dans la troisième Scholie, de proposer une autre solution pour la pratique, & que je n'en voulois donner qui fût fondée sur ces Formules de M. de Maupertuis, que par forme de suite de la méthode employée jusques-là, & pour répondre au titre de ma première Partie.

Je n'espérois plus, dis-je, de parvenir à un meilleur calcul, fondé sur les formules de M. de Maup. cependant j'en ai construit un de cette qualité peu après, & je vais le rapporter. Voici la cause de ma méprise. Après une première tentative, qui n'étoit pas bonne, j'avois pris, vers le tems du commencement de mon travail, une autre voie dont je fus content, & qui est la même à laquelle je suis revenu; mais ne faisant mes préparatifs que sur des feuilles volantes, je me bornai à poser les fondemens du bon calcul. Quand il fut question, quelques semaines après,

d'achever cet article , je ne m'en rappelai pas assez distinctement les idées : je m'imaginai , je ne sçai comment , que ces opérations dont j'avois été satisfait , conduisoient à une équation du quatrieme degré : je voyois d'ailleurs très-clairement , que l'inconnue de cette équation ne pouvoit avoir que deux valeurs ; je regardai donc ce procédé comme trop compliqué , & ne méritant gueres plus que ma premiere tentative , d'être suivi. Je m'en défiai tant que je l'abandonnai , sans le mettre à une épreuve complete , comme je l'aurois dû ; mais en évitant cette voie , & me fatiguant beaucoup pour en ouvrir une autre , je ne pûs que m'égarer , & affoiblir mon discernement.

Substitution à faire au Probleme XIV. de l'Essai, &c.

[Je conserve les mêmes dénominations employées dans cet article]. On a , comme au Probleme VII, $su't - sut' = cX't - cXt'$, ou (à cause de $ra = u't - ut'$), $ras = cX't - cXt'$. Or , en supposant que l'astre est observé au-dessus du cercle de six heures , & à une plus grande distance du méridien que chacun des deux autres , on a $rt = q^0 - pv$, $rt' = q'^0 - p'v$. Substituant donc les valeurs de t & t' dans l'égalité précédente , elle se change en $rras = qX'c^0 - pX'cv - q'Xc^0 + p'Xcv$, ou bien $rras + cv(pX' - p'X) = c^0(qX' - q'X)$: quarrant chaque membre , on a $r^4aass + 2rrascv(pX' - p'X) + ccvv(pX' - p'X)^2 = cc^0(qX' - q'X)^2$. Or , par le §. I. du premier Lemme , $cv = \frac{rrh'' - rsx}{i}$, donc $ccvv = \frac{rr}{ii}(rh'' - sx)^2$, & (c^0 étant $= rr - vv$, ou bien , $cc^0 = rrcc - ccvv = r^4 - rrss - ccvv$), $cc^0 = \frac{rr}{ii}(rrii$

— $ii ss = [rh - s\chi]^2$). Substituant donc les valeurs de cv , $ccvv$, & $cc\theta\theta$ dans la dernière égalité, multipliant tout par ii , & divisant par rr , on a d'abord :

$$\left. \begin{array}{l} rr aa ii \\ - 2rai\chi (pX' - p'X) \\ + \chi\chi \left\{ \begin{array}{l} ppX'X' \\ - 2pp'XX' \\ + p'p'XX \end{array} \right\} \\ + \chi\chi \left\{ \begin{array}{l} qqX'X' \\ - 2qq'XX' \\ + q'q'XX \end{array} \right\} \\ + ii (qX' - q'X)^2 \end{array} \right\} ss \quad \left. \begin{array}{l} + 2rrah''i (pX' - p'X) \\ - 2rh''\chi \left\{ \begin{array}{l} ppX'X' \\ - 2pp'XX' \\ + p'p'XX \end{array} \right\} \\ - 2rh''\chi \left\{ \begin{array}{l} qqX'X' \\ - 2qq'XX' \\ + q'q'XX \end{array} \right\} \end{array} \right\} s \quad + rrh''h' \left\{ \begin{array}{l} ppX'X' \\ - 2pp'XX' \\ + p'p'XX \end{array} \right\} - rrh''h' \left\{ \begin{array}{l} qqX'X' \\ - 2qq'XX' \\ + q'q'XX \end{array} \right\} - rrii (qX' - q'X)^2 \right\} = 0,$$

Et comme $pp - qq = rr$, ainsi que $p'p' + q'q'$, & que d'ailleurs, par le second Lemme, $pp' + qq' = rb$, cette équation se réduit à

$$\left. \begin{array}{l} rr aa ii \\ - 2rai\chi (pX' - p'X) \\ + r\chi\chi (rXX - 2bXX' + rX'X') \\ + ii (qX' - q'X)^2 \end{array} \right\} ss \quad + 2rrah''i (pX' - p'X) - 2rrh''\chi (rXX - 2bXX' + rX'X') \left\} s \right. \\ \left. \begin{array}{l} + r^3h''h' (rXX - 2bXX' + rX'X') \\ - rrii (qX' - q'X)^2 \end{array} \right\} = 0.$$

SCHOLIE pour le Probleme XVII. de la premiere
Partie de l'Essai d'Horolepse Nautique.

LES deux opérations où je viens d'employer l'algebre, sont de vraies résolutions de triangles sphériques obliquangles [nous avons en dernier lieu, les déclinaisons & la différence d'ascension droite de deux astres, c'est-à-dire, deux côtés d'un triangle sphérique avec l'angle EPE' , compris entre ces côtés, & nous cherchons la distance de ces astres, qui est le troisieme côté

du triangle. Dans le cas précédent, nous avons la hauteur d'un astre E , sa distance d'un autre astre E' , & l'angle des azymuths de ces astres, c'est-à-dire, deux côtés d'un triangle sphérique avec l'angle EZE' , opposé à l'un de ces côtés, & nous cherchons la hauteur de l'astre E' , qui est le complément du troisième côté du triangle]; mais ces deux solutions ne sont point semblables pour la commodité. La dernière est une équation linéaire, qui conduit à un calcul numérique assez facile; la précédente est une équation du second degré, qui, exigeant une extraction de racine, indique un calcul numérique pénible. Je ne peux dissimuler que ce calcul est bien plus long & plus difficile que celui que prescrit la règle de Trigonométrie Sphérique, qui convient au cas dont il s'agit; c'est pourquoi il seroit préférable dans la pratique, de faire usage de cette règle commune.

La solution algébrique est, dis-je, moins avantageuse que la règle commune pour le cas dont il s'agit, & il en est de même pour quelques autres cas, où l'on tomberoit aussi en des équations du second degré. Le désavantage de l'algèbre pour ces cas, consiste en ce que saisissant d'abord son objet d'un seul coup, elle parvient à une formule compliquée, qui indique plusieurs opérations arithmétiques, dont quelques-unes ne peuvent être exécutées directement par logarithmes, au lieu que la Trigonométrie, dans les mêmes cas, divise l'objet proposé en deux Parties, qu'elle fait chercher l'une après l'autre, en sorte qu'elle n'a besoin pour chacune, que d'une règle de trois simple & praticable par logarithmes.

[Si c'est seulement par *art*, que les Auteurs de cette science, qu'on répute *secondaire*, ont ainsi divisé leurs solutions, j'avoue bien volontiers que leur art est *admirable*, & je l'admire en ce qu'il a fait apercevoir des voies

particulieres, *indirectes*, si l'on veut, mais plus abrégées pourtant que celles que fournit l'algebre, par son procedé général & *immédiat*. Quoi qu'il en soit de l'*art* de ces Géometres, qui nous ont donné la Trigonométrie Sphérique, il me paroît heureux qu'ils aient tourné leur vûe ainsi qu'ils ont fait pour certains cas. Au reste, je ne suis point fort surpris que l'algebre conduise en ces rencontres à des pratiques arithmétiques peu commodes; car cela doit arriver quelquefois, parce que cette science étant assujettie sous des loix rigoureuses en ce qu'elle a de propre, elle ne donne, par sa mécanique, que ce qui résulte nécessairement, de la maniere dont on a entamé la recherche. C'est le calcul algébrique que j'entends ici par algebre propre: elle est, à la vérité, un moyen merveilleux pour faire des découvertes, & peut, jusqu'à un certain point, suppléer l'office du génie: mais je ne la regarde pourtant que comme un instrument, & je la distingue de l'analyse qui y est souvent jointe. C'est l'analyse prise en général, qui est le premier & le principal des Arts, & qui constitue l'*esprit Géometrique*; Art de génie, qui a peu de regles, & qui est, pour ainsi dire, au-dessus des regles, parce qu'il en est l'inventeur, & qu'il sçait diversifier sa marche, ou même s'en faire une nouvelle dans le besoin; Art enfin, dont les effets immédiats peuvent exister ailleurs que dans l'algebre.]

Si l'on veut considérer de près, & conférer les résolutions que fournissent l'algebre & la Trigonométrie Sphérique pour ces cas, dont on a un exemple ci-dessus, dans la recherche de la hauteur de l'astre *E'*: en voici le caractère. Elles se ressemblent d'un côté, en ce que dans l'une & dans l'autre on a deux quantités, dont il faut prendre tantôt la somme, tantôt la différence: c'est pourquoi, soit qu'on suive l'une ou l'autre route, on est également obligé

obligé de pénétrer dans la nature de la question, ou du moins d'en connoître l'état : je veux dire qu'il faut également voir quelle est la forme du triangle qu'on veut résoudre. Ainsi l'application de l'une de ces méthodes n'est gueres moins sujette à *ambiguïté* que l'application de l'autre ; & si c'est un avantage pour une opération, que d'obliger celui qui la fait d'*ouvrir les yeux* sur les circonstances de la question, les deux procédés dont il s'agit, sont doués assez également de cette espece d'avantage.

Ces procédés different d'ailleurs. Dans celui qu'enseigne la Trigonométrie ; les deux quantités dont il faut prendre la somme ou la différence, sont des angles ou des arcs ; & l'une de ces quantités ayant été trouvée par certaine droite correspondante, c'est-à-dire, par son sinus ou sa tangente, &c. sert ensuite à l'invention de la deuxième quantité, mais c'est une autre correspondante de la première quantité qu'on emploie dans l'analogie qui donne la seconde. Si, par exemple, on a trouvé la première quantité par sa tangente, on se sert de son cosinus dans la deuxième analogie, &c. C'est en cela que consiste le fin de cette résolution, & sa simplicité vient en partie de ce que l'on profite des divers calculs faits d'avance dans les Tables. Quant à la solution algébrique, elle donne directement le sinus de l'arc, ou de l'angle désiré ; c'est ce sinus qui est la somme ou la différence des deux termes compris dans la formule, & ces termes sont compliqués, parce que le cosinus étant enveloppé dans la préparation, il faut chasser une de ces inconnues, en y substituant sa valeur algébrique, en sorte qu'on est privé du bénéfice que la Trigonométrie commune trouve dans les Tables, &c.

Au reste, il y a plusieurs cas où les résolutions algébriques des triangles sphériques obliquangles n'étant que

des équations linéaires, indiquent des opérations arithmétiques à peu près égales en commodité, à celles que prescrit la Trigonométrie: & les regles de la premiere espece ont par-dessus celles de la deuxieme, le mérite d'être concises en moins de termes, d'être moins nombreuses (parce que la même formule comprend deux cas), & d'être plus faciles à découvrir, ou bien à rappeler à l'esprit de leur origine. Il est peut-être à propos de spécifier ici tous les cas possibles, afin d'assigner ceux où l'algebre prévaut, & ceux où elle me paroît moins utile. Ce que je vais dire auroit pû être mis à la tête de cet Essai, je l'y placerois s'il avoit à paroître au jour, & je refondrois en même tems le premier Lemme.

Il y a douze cas à résoudre dans les triangles sphériques obliquangles. Or, ces cas peuvent être rangés en quatre classes, & être réglés par trois ou quatre formules.

La premiere classe comprend trois cas, qui sont ceux où les quatre élémens du triangle qui font la matiere de l'opération, sont les trois côtés & un des angles: car cet angle étant opposé à un des côtés, 1° ou cet angle, 2° ou ce côté seront cherchés; 3° ou bien ce sera un des côtés qui comprennent cet angle.

La deuxieme classe est réciproque de la précédente: elle réunit les cas où les quatre élémens employés dans l'opération sont les trois angles, & un des côtés du triangle. Car ce côté étant opposé à un des angles, 4° ou on cherchera ce côté, 5° ou bien cet angle, 6° ou l'un des angles adjacents à ce côté.

La troisieme & la quatrieme classe comprennent les cas où les quatre élémens sphériques qui font la matiere de l'opération sont deux côtés, & deux des angles du triangle. Je place dans la troisieme classe, les cas où chacun des angles employés est opposé à l'un des deux côtés

aussi employés. Or, y ayant même relation des côtés aux angles dans cette hypothese, il ne s'y trouve que deux cas, 7° ou c'est un des angles, 8° ou bien un des côtés qui est désiré.

La quatrieme & derniere classe embrasse quatre cas ; dans lesquels il y a seulement un angle & un côté opposé employés, l'autre angle & l'autre côté employés n'étant pas opposés, mais adjacents. Car 9° ou c'est l'angle de la premiere condition, 10° ou le côté opposé que l'on cherche, 11° ou bien c'est l'angle de la deuxieme condition, 12° ou bien enfin, c'est le côté qui y est adjacent.

Les deux cas de la troisieme classe sont les plus simples de tous ; une seule analogie suffit pour les résoudre : aussi la regle algébrique de leur solution n'est-elle pas différente de celle que fournit la Trigonométrie. On a un exemple de cette regle, dans la formule cottée 5° au premier Lemme.

Les 1, 2, 4, 5, 9 & 10° cas, approchent en simplicité, de ceux dont on vient de parler : dans les formules que fournit l'algebre pour leur résolution, l'inconnue est seulement linéaire, mais sa valeur est nécessairement composée de deux termes. Tous ces cas conviennent, en ce que l'un des élémens donnés est opposé à l'élément cherché, & que les deux autres élémens employés dans l'opération, ne sont pas de la même condition respective. C'est par cette deuxieme circonstance, que les six cas mentionnés different des deux de la troisieme classe, & sont moins simples.

Enfin, les 3, 6, 11 & 12° cas, sont compliqués, & l'algebre ne peut les résoudre directement, que par une équation du second degré. Tous ces cas ont cela de commun entre eux, & de différent d'avec les huit autres, que

l'élément opposé à celui qui est cherché, n'est point compris entre les trois qui sont donnés. Ainsi ces quatre cas sont faciles à discerner.

Voyons maintenant les formules algébriques qui répondent à nos classes. Nous avons deux exemples de l'hypothese qui constitue la premiere de ces classes, dans les deux premiers §§ du premier Lemme ci-dessus [il est visible par les titres de ces §§, que les trois côtés, ou les complémens de ces côtés, & un des angles du triangle *PEZ*, sont les quatre élémens dont la relation y est demandée]. Ainsi nous avons deux exemples de la regle algébrique, qui convient aux cas de la premiere classe; dans la premiere & la deuxieme formulé de ce Lemme. Ces deux formules $rrh \pm cyu = rsx$; $rrx \pm cnk = rsh$; n'étant donc que des applications de la même regle, il eût suffi d'en démontrer une, d'autant plus que je n'avois pas grand usage à faire de la deuxieme dans cet Essai.

J'ai insinué qu'une seule regle algébrique s'étendoit aux trois cas de la premiere classe, nonobstant leur différence: mais aussi c'est d'une maniere différente qu'elle y sert. En effet, pour trouver *h*, ou *u*, qui sont les cosinus du côté *EZ*, & de l'angle opposé *EPZ*, la formule $rrh \pm cyu = rsx$ est parfaite: mais elle n'est que préparatoire pour obtenir l'un ou l'autre côté, *EP*, ou *PZ*, du même triangle *EPZ*, parce qu'il y reste dans ce cas, une inconnue à chasser, &c.

Quant à l'invention, ou démonstration de la regle dont il s'agit, j'observe qu'on y peut parvenir en plusieurs manieres, dont deux également simples & aisées à retenir, le font plus que toute autre, à raison de l'ordre qu'on y garde. M. de Maupertuis, que j'ai copié ci-dessus au Lemme premier, a pris l'un de ces procedés simples dans l'exemple du §. II: mais il n'a employé ni l'un ni l'autre

dans l'exemple du §. I, où l'on a la formule $rrh \pm cyu = rsx$, ou bien, $rrh - rsx = \pm cyu$ à établir. Le procédé qu'il y a suivi, a été de chercher les valeurs des deux quantités BO , OF , dont la somme ou bien la différence est BF , c'est-à-dire, $\frac{yu}{r}$, &c. On réussiroit encore également, en cherchant les deux quantités dont la somme ou la différence est $\frac{cu}{r}$, & en faisant voir, à l'aide d'une figure convenable, que les valeurs de ces quantités sont $\pm \frac{ys}{x}$, & $\frac{r}{y} \left(h \pm \frac{rs}{x} \right)$. Mais voici le genre de procéder que je préfère : c'est de prendre les valeurs des deux quantités, dont la somme ou bien la différence est égale au cosinus de l'un ou de l'autre des côtés PE , PZ , qui comprennent l'angle employé dans l'opération. En disposant, par exemple, l'égalité qu'il s'agit d'établir par rapport au cosinus x du côté PE , nous avons à montrer que $\frac{rrh - cyu}{rs} = x$, *Fig. 1* & *2^e*, ou que $\frac{rrh + cyu}{rs} = x$, *Fig. 3^e*; c'est-à-dire, que $\frac{rh}{s} \pm \frac{cyu}{rs} = x$; & cela est aisé, car (en suppléant la lettre R dans lescites figures, pour marquer le point d'intersection des droites CBP , LFG) il est visible que CB ou $x = CR \pm RB$. Or (à cause de la similitude des triangles rectangles PQC , CGR) on a, $PQ (s) : CP (r) :: CG (h) : CR = \frac{rh}{s}$; & les triangles semblables PQC , FBR , donnent $s : c :: BF \left(\frac{yu}{r} \right) : RB = \frac{cyu}{rs}$. Donc, &c.

Que si on veut disposer l'égalité en question par rapport au cosinus s de l'autre côté PZ du même triangle, on aura la même facilité à l'établir, c'est-à-dire, à prouver que

$\frac{r rh + cyu}{rx} = s$, ou bien que $\frac{rh}{x} + \frac{cyu}{rx} = s$, en se fer-

vant d'une figure convenable, telle qu'est la 45^e, où $OAIxoC\phi$, représente le grand cercle, qui a P pour pole, & $\Delta Z\phi$, un parallele à ce cercle: ainsi Δz est le sinus (c) de PZ , & Cz son cosinus (s); $A\phi$ (qui a $Z\phi$ pour parallele) est le sinus de l'angle EPZ , & $C\phi$ son cosinus

(u); on a donc, $CO(r) : C\phi(u) :: \beta_{\Delta}(c) : \beta\phi = \frac{cu}{r}$.

$VIKxC$ est le grand cercle qui a E pour pole, & $\zeta Z\beta\gamma\phi$ est un parallele à ce cercle, ainsi $\zeta\gamma$ ou $Z\gamma$ est le sinus de ZE , & $C\gamma$ en est le cosinus (h); enfin Cx est le sinus (y) de PE , & Px est son cosinus (x).

Cela posé, il est visible que C^s ou $s = C^r - p^s$. Or, (à cause de la similitude des triangles rectangles PxC , $C\gamma r$)

on a $Px(x) : CP(r) :: C\gamma(h) : C^r = \frac{rh}{x}$; d'un autre

côté, les triangles semblables PxC , ϕsr , donnent:

$Px(x) : Cx(y) :: \beta\phi\left(\frac{cu}{r}\right) : p^s = \frac{cyu}{rx}$. Donc $C^s(s)$

$= C^r - p^s = \frac{rh}{x} - \frac{cyu}{rx}$; ce qu'il falloit prouver.

A l'égard des cas de la deuxième classe, quoique nous n'en ayons rencontré aucun dans cet Essai, nous pouvons dire en passant, & prouver, qu'ils sont soumis à une règle algébrique, pareille à celle qui vient d'être établie; parce que tout triangle sphérique correspond à quelque autre de telle façon, que les côtés de celui-ci ont respectivement les mêmes sinus que les angles de celui-là, & que les côtés de celui-là ont aussi les mêmes sinus respectivement que les angles de celui-ci. Les trois côtés, & un des angles de l'un, ont donc entre eux la même espèce de relation que les trois angles, & un des côtés de l'autre. Dans la Fig. 46, qui est conforme à la Fig. 1, quant aux

lignes marquées des mêmes lettres, $AOXI$ étant le grand cercle dont P est le pôle, &c. soit KIV un autre grand cercle, dont E soit le pôle (d'où il suit que K est pôle du cercle $ZEMV$, & I pôle du cercle $PEOp$), nous aurons les triangles KIX , & PZE , pour correspondans, de la manière qui a été dite. Car 1°. les angles PIa & EIK , étant droits par l'hypothèse, & renfermant chacun l'angle PIK , l'angle EIP est égal à KIa , complément à deux droits de l'angle KIX ; EIP est donc aussi complément à deux droits de KIX , & ces deux angles ont mêmes sinus & cosinus; donc KIX a même sinus y & cosinus x , que l'arc PE , qui est la mesure de l'angle EIP . 2°. L'arc EMV , étant par l'hypothèse un quart de circonférence, de même que ZEM , l'angle IKX mesuré par MV , a même sinus k , & cosinus h , que l'arc ZE . 3°. L'angle IXK complément de KXP , & égal par conséquent à l'angle PXZ , a même sinus c , & cosinus s , que l'arc PZ mesure de l'angle PXZ . 4°. Enfin, IXO étant un quart de circonférence, de même que AOX , l'arc IX est égal à AO , qui est la mesure de l'angle EPZ , & a par conséquent même sinus t , & cosinus u que cet angle. Donc les trois angles, & le côté IX du triangle KIX , ont la même relation entre eux que les trois côtés, & l'angle P du triangle EPZ ; & cette relation est exprimée par la formule $rrh - cyu = rsx$.

La formule $rrx + cnk = rsh$, qui est de la même espèce, marque pareillement la relation des trois angles, & du côté KX du triangle KIX , parce que l'arc KXM étant un quart de circonférence, ainsi que XMH , l'arc KX est égal à MH , qui est la mesure de l'angle MZH , complément à deux droits de l'angle PZE , & par conséquent KX a même sinus m , & cosinus n , que l'angle PZE , &c. On feroit voir encore, s'il étoit nécessaire, que le côté

KI du triangle *KIX* a mêmes sinus & cosinus que l'angle *PEZ*.

On peut remarquer ici que l'élément sphérique cherché dans les quatre cas les plus simples de la première & de la deuxième classe, est exprimé par son cosinus : mais dans les deux cas de la troisième classe, l'élément désiré est exprimé par son sinus, & c'est enfin par sa cotangente qu'il l'est, dans les deux cas simples de la classe dont il nous reste à parler. J'ajoute que dans les quatre premiers cas, la Trigonométrie emploie pour l'élément cherché, la même expression que l'algèbre ; c'est pourquoi l'on peut, dans ces cas, passer de la règle trigonométrique à la règle algébrique, à l'aide du second Lemme.

Nous avons deux exemples de l'hypothèse qui constitue la quatrième classe, dans le III & IV^e §. du premier Lemme. Leurs titres font assez voir, que les quatre éléments sphériques, dont la relation y est demandée, sont deux côtés, & deux angles du triangle *PEZ*, tels qu'un seul de ces côtés est opposé à l'un de ces angles. Ainsi nous avons deux exemples de la règle algébrique, propre aux cas de la quatrième classe, dans la troisième & la quatrième formule de ce Lemme, qui sont $rmyt + rmcx = msyu$, & $rcht + nkst = rmku$, ou bien (en les réduisant, comme il convient, à une forme plus simple) $Nt + cX = su$, & $Hc + mT = ns$.

Quant à l'invention de la règle dont il s'agit, où au rappel de son fondement à la mémoire, on peut y parvenir en plusieurs manières, les unes plus simples que les autres. M. de Maupertuis a procédé assez simplement dans l'exemple du §. III, où je l'ai copié, ainsi que dans les autres ; mais cet habile homme a procédé différemment & avec circuit, dans l'exemple du §. IV. Il eût pu s'y conduire

conduire de la même manière que dans l'exemple précédent, en raisonnant comme il suit. Les triangles semblables, efC , EFB , donnent $t : u :: EF \left(\frac{mk}{r} \right) : FB = \frac{mku}{tr}$.

Les autres triangles semblables PQC , FBR , (je suppose encore ici que le point d'intersection des droites PBC , LFG , est marqué R) donnent ; $s : r :: FB \left(\frac{mku}{tr} \right) : FR = \frac{mku}{st}$. D'ailleurs les triangles semblables PQC , CGR , donnent ; $s : c :: CG (h) : RG = \frac{ch}{s}$. Or, $FR - RG = FG \left(\frac{nk}{r} \right)$ Fig. 1 & 4 ; ou bien $FR + RG = FG$;

Fig. 3, &c. Donc $\frac{mku}{st} \mp \frac{ch}{s} = \frac{nk}{r}$, ou enfin, $rmku \mp rcht = nkst$. Il y a encore une autre manière toute pareille à celle qu'on vient de voir, pour établir la même formule, sçavoir, en montrant que $\frac{mu}{n} \mp \frac{h}{k} \times \frac{r}{n} \times \frac{ct}{r} = \frac{st}{r}$. Il y a aussi une deuxième manière de

prouver la troisième formule, laquelle est semblable à celle qu'a employée M. de Maupertuis. Elle consiste à montrer que $\frac{nt}{u} \mp \frac{x}{y} \times \frac{r}{u} \times \frac{mc}{r} = \frac{ms}{r}$.

Quoique la double manière de raisonner que je viens de toucher, soit fort bonne, il est cependant une autre méthode, que je préférerois volontiers à celle-là, comme étant plus directe pour établir la règle en question. Cette règle est dans l'exemple du §. III, $rnyt \mp rmcx = msyu$, ou bien $Nt \mp cX = su$; & pour arriver à cette deuxième forme de la règle, il faut, lorsqu'on a procédé comme ci-dessus, montrer encore, que $\frac{rn}{m} = N$, & que $\frac{rx}{y} = X$. Mais on peut éviter cette espèce de détour, & prouver directement que $Nt \mp cX = su$, ainsi

qu'on va voir. Il y a deux manieres également propres pour cela, car il s'agit de montrer, ou que $\frac{Nt \pm cX}{s} = u$, ou bien que $\frac{Nt \pm cX}{u} = s$.

1^o. Dans la Fig. 1, qui est conforme à la Fig. 47. quant aux lignes marquées des mêmes lettres, X y désignant le pôle du grand cercle $PZAHpzan$, & Z celui de $HMXh$, &c. Soit A^c le sinus (c) de l'arc AH égal à PZ , & C^c son cosinus s ; Of le sinus (t) de l'arc AO ou de l'angle EPZ , & $Og = Cf$ son cosinus (u); Oe la tangente X du complément OE de l'arc PE ; $X\mu$ la tangente de l'arc XM , qui est l'excès de l'arc hXM , par lequel est mesuré l'angle PZE , sur un quart de circonférence; c'est-à-dire, soit $X\mu$ la cotangente N de l'angle PZE ; soit gq une parallèle à $X\mu$, & à C^cH , terminée par la secante $CM\mu$; il suit de ces hypothèses, que le rayon CgX , & la droite fO , sont perpendiculaires au plan Ogq ; ainsi la tangente Oe étant perpendiculaire aux lignes gO , Of , se trouve dans le plan Ogq , & la droite eq rencontre la droite gO en quelque'un de ses points, que je marque par d : d'ailleurs cette droite edq étant & dans le plan $MCEe$ de deux rayons du cercle $ZEMz$, qui est perpendiculaire à $CXMH$, & dans le plan Ogq qui est aussi perpendiculaire à ce plan $CXMH$, est pareillement perpendiculaire à ce plan, & par conséquent à la droite gq qui y appartient. Donc enfin les trois triangles A^cC , dqg , dOe , sont rectangles & semblables. Cela posé, les triangles semblables $CX\mu$, Cgq , donnent $CX(r) : X\mu(N) :: Cg = fO(t) : gq = \frac{Nt}{r}$; les triangles A^cC , dqg , donnent $C^c(s) : CA(r) :: gq(\frac{Nt}{r}) : gd = \frac{Nt}{s}$; enfin les triangles A^cC , dOe , donnent $C^c(s) : A^c(c) :: eO(X) : dO = \frac{cX}{s}$. Or, $gd + dO = gO(u)$,

donc $\frac{Nt}{s} + \frac{cX}{s} = u$. Ce qu'il falloit prouver.

2°. Que si on veut montrer que $\frac{Nt}{u} + \frac{cX}{u} = s$, on le pourroit, au moyen de la *Fig. 47*, en y ajoutant quelques lignes, sçavoir, en joignant les points O, q , & divisant Cz par une parallele à Oq , tirée du point A , &c. Mais il vaut mieux employer la *Fig. 48*. Les mêmes lettres y désignent les mêmes arcs que ci-devant. Soit d'ailleurs, $a\sigma$ le sinus (t) de l'angle sphérique $EPZ = OCA = aC\sigma$, & $C\sigma$ son cosinus u ; soit $C\gamma = h\varphi$ le sinus (c) de l'arc $PZ = ha$, & $h\gamma$ son cosinus s ; soit hk la tangente de l'angle hZK , qui est la différence de l'angle PZE d'avec un droit; c'est-à-dire, soit hk la cotangente (N) de l'angle PZE ; soit PT le complément de l'arc EP , $P\theta$ la tangente X de PT ; γz une parallele à $P\theta$ & à $OC\sigma$; kz une droite située dans le plan du cercle IKT , qui est perpendiculaire au cercle $COEPT$; δ l'intersection des droites $kz, h\gamma$. Les trois triangles $a\sigma C, \delta z\gamma, \delta hk$, sont rectangles & semblables.

Cela posé, on voit que les triangles semblables $CP\theta, C\gamma z$, donnent $CP(r) : P\theta(X) :: C\gamma(c) : \gamma z = \frac{cX}{r}$. Les triangles $a\sigma C, \delta z\gamma$, donnent $C\sigma(u) : Ca(r) :: \gamma z \left(\frac{cX}{r} \right) : \gamma\delta = \frac{cX}{u}$. Enfin les triangles $a\sigma C, \delta hk$, donnent $C\sigma(u) : a\sigma(t) :: hk(N) : \delta h = \frac{Nt}{u}$. Or, $\gamma\delta + \delta h = h\gamma(s)$, donc $\frac{Nt}{u} + \frac{cX}{u} = s$.

A l'égard des signes qui conviennent aux divers termes de nos regles algébriques de résolution des triangles sphériques obliquangles, voici un échantillon des observations qu'on pourroit faire pour y mettre ordre. Soit prise pour exemple, la regle des cas de la premiere

R. r ij

classe, laquelle est susceptible de ces trois états :

$$+ rrh - cyu = rsx ,$$

$$- rrh + cyu = rsx ,$$

$$+ rrh + cyu = rsx .$$

Il faut remarquer d'abord, que chacun de ces états ne répond pas seulement au triangle EPZ , mais encore à trois autres triangles pEZ , pEz , PEz , adjacents à celui-là, chacun desquels a un angle & un côté communs avec PEZ , & dont les autres angles & côtés, sont complémens à deux droits des autres élémens de PEZ . Il y a donc plusieurs cas particuliers à considérer, cas que je distribue de cette sorte.

Les deux côtés qui comprennent l'angle employé dans la règle, angle qui y est employé par son cosinus u , sont ou de même affection (c'est-à-dire, tous deux moindres, ou tous deux plus grands qu'un quart de circonférence) ou ils sont d'affection différente.

Ces côtés étant de même affection, ou l'angle compris entre eux est aussi de même affection que le côté qui y est opposé, ou il n'en est pas. Dans le premier cas, si l'angle est aigu, on a $rrh - cyu = rsx$, premier état de la formule. Voyez les triangles EPZ , EpZ , Fig. 1^e & 2^e. Mais si l'angle est obtus, on a $-rrh + cyu = rsx$, deuxième état de la formule, voyez les triangles EPZ , Epz , Fig. 4^e. Et si l'angle employé est d'autre affection que le côté opposé (auquel cas il doit être obtus), on a $rrh + cyu = rsx$, troisième état de la formule. Voyez les triangles EPZ , EpZ , Fig. 3^e.

Les côtés qui comprennent l'angle employé, étant de diverse affection, cet angle ou est aussi d'une autre affection que le côté opposé, ou de la même. Dans le premier cas, l'angle doit être aigu, & le dernier état de la for-

mule a lieu. Voyez les triangles EPz , Epz , *Fig. 3^e*. Dans l'autre cas, si l'angle est obtus, c'est le premier état de la formule qui a lieu. Voyez les triangles EPz , Epz , *Fig. 1^e & 2^e*; mais si l'angle est aigu, on a le second état de la formule. Voyez les triangles EPZ , EpZ , *Fig. 4^e*.

Il est aisé de distribuer les cas régis par les autres formules, dans un ordre semblable.

J'observe pour conclusion, que si les triangles sphériques sont rectangles, ou ont un quart de circonférence pour un de leurs côtés, il s'évanouit un des termes dans les formules qui en ont trois, & l'on trouve les mêmes règles que celles que prescrit la Trigonométrie pour ces sortes de triangles; ainsi l'algebre a encore en ce point un avantage sur cette autre science, les règles des triangles rectangles n'étant dans le procédé algébrique, qu'une espece de Corollaire des règles des obliquangles, au lieu que dans la Trigonométrie, il faut établir la résolution des triangles obliquangles, sur les règles particulieres des triangles rectangles.



SECONDE PARTIE.

*Opérations subsidiaires aux calculs , pour trouver l'heure.
Moyens de simplifier quelques solutions
algébriques de ce Probleme.*

LES solutions algébriques ne requièrent souvent pour elles-mêmes que des opérations faciles , qu'une marche commune & peu subtile , qu'un petit jeu ou remuement de lettres & de signes ; & outre l'avantage qu'elles ont pour l'ordinaire , de ne dépendre que d'un petit nombre de principes simples & féconds (principes dont l'invention fait le fort du mérite d'un Géometre algébriste), elles ont toujours celui de la précision. Mais aussi elles peuvent laisser à leur suite , la nécessité d'un calcul numérique long & pénible , & la plupart de celles que j'ai rapportées ou données ci-dessus , sont de cette qualité. Outre beaucoup de multiplications & de divisions , elles indiquent des extractions de racines , qui ne peuvent être exécutées directement à l'aide des logarithmes. J'ai donc pensé qu'il convenoit de proposer d'autres solutions plus expéditives. On suppose qu'il est important pour un Navigateur de sçavoir l'heure , mais s'il n'opere que d'après l'algebre , un tems considérable s'écoulera pendant qu'il fera son calcul ; son vaisseau pourra être déplacé notablement en longitude , & il fera dans un nouveau besoin de chercher l'heure. C'est un cas approchant de celui du Barbier de Martial :

Eutrapelus tonfor dum circuit ora Luperçi,
Expungitque genas , altera barba subit.

Parlons sérieusement. Je ne prétends pas que les opérations expéditives que j'ai à proposer, soient absolument meilleures que les solutions algébriques, & leur soient préférables : elles sont moins précises, il faut l'avouer, & je ne les donne que par forme d'accessoire, qui n'est pas sans quelque avantage. Le bon est partagé, est dispersé, & il y a presque toujours dans les opérations humaines, de *fatales compensations*. Par exemple, si l'office du Géometre dans un Probleme est facile, l'office correspondant de l'Observateur est difficile, & demande une grande adresse, ou bien est peu sûre. Si au contraire, le Géometre veut faire usage d'une observation simple & exacte, son office devient, ou paroît devenir d'autant plus difficile : & quant aux pratiques du Géometre, telle qui est fort juste, est d'ailleurs fort pénible, & telle qui est plus facile qu'une autre, est d'ailleurs moins exacte. Ainsi j'estime qu'il est à propos de rassembler diverses méthodes, afin de prendre ce que chacune a de bon, s'il est possible.

Voici les raisons pour lesquelles je trouve quelque avantage dans les opérations qui sont plus expéditives que les calculs indiqués par l'algèbre.

1°. Quoique ces opérations ne soient pas absolument exactes par elles-mêmes, elles seront peut-être quelquefois suffisantes pour les besoins nautiques. Elles le seront en effet, lorsqu'il ne sera pas nécessaire de déterminer l'heure avec la plus grande précision ; car elles ne sont pas sujettes à un défaut bien notable, si on les fait avec des instrumens d'une bonne grandeur. Cette manière n'est pas même fort inférieure à la voie du calcul à cet égard : car les observations étant sujettes à quelque erreur, leur résultat trouvé par le calcul, doit être pareillement sujet à quelque erreur plus ou moins grande. Or, l'erreur inévitable qui découle de l'observation, ne sera pas

beaucoup augmentée par l'erreur particuliere qui peut se glisser dans les opérations dont il s'agit. On verra dans la suite, que l'une & l'autre erreur est à peu près de la même espece, & a une influence à peu près semblable pour chaque Probleme : ainsi quand elles seroient du même degré, & conspirantes, le défaut de justesse du résultat de ces opérations, ne seroit que double de celui du résultat du calcul : mais j'estime que l'erreur particuliere de ces opérations sera moindre en degré que l'erreur de l'observation ; celle-là n'ira peut-être pas au tiers, ni même au quart de celle-ci. Cela supposé, le défaut provenant de l'observation, ne sera augmenté que d'un tiers, ou d'un quart en sus, par le concours de celui qui peut se glisser dans les opérations que j'ai en vûe.

2°. La facilité de ces opérations invitera probablement le Navigateur à multiplier les observations propres à déterminer l'heure. Or, en prenant un milieu entre plusieurs déterminations, il n'approchera gueres moins du vrai, & peut-être en approchera-t-il plus que s'il se bornoit à une seule détermination, exécutée par la voie du calcul.

3°. On trouvera dans la troisieme Partie, des regles générales pour discerner les cas d'observation qui sont avantageux, ou défavantageux, pour la détermination de l'heure, c'est-à-dire, les cas dont l'erreur n'en produit qu'une petite, ou au contraire en produit une fort grande dans la détermination de l'heure. Mais s'il arrivoit qu'un Navigateur, faute d'avoir compris ces regles, ou de les bien posséder, ou par inadvertance, voulût employer une observation peu avantageuse, il en reconnoîtroit aisément la qualité, par ces opérations que je veux proposer : elles répondent si bien aux observations, que quand elles sont peu précises dans leur résultat, c'est une
marque

marque fûre que l'observation particuliere sur laquelle on travaille , n'est pas avantageuse pour la détermination désirée, quand même on la tenteroit par la voie du calcul.

4°. Il se trouvera toujours sans doute, sur les grands vaisseaux, quelque personne capable d'exécuter les calculs propres pour la détermination de l'heure, & qui en ait le loisir; mais peut-on compter qu'il s'en trouve sur tous les petits vaisseaux? S'il n'y en a pas, les opérations subsidiaires aux calculs semblent requises. Et à l'égard des grands vaisseaux, rien n'empêche que deux personnes n'y emploient des pratiques différentes, pour chercher l'heure sur la même observation. Ne doit-on pas être curieux de voir promptement l'à-peu-près de ce que l'on cherche?

5°. Quelque versé qu'on soit dans l'arithmétique, on peut commettre une faute de calcul. D'ailleurs, quand on opere d'après une formule algébrique, on peut encore prendre un signe pour un autre; additionner, par exemple, en conséquence, au lieu de soustraire. Il y a donc lieu de suspecter le résultat d'un calcul qui ne seroit fait qu'une seule fois. Or, l'opération subsidiaire est très-propre pour le confirmer, s'il est bon, ou pour en déceler le vice, s'il en a un.

6°. Dans les Problemes où l'algebre fournit pour la détermination désirée, une équation du second degré, dont l'une & l'autre racine est positive, il faut beaucoup d'attention pour faire un juste choix entre elles, & l'on a sujet de craindre l'équivoque. Les opérations que je vais proposer, soulageront beaucoup l'imagination dans ces cas, & faciliteront le choix nécessaire.

7°. Enfin, c'est l'observation des astres dont la déclinaison est variable, qui est la plus commode, & de l'usage le plus étendu, pour trouver l'heure. Or, pour la faire

servir à cette découverte, il faut avoir par préalable, la déclinaison pour le moment de l'observation, au moins à peu près; & pour la connoître, cette déclinaison, par le moyen des Tables, il faut ou avoir observé tout le tems écoulé depuis qu'on a quitté certain point du globe dont on connoît la longitude, ou, si l'on y a manqué, il faut sçavoir à peu près l'heure du lieu où l'on a fait l'observation, ainsi que sa longitude; en sorte qu'on peut se rencontrer à cet égard, dans le cas d'une espece de cercle (ce qui n'est pas sans exemple dans les Problemes Nautiques), je veux dire qu'il peut être nécessaire de connoître déjà l'heure à peu près, pour la déterminer plus exactement, par l'observation des astres qui varient en déclinaison. Or, pour parvenir dans ce cas à une certaine exactitude, il faut corriger la détermination par le moyen du calcul différentiel; ou, si on l'ignore, il faut réitérer cette opération, je veux dire qu'il faut opérer une premiere fois sur une déclinaison supposée, pour obtenir une déclinaison plus correcte, puis une deuxieme fois sur cette déclinaison corrigée, pour obtenir la détermination requise. (Si l'on vouloit faire usage de la Lune, il faudroit peut-être réitérer l'opération jusqu'à trois fois). Il en est de même pour la longitude des planetes; on peut être dans le besoin de la corriger après l'avoir supposée, &c. Mais un Navigateur auroit-il le courage de faire deux fois de suite de longs calculs numériques; (ou bien de recourir au calcul différentiel, pour en tirer une double formule de correction relative à la double erreur sur le lieu de la planete, &c.)? D'ailleurs, quelle nécessité y a-t-il qu'une premiere détermination faite seulement pour obtenir le lieu d'un astre plus correctement qu'on ne l'avoit par estime, ait autant d'exactitude qu'il en peut résulter du calcul? Il est plus avantageux, ce semble, que cette

opération préalable puisse s'exécuter avec facilité & promptitude, car on la doublera si l'on veut. Les pratiques expéditives que je vais exposer, sont donc convenables, au moins pour le cas dont il s'agit.

Je ne vois au reste qu'un inconvénient dans la proposition de ces pratiques, c'est que quelque Navigateur pourra s'en contenter, & négliger la voie du calcul, quoiqu'il soit en état de l'employer; mais d'un autre côté, si l'on cachoit ces pratiques, n'y auroit-t-il point quelque Navigateur, qui, dégouté par la peine du calcul, négligât de chercher l'heure aussi fréquemment qu'il le fera? &c.

Cette voie subsidiaire au calcul, dont il m'a paru à propos d'annoncer d'avance les petits avantages, de peur qu'on n'en fit trop peu de cas, est de tracer les cercles de la sphere qui répondent aux observations, & qui déterminent les arcs ou les angles cherchés.

On peut exécuter cette description de plus d'une manière. On peut la faire, par exemple, sur la sphere même. C'est la manière qui se présente d'abord à l'esprit, & qui est la plus simple; & il ne faudroit pas beaucoup d'art à un Navigateur, pour découvrir de lui-même le procédé particulier qui seroit requis dans chaque conjoncture. Cependant cette manière n'est pas la meilleure; l'opération seroit peu précise sur un petit globe; un grand globe seroit trop difficile à manier, à cause de sa pesanteur, ou, s'il étoit de matière très légère, il seroit sujet à irrégularité. D'ailleurs pour connoître la valeur de certains angles sur un globe nud, il faudroit y tracer trop de lignes, &c. Il y auroit d'autres inconvénients pour la solution de nos Problèmes, si on prétendoit se servir d'un globe mobile sur son aissieu planté, comme il est ordinaire dans un méridien, supporté par un horizon.

C'est sur un plan où la sphere céleste soit projetée, que je conseille de travailler. On peut faire une partie de ce planisphere de métal, & y donner un grand diametre, sans qu'il en résulte d'incommodité. L'espece de projection que je choisis, est celle que quelques Auteurs nomment *Stéréographique*, & qui est en usage dans les Astrolabes. Dans cette projection, les droites qui passent par les divers points du globe, & les projettent sur le planisphere, partent de l'extrémité de l'axe du globe, lequel est perpendiculaire à ce plan. On sçait, & il est assez visible, que dans cette hypothese tous les cercles grands ou petits, qui passent par ce point commun à toutes les lignes de projection, sont représentés sur le plan par des lignes droites indéfinies. Ainsi le cercle horaire $poT\beta PEO\epsilon$, *Fig. 17*, est représenté en partie sur le plan de l'équateur, par la droite $oTbPEOB$. On sçait encore que les autres cercles, grands ou petits, c'est-à-dire, tous ceux hors du plan desquels est le point commun des lignes de projection, sont représentés dans cette hypothese par divers cercles sur le planisphere; & celui qui ne le sçauroit pas, le reconnoitra facilement, en imaginant le cone formé par toutes les lignes de projection qui passent par un de ces cercles de la sphere, le cone, par exemple, que forment les lignes qui passent par le cercle dont la corde $\beta\gamma\epsilon$, représentée par bgB sur le planisphere, est le diametre, cone qui est ici figuré par sa section angulaire la plus aigue, βpB ; car ces deux lignes, $\beta\epsilon$, bB , font les mêmes angles avec les deux côtés de cette section*; par conséquent les deux bases du cone qui ont $\epsilon\beta$, bB pour diametre, sont de même nature. On sçait de plus, que les angles que font les cer-

* L'angle $\beta\beta\epsilon$ ayant pour mesure la moitié de l'arc $p\epsilon$, est égal à l'angle βbB , qui a pour mesure la moitié du quart-de-cercle po , moins la moitié du complément ϵo de l'arc $p\epsilon$: & l'angle $\beta\epsilon\beta$ mesuré par la moitié des arcs po , $o\beta$, est égal à βbB , mesuré par la moitié des arcs po , $o\beta$.

cles de la sphere, répondent à des angles qui leur sont égaux sur le planisphere.

Quant à la construction du planisphere proposé, & au moyen soit de tracer sur celui qui n'est chargé que de ses lignes principales, les autres cercles dont on peut avoir besoin, soit de diviser ces cercles en degrés, il est évident d'abord, que tout cercle, grand ou petit, qui est parallèle au plan de projection, y est représenté par un cercle qui a pour centre le point représentatif de l'axe, du sommet duquel partent les lignes de projection; & que les parties de chacun de ces cercles de la sphere, sont proportionnelles aux parties correspondantes de celui qui en est la projection; c'est pourquoi les degrés de ceux-là sont représentés par des arcs égaux sur le planisphere. Pour les autres cercles de la sphere, ceux qui les représentent, ont un centre propre, différent tant du point qui représente le pôle du cercle de la sphere, que du point qui en représente le centre (ainsi dans la ligne *bEB*, *Fig. 17*, le point *G* est le centre propre du cercle par lequel celui qui a pour diamètre $\beta\gamma\epsilon$, est représenté sur le plan de l'équateur; le point *E* est la projection du pôle *E* de ce cercle de la sphere, & le point *g* est la projection de son centre). Et les degrés de chacun de ces cercles de la sphere non-parallèles au plan de projection, répondent à des arcs inégaux de celui qui les représentent.

Je suppose qu'on ait un cercle divisé en ses degrés & minutes, & qu'on le prenne pour un grand cercle de la sphere, sur le plan duquel on doive en faire la projection. Soit, par exemple, *Fig. 18*, *AOXIaoni* l'équateur; soient tirées par le centre *CP* de ce cercle, deux lignes perpendiculaires l'une à l'autre, telles que *IPi*, *oTPEOB*, qui représentent deux cercles horaires. Si de l'intersection *I* de l'une de ces lignes avec la circonférence *AOXIaoni*,

on tire à toutes les divisions de cette circonférence, des droites qui coupent le cercle $OTPEOB$ perpendiculaire à IPi , ce cercle se trouvera divisé en ses degrés, &c. IPi fera pareillement divisé en ses degrés, &c. par des droites tirées du point O , à toutes les divisions de la circonférence $AXlaxi$. Tout autre cercle horaire, tel que $ahPZA$, peut être divisé de même, par des droites tirées de son pôle X : mais il n'est pas nécessaire que beaucoup de cercles horaires soient tracés & divisés jusqu'à leurs moindres aliquotes possibles, sur le planisphere; une alidade mobile autour du centre C , & divisée comme $OTPEOB$, autant qu'on le pourra, tiendra lieu des autres cercles horaires. Il est à propos que cette alidade excède beaucoup en longueur le diamètre du planisphere. Cela donné, soit.

LEMME PREMIER.

Décrire sur le planisphere un cercle quelconque, oblique à ce plan, & le diviser en degrés.

§. I. Décrire le cercle dont on a le pôle E , Fig. 18, & dont on connoît l'amplitude. [Ce que je nomme ici *amplitude*, a peut-être un autre nom; j'entends par ce terme, la distance Eb , ou EC , Fig. 17, du pôle d'un cercle à sa circonférence.]

Portez l'alidade sur le point E , prenez de part & d'autre de ce point sur la droite $oPEO$ des parties Eb , EB du même nombre de degrés, & égales à l'amplitude du cercle désiré: trouvez le milieu G de la ligne bB , & du centre G , décrivez un cercle par les points b , B ; ce cercle est celui qu'on désire. Pour trouver le point G avec justesse & promptitude, il sera bon d'avoir un instrument fait en zic-zac, composé de trois regles minces, qf , fF , FQ , mobiles sur deux clous f , F , dont les deux extrêmes qf ,

FQ , soient justement égales entre elles, & à la moitié de la regle moyenne fF . Celle-ci étant divisée à son milieu N , si on fait répondre les deux bouts q, Q de cet instrument, aux deux points b, B de la ligne DEO , & qu'on fasse tomber le point N sur cette ligne, il est visible que N donnera le milieu G de l'intervalle quelconque bB . Le point N du zic-zac sera encore propre à recevoir la pointe du compas, & cela préservera le planisphere des macules que cette pointe y feroit.

SCHOLIE. Si c'étoit un grand cercle qu'il fallût tracer, on n'auroit pas besoin d'en prendre le diametre entier sur l'alidade, il suffiroit de compter autant de degrés au-delà du pôle E donné, qu'il y en a entre ce point E & le centre CP du planisphere, on trouvera justement le centre propre du cercle demandé. A l'égard d'un petit cercle, si on a le point g de projection de son centre (le moyen de trouver ce point est aisé à découvrir); & qu'on prenne EG du même nombre de degrés que Eg , on aura le centre propre G du cercle de projection. Cette pratique sera une ressource pour les cas où le point B du cercle désiré tomberoit trop loin du centre du planisphere, & par-delà le bout de l'alidade. (Cette pratique est fondée sur ce que la ligne par laquelle le centre d'un cercle est projeté sur le planisphere, fait avec la ligne qui en représente le diametre, le même angle que la ligne qui part du point commun aux lignes de projection, & passe par le centre propre du cercle représentatif, fait avec le diametre du cercle représenté. Ainsi la ligne $pg\gamma$, Fig. 17, fait avec bB l'angle pgB , égal à l'angle $pr\beta$ de la ligne pG avec le diametre $\epsilon\beta$; & il suit de-là, que les lignes $pG\gamma$, pGr , font des angles égaux avec la ligne pEE .)

§. II. Tracer un grand cercle dont on a deux points.

Soient E, Z , ces deux points, Fig. 18, il faut décrire

les arcs TKI , hKX des deux grands cercles qui ont les points donnés pour poles, l'interfection K de ces deux cercles, est le pole de celui qui passe par les points donnés E , Z .

COROLLAIRE. Ce §. fournit le moyen de décrire par un point donné, un grand cercle perpendiculaire à un grand cercle donné : car ayant trouvé le pole de celui-ci, le grand cercle qu'on décrira par ce pole, & par le point donné, sera le requis.

§. III. Connoître la valeur d'un arc quelconque de grand cercle, décrit sur le planisphere ; ou bien prendre sur un grand cercle un arc d'une certaine quantité, dont un des termes soit donné.

Soit Tu , l'arc donné du grand cercle $uTKI$, Fig. 18. Du pole E de ce cercle, tirez par les extrémités de l'arc donné deux droites ETo , Euy , qui aillent jusqu'à la circonférence du grand cercle $AXIo$, sur lequel est formé le planisphere ; l'arc oy de ce cercle compris entre les deux droites, donnera la valeur désirée de l'arc Tu proposé. La solution de l'autre cas est aisée à appercevoir. Je ne m'arrêterai point à donner la raison de cette pratique, ni à montrer comment on peut connoître la valeur d'un arc de petit cercle.

LEMME SECOND.

Résoudre tous les cas concernant les triangles sphériques obliquangles, à l'aide du planisphere proposé ; c'est-à-dire, former sur une base donnée dans le planisphere, tout triangle sphérique, comme PEZ , Fig. 18, 19, dont on connoisse trois élémens, & découvrir les trois autres.

Nous n'avons ici que six cas, & quelques-uns même sont étrangers à notre objet ; cependant comme ils exigent

gent peu de discours, je ne les omettrai pas. Je ne prends dans les solutions suivantes, que les exemples les plus commodes.

§. I. *Tous les côtés d'un triangle sphérique étant connus, trouver tous les angles.*

Que PEO , l'une des droites qui passent par le centre du planisphere, *Fig. 18*, soit la ligne qui doit servir de base, en partant du point P . Prenez-y donc PE , équivalente à un des côtés donnés; décrivez autour du point E , comme pôle, le cercle bZB , dont l'amplitude Eb , ou EB soit égale à un des autres côtés; puis ayant pris la valeur PZ du troisième côté sur l'alidade, conduisez-la jusqu'à ce que le terme Z de ce côté tombe sur la circonférence du cercle bZB . Vous avez déjà l'un des angles désirés, sçavoir EPZ , & il est évident que sa valeur est donnée par l'arc OA du grand cercle gradué du planisphere, lequel est compris entre la ligne PEO & l'alidade. Quant aux autres angles, si vous décrivez les deux grands cercles $uTKIV$, $mhKXM$, qui ont les points E, Z , pour poles, puis celui $muZEMV$, qui passe par ces points (ce qui rend le triangle PEZ proposé, complet), les arcs Tu & hm , ou $hKXM$ des deux premiers, seront la mesure de l'angle PEZ , & de EZP , ou de son complément, & la valeur de ces arcs sera trouvée par le §. III. du Lemme précédent.

Autre exemple. Soit la circonférence du grand cercle $PZAHpzah$, sur lequel est formé un planisphere, *Fig. 19*, assignée pour servir de base à partir du point P . Prenez-y donc l'arc PZ , égal à un des côtés du triangle proposé; décrivez autour des points P, Z , comme poles, deux arcs DEd , LEl , des cercles qui ont pour amplitudes les deux autres côtés de ce triangle, l'intersection E de ces arcs sera le sommet de l'angle sphérique opposé à PZ ,

& l'on achevera le triangle requis PZE , en décrivant les deux grands cercles $PEOt$, $ZEMVz$, qui passent par le point E & par les points P, Z , cercles qui ont les points I, K pour poles. Cela fait, l'alidade portée sur le point I , montrera la valeur OA de l'arc qui mesure l'angle EPZ ; portée pareillement sur le point K , elle donnera la mesure hM de l'angle PZE . Enfin, si l'on décrit le grand cercle $TKIVt$, qui a le point E pour pole, on aura l'arc Vt pour mesure de l'angle PEZ .

s. II. *Tous les angles d'un triangle sphérique étant connus, trouver ses côtés.* (Ce cas est un de ceux dont nous n'avons pas d'application à faire.)

Pour la solution de ce cas, il faut se rappeler ce qui a été dit dans la première Partie, sçavoir: que tout triangle sphérique correspond à quelque autre, de telle façon que les angles de l'un ont mêmes sinus que les côtés de l'autre, ces angles étant mesurés soit par ces côtés mêmes, soit par leurs complémens. Ainsi le cas proposé revient au précédent; car si on construit, *Fig. 18* ou *19*, le triangle KIX , dont le côté KX soit équivalent à MH ou mh , mesure du complément d'un des angles connus PZE , dont le côté IX soit équivalent ou égal à OA , mesure de l'angle EPZ , aussi donné, dont enfin le côté KI soit équivalent à Tu ou Vt , mesure du troisième angle donné PEZ ; il est visible que les points I, K , sont poles des deux grands cercles $TPEOt$, $ZEMV$, qui par leur intersection avec $ahPZA$, forment le triangle sphérique PZE ; dont il falloit déterminer les côtés.

s. III. *Deux côtés d'un triangle sphérique, & l'angle qu'ils comprennent, étant donnés, trouver le reste.*

Conduisez l'alidade, *Fig. 18*, jusqu'à ce qu'elle fasse un angle égal au donné, avec $TPEO$, l'une des droites qui traversent le planisphere; puis prenez sur $TPEO$,

& sur l'alidade, les deux parties PE , P ; équivalentes aux deux côtés donnés, & trouvez le grand cercle qui passe par les points E , Z , &c. Ou bien, prenez dans la circonférence du grand cercle, sur lequel est formé le planisphere, *Fig. 19*, l'arc PZ égal à un des côtés donnés, puis prenez sur le cercle $AOXa$, dont P est pole, la partie AO , qui est mesure de l'angle donné, & décrivez le grand cercle $PEOp$, qui passe par les points P , O ; prenez ensuite sur ce cercle la partie PE , équivalente à l'autre côté donné, & décrivez un grand cercle $ZEMVz$, par les points Z , E , &c.

S. IV. Un côté d'un triangle sphérique, & les deux angles adjacens étant donnés, trouver le reste.

Prenez sur une des lignes du planisphere la partie PZ , qui soit ou égale, *Fig. 19*, ou équivalente, *Fig. 18* au côté donné. Décrivez ou suppléez, par l'alidade, la ligne $TPEOt$, qui fasse avec PZ l'angle EPZ , égal à un des angles donnés, ainsi qu'au cas précédent; puis ayant décrit le grand cercle $mhKXM$, dont Z est le pole, lequel coupe la ligne $AZPha$ en h ; prenez une partie $hKXM$ de ce cercle, qui soit équivalente à la mesure de l'autre angle donné; & par les points Z , M , décrivez un grand cercle $ZEMV$: son intersection E , avec la ligne $TPEO$, déterminera les parties PE , ZE , équivalentes aux côtés requis du triangle proposé.

S. V. Deux côtés d'un triangle sphérique, & l'angle adjacent à un de ces côtés étant donnés, trouver le reste.

REMARQUE. C'est le côté auquel est adjacent l'angle donné, qui peut seul dans ce cas servir de fondement à l'opération.

Prenez sur la droite APa , *Fig. 18*, la partie PZ , équivalente à celui des côtés donnés, auquel est adjacent l'angle donné; puis ayant décrit le grand cercle $mhKXM$,

dont Z est le pole, prenez sur ce cercle la partie hXM , mesure de l'angle donné, ou hm , mesure de son complément, & décrivez un grand cercle $mZEM$, par le point Z , & par l'un ou l'autre des points m, M ; conduisez ensuite l'alidade jusqu'à ce que son point E , qui est le terme de la partie PE , équivalente au second côté donné, tombe sur la circonférence $mZEM$, & le triangle proposé sera achevé.

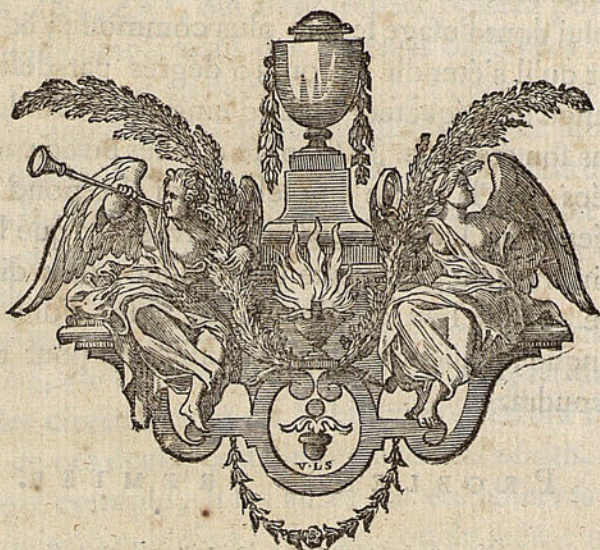
Autrement : Prenez sur la circonférence $AZPha$, Fig. 19, l'arc PZ , égal à celui des côtés donnés, auquel est adjacent l'angle donné; puis prenez sur la ligne hXH , dont Z est le pole, la partie hXM , mesure de l'angle donné, & décrivez un grand cercle $ZEMV$, par les points Z, M ; décrivez ensuite autour de P , comme pole, un arc Ded , du cercle qui a pour amplitude l'autre côté donné du triangle, l'intersection E de cet arc, avec le grand cercle $ZEMV$, détermine la partie ZE de ce cercle, qui est équivalente au troisieme côté du triangle; & ce triangle sera achevé, en décrivant le grand cercle $PEOt$, auquel appartiennent les points P, E .

S. VI. Deux angles d'un triangle sphérique, & le côté opposé à l'un de ces angles étant donnés, trouver le reste.

La solution de ce cas est donnée par la précédente; par la raison qui a été alléguée ci-dessus (& elle en dépend nécessairement, lorsque le triangle n'est pas rectangle); car si on forme le triangle KIX , dont le côté IX soit égal, Fig. 18, ou équivalent, Fig. 19 à OA , mesure de l'angle donné EPZ , dont le côté IK soit équivalent à Tu , mesure de l'autre angle donné PEZ , dont enfin l'angle KXI soit mesuré par ha , égale ou équivalente au côté donné PZ ; il est aisé de voir que I, K , sont les poles des deux grands cercles $TPEO, ZEMV$, qui par leur intersection avec $AZPh$, forment le triangle sphérique PEZ ,

dont j'ai supposé qu'il falloit déterminer les côtés *PE*,
ZE, & l'angle *EZP*.

SCHOLIE. Lorsqu'un des angles donnés est droit,
ce cas peut encore recevoir une solution particuliere &
directe, dont nous aurons un exemple dans le Chapitre
suivant.



CHAPITRE PREMIER.

Solution de la plupart des Problemes proposés dans la premiere Partie, par le moyen d'un Planisphere.

LE Planisphere construit sur le plan de l'équateur, est celui dont l'usage sera le plus commode; & il seroit à désirer qu'il s'étendît 29 ou 30 degrés par-delà la circonférence de l'équateur, afin d'embrasser tout le zodiaque dans son étendue. Je suppose que les principales étoiles situées dans la partie du ciel à quoi il répond, y sont marquées dans leurs places respectives, & que le limbe de cet instrument, ainsi que l'écliptique, sont divisés de maniere, que le lieu du Soleil, & celui d'une planete quelconque, puissent aussi y être assignés pour tel tems qu'on voudra.

PROBLEME PREMIER.

La hauteur & l'angle azymuthal d'un astre étant donnés, ainsi que sa déclinaison, &c. trouver l'heure & la hauteur du pole.

Ce Probleme est dans l'espece du cinquieme cas du Lemme second de cette Partie. Pour le résoudre, prenez sur le planisphere, *Fig. 18*, la valeur *PE* du complément de la déclinaison de l'astre, & supposez que le point *P* est le lieu de l'astre, & *E* le pole, il faudra faire *PZ* équivalente au complément de la hauteur donnée, & l'angle *PZE* égal à l'angle azymuthal, &c. l'angle *PEZ*

fera l'angle horaire dans cette hypothese, & ZE le complément de la hauteur du pole, &c.

PROBLEME II.

Les hauteurs contemporaines de deux astres étant données, trouver l'heure de l'observation, la hauteur du pole, l'angle azymuthal de l'un ou de l'autre astre.

Soient E, E' , Fig. 20, 21, 22, 23, les lieux des deux astres. Autour de ces points, comme poles, décrivez deux cercles $Zb\zeta, Zb'\zeta$, qui aient respectivement pour amplitudes, les complémens des hauteurs observées : ces cercles se couperont en deux points Z, ζ , dont l'un Z , marquera le point du ciel qui étoit au zénith, au moment de l'observation. L'alidade portée sur Z , représentera le méridien ; la différence d'ascension droite du point Z & du Soleil, donnera l'heure ; PZ fera la valeur du complément de la hauteur du pole, &c.

SCHOLIES. I. Lorsque les deux intersections des cercles $Zb\zeta, Zb'\zeta$, se trouveront de même part de l'équateur, les circonstances de l'observation feront connoître lequel de ces deux points indique le vrai zénith. Il faudra voir, par exemple, si les astres ont été observés de différens côtés du méridien, Fig. 20, ou de même part, Fig. 21, &c.

II. On a dû comprendre que deux planispheres sont nécessaires, l'un ayant le pole arctique pour centre, & l'autre le pole antarctique ; & il y aura des mêmes étoiles marquées sur l'un & sur l'autre de ces plans. Cependant il est possible, que l'opération requise pour ce Probleme, ne soit pas praticable directement ni sur l'un ni sur l'autre planisphere. C'est ce qui arrivera dans quelques-uns des cas où les deux astres observés, ou l'un des deux,

déclineront beaucoup du côté du pôle abaissé : car si on prend le planisphere où est ce pôle , le point du vrai zénith peut ne pas se trouver dans son étendue ; & si l'on prend l'autre planisphere , on peut n'y pas trouver , ni sur son alidade non plus , les deux centres propres G, G' , des cercles $Zb\zeta, Zb'\zeta$, qui doivent être décrits autour des astres E, E' , comme poles. Il faut en ce cas , résoudre le Probleme par une opération indirecte , telle que celle-ci.

On supposera que le grand cercle sur lequel est construit le planisphere , représente le cercle horaire de l'un des astres (E) , *Fig. 24* , & y ayant pris un arc POE , égal à la distance de cet astre à l'un des poles , on décrira par le point P un arc $PO'E'$ de grand cercle , dont l'angle OPO' avec POE , ait pour mesure la différence donnée des astres E, E' en ascension droite ; ainsi $PO'E'$ représentera une portion du cercle horaire de l'autre astre (E') , & si $PO'E'$ est équivalent à la distance de ce second astre au pôle P , E' sera le lieu de cet astre , relativement à l'hypothese. Cela fait , on décrira autour des points E, E' , comme poles , les cercles $Zb\zeta, Zb'\zeta$, définis ci-dessus , & on fera passer par Z l'une de leurs intersections , & par P , un grand cercle PZA , qui représentera le méridien ; l'angle OPA , ou $O'PA$ de l'un des cercles horaires avec PZA , fera donc l'angle horaire de l'un ou l'autre astre , au moment de l'observation , &c.

III. Si les observations des deux hauteurs ont été faites en des tems différens , dont l'intervalle soit connu , soient E, e' les lieux des deux astres observés. Décrivez une portion du parallele de l'un de ces astres , de l'astre e' par exemple , & prenez sur ce parallele un arc $e'E'$, équivalent au tems écoulé entre les observations ; prenez , dis-je , cet arc , ou en avançant dans la direction du mouvement journalier , ou en retrogradant contre cette direction

tion : il faut avancer, si la hauteur de l'astre e' a été prise avant celle de l'autre astre, rétrograder dans le cas contraire. Le point E' représentera le lieu d'un astre idéal, qui auroit été observé à la hauteur de l'astre réel e' , au moment de l'observation de l'autre astre E . Ainsi prenez les points E, E' , pour poles des cercles $Zb\zeta, Zb'\zeta$, & Z , l'une des intersections de ces cercles, marquera le point du ciel qui aura été au zénith, au moment de l'observation de l'astre réel E . On doit voir par-là ce qu'il faut faire, lorsqu'on a les observations de deux hauteurs différentes d'un seul astre.

P R O B L E M E V.

La hauteur du pole, celle d'un astre, & sa déclinaison étant données, trouver l'heure, &c.

Ce Probleme est tout résolu Fig. 18, par le §. I. du second Lemme de cette Partie, E marquant le lieu de l'astre, Z le zénith, &c.

P R O B L E M E V I.

La hauteur du pole, la déclinaison d'un astre, & son angle azymuthal étant donnés, trouver l'heure & la hauteur de l'astre.

Ce Probleme est tout résolu Fig. 18, par le §. V. du second Lemme, E marquant, non le pole comme on a supposé au Probleme premier, mais le lieu de l'astre, & EPZ son angle horaire, &c.

PROBLEME VII.

La hauteur du pôle étant donnée, & deux astres dont les déclinaisons, &c. sont connues, étant vus dans un même vertical, trouver l'heure de l'observation, l'angle azymuthal, &c.

Soient E, E' les lieux des deux astres, Fig. 25. Par ces points décrivez un grand cercle $ENFE'$, puis du centre P , & d'un rayon équivalent au complément de la hauteur du pôle, décrivez un arc de cercle $Zi\zeta$, qui coupera le grand cercle $ENFE'$ en deux points Z, ζ , dont l'un Z , montrera le point du ciel qui étoit au zénith au moment de l'observation. Les circonstances de cette observation feront connoître lequel des points Z, ζ , indique le vrai zénith. Au lieu de décrire l'arc $Zi\zeta$, il suffira de marquer sur l'alidade le terme Z , de sa partie équivalente au complément de la hauteur du pôle, & de conduire cette piece jusqu'à ce que son point Z tombe sur la circonférence $ENFE'$ en Z ou en ζ .

PROBLEME VIII.

La hauteur du pôle étant donnée, & deux astres dont les déclinaisons, &c. sont connues, étant vus dans un même almucantarath, trouver l'heure, &c.

Soient E, E' les lieux des deux astres, Fig. 26 : par ces points, décrivez un grand cercle $E'NEF$, puis ayant pris le milieu N de l'arc ENE' , décrivez par ce point & par le pôle Q du cercle $E'NEF$, le grand cercle $Q\circ N$; il est aisé de reconnoître que ce dernier est un de ceux qui passoient au zénith au moment de l'observation, puisqu'il est perpendiculaire au cercle $E'NEF$, & que chacun de

ses points est, ainsi que N , à une même distance des points E, E' , qui sont à une même hauteur. Ainsi ayant décrit du centre P un cercle $Zi\zeta$, dont l'amplitude soit égale au complément de la hauteur du pôle; ce cercle coupera le vertical $Q\phi N$ en deux points Z, z , dont l'un marquera le point céleste qui étoit au zénith au moment de l'observation, & l'on considérera les circonstances de cette observation, pour faire un bon choix entre les points Z, z .

P R O B L E M E I X.

Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de quatre astres, dont deux sont vus dans un même vertical, & deux dans un autre, trouver l'heure, la hauteur du pôle, &c.

Soient E, E' , Fig. 27, les lieux des deux premiers astres; ϵ, ϵ' , les lieux des deux autres, si leur observation est contemporaine à celle de la première paire; ou bien, soient ϵ, ϵ' les lieux des astres idéaux qui auroient passé au vertical de la deuxième paire des astres réels au moment de l'observation de ceux de la première paire (ce qui doit être sous-entendu pour tout astre, quand je ne l'aurois pas exprimé). Décrivez un grand cercle $ENE'F$ par les points de la première paire, & un autre grand cercle $\epsilon'N'F\epsilon$ par ceux de la seconde. Ces cercles seront des verticaux, & leur intersection en Z, z , donnera les points du zénith & du nadir, pour le moment de l'observation de l'astre réel Z .



PROBLEME X.

Connoissant les déclinaisons, &c. de quatre astres, dont deux sont vûs dans un même almicantharath, & deux dans un autre, trouver l'heure, &c.

Soient $E, E',$ & $\epsilon, \epsilon',$ Fig. 28, les lieux des deux paires d'astres. Décrivez les deux grands cercles $Q^{\phi}ZN$, $Q'Z^{\phi}N'$, qui sont perpendiculaires aux grands cercles $E'NEF$, $\epsilon'N^{\epsilon}F'$, sur lesquels sont les points donnés $E, E',$ & $\epsilon, \epsilon',$ & qui sont respectivement équidistans de ces points; ces cercles $Q^{\phi}N$, $Q'^{\phi}N'$, feront des verticaux, par la raison rapportée au Probleme VIII, & leur intersection en Z, z , donnera le zénith & le nadir, pour le tems d'une des observations.

PROBLEME XI.

Connoissant les déclinaisons, &c. de quatre astres, dont deux sont vûs dans un même vertical, & deux dans un même almicantharath, trouver l'heure &c.

Soient E, E' (Fig. 29) les lieux des astres de la 1^{re} paire; & ϵ, ϵ' , ceux des astres de la deuxième. Décrivez par les points E, E' , un grand cercle $ENFE'$, & un autre grand cercle $Q^{\phi}ZN'$, qui soit perpendiculaire au grand cercle $\epsilon'N^{\epsilon}F'$, sur lequel sont les autres points ϵ, ϵ' , & qui soit équidistant de ces points; ces cercles $ENFE'$, $Q^{\phi}N'$, sont des verticaux, ainsi leur intersection donne le zénith pour le tems d'une des observations.

P R O B L E M E X I I .

Connoissant les déclinaisons , &c. de trois astres , dont deux sont vûs dans un même vertical , & du troisieme desquels on a la hauteur , trouver l'heure , la hauteur du pole , &c.

Soient E, E' , Fig. 30, les lieux des astres vûs à un vertical commun, & ϵ le lieu du troisieme astre. Ayant tracé le grand cercle $ENE'F$ par les points E, E' , décrivez autour du point ϵ , comme pole, le cercle $Z\beta\zeta$, qui ait pour amplitude le complément de la hauteur donnée de l'astre ϵ ; ce cercle coupera le premier en deux points, dont l'un Z représentera le zénith, pour le moment de l'une des observations.

P R O B L E M E X I I I .

Connoissant les déclinaisons , &c. de trois astres , dont deux sont vûs dans un même vertical , dont on a l'angle avec le vertical du troisieme astre , trouver l'heure , la hauteur du pole , &c.

Pour la solution de ce Probleme, il faut trouver par préalable le complément $E\epsilon$, Fig. 30, de la hauteur de l'astre ϵ , qui est solitaire sur son azymuth, ou plutôt le complément ZR de la hauteur du point d'intersection R du grand cercle $ENE'F$ avec le grand cercle $Q\epsilon R$, qui y est perpendiculaire, & passe par le point ϵ . Décrivez d'abord ce cercle $Q\epsilon R$, ce qui est très-facile, puisque Q est le pole du cercle $ENE'F$, & vous aurez $Q\epsilon$ complément du côté ϵR du triangle rectangle $\epsilon R Z$, avec l'angle $\epsilon Z R$ ou $M'Z M$, opposé à ce côté ϵR . C'est ce triangle $\epsilon R Z$, dont on connoît trois élémens, qu'il s'agit d'achever de construire : mais cela ne se peut qu'indirecte-

ment ; il faut faire pour cela une figure particuliere , telle que la *Fig. 50* ou *51*.

Prenez un quart , ou l'équivalent *qm'n* d'un quart de circonférence de grand cercle , dont *z* marque le pole : décrivez par ce point des cercles *mrz*, *m'z*, qui fassent un angle égal à celui *MZM'*, qui est donné par l'observation ; puis tracez un arc *f* du parallele à *mrz*, lequel ait pour amplitude *q*, égale au complément *Q*, trouvé dans la *Fig. 30* ; enfin par l'interfection des cercles *f*, *m'z*, & par *q*, pole du cercle *mrz*, décrivez le grand cercle *q.r* ; vous aurez *rz* pour valeur de l'arc *RZ* requis, *Fig. 30*, & vous y déterminerez ainsi le point *Z* du zénith, &c.

P R O B L E M E X I V.

Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de deux astres , avec l'angle de leurs azymuths , au moment où ils sont vus dans un même almicantharath , trouver l'heure , &c.

Soient *E, E'*, les lieux de ces astres , *Fig. 26* ; le vertical *QZN*, dont les points *E, E'* sont équidistans , est déterminé , & ce grand cercle divise par la moitié l'angle donné des azymuths des points *E, E'* ; on connoît donc au triangle rectangle *ENZ* deux élémens , outre l'angle droit , sçavoir le côté *EN*, moitié de la distance des deux astres , & l'angle *EZN* opposé à ce côté ; & l'on est , quant à ce triangle *ENZ*, dans le même cas que celui du Probleme précédent , pour le triangle *RZ* : ainsi on obtiendra la solution désirée , par un procédé pareil à celui qui a donné *RZ*.

P R O B L E M E X V.

La hauteur d'un astre , & l'angle de son azymuth avec celui d'un autre astre étant donnés, ainsi que leurs déclinaisons, &c. trouver l'heure, & la hauteur du pôle, &c.

Soit E' , Fig. 20, 21, 22, 23, le lieu du premier astre, & E celui du second : on connoît donc trois élémens du triangle EZE' , sçavoir EE' distance des deux astres, $E'Z$ complément de la hauteur de l'astre E' , & l'angle EZE' compris entre les azymuths ZEM , $ZE'M'$, lequel est opposé au côté EE' (c'est l'espece du cinquieme cas du second Lemme de cette Partie); mais ce triangle ne peut pas être résolu directement sur la Figure qui donne $E'E$, il faut en faire une particuliere, telle que la 18 ou la 19, où vous supposerez que P représente l'astre E' , & que PE équivaut par conséquent à $E'E$, & PZ à $E'Z$: vous déterminerez par l'opération marquée au §. V. du second Lemme, le troisieme côté EZ du triangle en question, ou bien l'angle EPZ , qui est le même que $EE'Z$, & avec l'un ou l'autre de ces élémens, vous serez en état de trouver le sommet Z du triangle EZE' , Fig. 20, 21, 22, 23, puisque vous aurez ou bien la valeur des trois côtés de ce triangle, ou la valeur de deux côtés, & de l'angle qu'ils comprennent, ce qui est le cas du §. I, ou du §. III. du Lemme cité.

Telles sont les opérations que j'avois à proposer. On reconnoît sans doute qu'elles sont faciles & expéditives : il n'est pas besoin que j'insiste sur ce point, mais il en est un sur lequel je dois m'arrêter avant que de finir ce Chapitre, sçavoir sur la qualité que j'ai attribuée à ces opérations ; de n'être pas sujettes à un grand défaut ; d'être peu inférieures en justesse au résultat du calcul. Je ne sçais si cha-

cun en conviendra : on estime peu les opérations mécaniques en comparaison du calcul ; on s'en défie, & peut-être quelques personnes sont-elles prévenues trop généralement contre ce genre d'opérations. Pour moi je crois qu'on doit distinguer mécanique & mécanique ; il faut donc entrer en quelque discussion sur ce point.

On pourroit, par exemple, se prévaloir contre ce que j'ai avancé, d'une autorité que j'avoue être d'un très-grand poids, sçavoir celle de M. Bouguer, ce Sçavant si versé dans les matieres Astronomiques. Cet illustre Auteur de la Piece qui a remporté le Prix de 1731, *sur la méthode d'observer en mer la déclinaison ou variation de la Bouffole*, traite dans la deuxième Partie de cet excellent Ouvrage, *des moyens de déterminer cette variation*, par l'observation d'un astre, c'est-à-dire, des moyens de trouver l'angle azymuthal de quelque astre ; & après avoir assigné trois especes d'observations qui donnent cet angle avec facilité, il tourne ses réflexions sur le cas où l'on n'auroit pas eu la commodité de faire aucune de ces observations, mais où on en auroit fait quelqu'autre. » Il faudra alors » (dit le judicieux Astronome) avoir recours au calcul, » pour trouver par la Trigonométrie Sphérique (ou autrement), le vrai azymuth. Il n'y a gueres lieu d'esperer (ajoute-t-il) qu'on puisse éviter la longueur de l'opération, *en se servant de quelques figures*, ou en employant quelques instrumens particuliers. On ne peut toujours « parvenir, *par tous ces moyens*, qu'à une détermination » trop grossiere, & trop éloignée d'une certaine exactitude. »

Voilà ce qu'on peut m'opposer. Je remarque pour réponse, que dans la suite de l'article cité, M. Bouguer parle seulement de ces *instrumens particuliers*, qui donnent tout d'un coup la situation du méridien, & je conviens
que

que l'usage en est blâmable avec grande raison. (Outre les inconvéniens de ces instrumens , on doit considérer que l'usage en est trop borné , parce qu'il suppose que la hauteur du pole est connue). Mais il y a , ce me semble , une différence non-légere entre ces pratiques rejetées spécialement par M. Bouguer , & celles que j'ai proposées , quoique celles-ci consistent à *se servir de quelques figures* , & qu'elles soient ainsi enveloppées dans la censure générale portée par le sçavant Géometre.

1°. Le plus parfait de ces instrumens particuliers , qui étant exposé au Soleil , montre la situation du méridien , *sera toujours sujet à quelques défauts dans sa construction particulière*. (Ces défauts sont les mêmes pour le moins , que ceux que M. Bouguer a justement relevés dans l'Arbalestrille , *Part. I. Ch. IV §. 32* , de la Piece qui a mérité le prix de 1729 , touchant la méthode d'observer exactement sur mer la hauteur des astres : car un demi-cercle mobile , qui entre dans la composition de cet instrument , le plus propre à montrer la situation du méridien , & dont l'ombre doit être observée , peut *n'être pas bien perpendiculaire à la fleche* , ou regle qui le porte , &c.)

2°. *On n'a point d'égard à la réfraction dans l'usage de ces instrumens*. Ce sont des remarques de M. Bouguer même.

3°. Ces instrumens ne peuvent être que petits , ils auroient trop de poids s'ils étoient grands. M. Bouguer qui a bien voulu prendre la peine de marquer la forme de celui qui seroit le meilleur , ne donne que 9 ou 10 pouces de rayon au demi-cercle , dont l'ombre doit être observée (encore est-ce beaucoup , & je pense qu'un instrument fait sur cette proportion , seroit bien plus pesant qu'un grand Quartier Anglois). Ainsi la distance du bord qui jette l'ombre au point qui doit la recevoir , est fort petite , & cela entraîne le même inconvénient , que celui

auquel est sujet le Quartier Anglois, dont l'arc qui porte la pinnule exposée au Soleil, est d'un moindre rayon que l'arc par lequel vise l'Observateur; inconvenient ou *défaut* que M. Bouguer a traité de *considérable*, & prouvé tel, *Part. I. Ch. IV. §. 33.* de la Piece qui a remporté le Prix de 1729.

4°. Ajoûtons que la partie d'ombre que l'on doit faire tomber sur certain point de l'instrument particulier dont il s'agit, est très-difficile à discerner; car cette partie d'ombre est celle qui répond au centre du Soleil, & elle appartient à une pénombre dont les limites verticales sont trop peu sensibles, ainsi que le même Auteur le démontre, §. 37, de la Piece citée de 1729.

Voilà déjà quatre chefs, eu égard auxquels M. Bouguer a pû juger très-justement, que *l'on ne parviendroit qu'à une détermination trop grossiere* du méridien, à l'aide des instrumens particuliers dont il s'agit. Mais quand tous ces inconveniens cesseroient, il en reste nécessairement un cinquieme, qui est *considérable*, lorsque le pole a certaine hauteur, & qui suffiroit seul pour vicier la détermination qu'on prétendroit faire avec ces instrumens particuliers. Ce chef est peut-être indiqué, mais confusément, dans une remarque de l'art. cité de la piece de 1731, pag. 34, sçavoir, que *l'on observe d'une maniere implicite la hauteur du Soleil, & son azymuth*, par ces instrumens, & que *comme on est toujours exposé à commettre ces erreurs inévitables qui se trouvent dans toutes les opérations, elles doivent être ici à peu près les mêmes, que lorsqu'on cherche la hauteur d'un astre & son azymuth, par le moyen d'un Quartier Anglois.*

Voici le point. Selon une autre remarque importante de M. Bouguer, *Part. III. Art. VIII. pag. 52* de cette Piece de 1731, *il y a en mer grande difficulté de mettre un*

*Instrument dans une situation exactement verticale, en regardant l'horizon sensible....; il est très-facile de se tromper, c'est-à-dire, d'écarter le plan de l'instrument de la situation verticale, de 25 ou 30 minutes, & même de 40 ou 50, sans qu'on s'en apperçoive. Or cette erreur, lorsqu'on se sert du Quartier Anglois, pour prendre la hauteur & l'azymuth d'un astre, en produit une sur la position de cet azymuth, qui est plus ou moins grande, suivant que l'astre est plus ou moins élevé. Si l'on nomme I la tangente de la quantité dont l'instrument est éloigné de la situation verticale, & $H = \frac{rh}{k}$ la tangente de la hauteur de l'astre; le sinus de la quantité dont on s'éloigne de son vrai azymuth, est précisément égal à $I \frac{H}{r} = I \frac{h}{k}$. Au reste on a communément la liberté d'observer un astre peu élevé, & d'exténuer par conséquent le mauvais effet de l'inclinaison du Quartier Anglois. Que si l'on employoit l'instrument particulier décrit par M. Bouguer, *Part. II. Art. VII*, de la Piece de 1731, l'inclinaison *inévitabile* de cet instrument, produiroit aussi une erreur dans la détermination du méridien: mais cette erreur ne dépend point dans sa quantité du plus ou du moins de hauteur du luminaire, elle dépend de la hauteur du pole, nommant i le sinus de la quantité dont l'instrument est éloigné de la situation verticale, & $S = \frac{rs}{c}$ la tangente de la hauteur du pole; la tangente de ce dont on s'écarteroit du méridien, seroit égale, tout le reste étant correct, à $i \frac{S}{r} = i \frac{s}{c}$, quantité considérable, lorsque le pole a certaine hauteur.*

Concluons donc hardiment, qu'il vaut infiniment mieux déterminer la hauteur & l'azymuth d'un astre bien situé, par

le moyen d'un instrument simple, tel que le Quartier Anglois, & déduire le reste par supputation, que de vouloir le trouver par la seule construction d'un instrument composé de plusieurs pieces, puisque cet instrument est d'autant plus fautif, qu'il est plus compliqué, & que l'on seroit exposé, dans son usage, à une erreur double ou triple, pour le moins, de celle qui naît du défaut qui peut se glisser dans une observation simple.

Mais que faut-il penser du résultat d'une observation simple, trouvé par quelques figures subsidiaires à la supputation? Qu'on rejette encore cette pratique, j'y consens, si les figures sont petites, mais si elles sont grandes, je n'y vois pas d'inconvénient fort grave. Par exemple, si on donnoit 21 pouces de rayon à l'équateur $AOXax$ du planisphere (ce qui est un peu moins que celui qu'on donne au Quartier Anglois), les degrés seroient sur ce cercle d'environ quatre lignes deux cinquiemes, & l'on pourroit y marquer leurs vingt-quatriemes parties (les degrés auroient à la vérité une fois moins d'étendue auprès du centre de l'instrument). Cela posé, se trouveroit-il tant d'erreur dans la construction de l'instrument, en commettrait-on tant d'ailleurs, soit sur le centre propre G d'un cercle $Zb\zeta$, Fig. 20, 21, 22, 23, soit sur son rayon, que le trait de la circonférence de ce cercle s'écarteroit de plus de 4 ou 5 minutes du lieu où il devoit être? c'est-à-dire, seroit-on exposé dans le cas du Probleme second, à faire le complément ZE de la hauteur d'un astre, de 4 ou 5 minutes plus grand ou moindre sur le planisphere, qu'on ne l'a trouvé par l'observation? Ce seroit beaucoup, ce me semble; supposons néanmoins cette erreur de 5 minutes, ce qui est un douzieme de degré. Or selon M. Bouguer, *Part. III. Art. XII. pag. 62*, de la Piece citée de 1731, on doit supposer de 15 minutes, l'erreur que d'ha-

biles marins peuvent commettre dans l'observation de la hauteur d'un astre, faite lorsque cet astre en change sensiblement (& nous verrons dans la suite, que c'est dans cette circonstance qu'une observation de hauteur détermine l'heure le plus sûrement.) L'erreur totale dans la hauteur attribuée à l'astre sur le planisphere, pourra donc être de 20 minutes, & l'erreur qui naîtra de celle-là, dans la détermination de l'heure, sera plus grande d'environ un tiers en sus, que celle qui se trouvera dans la détermination exécutée par le calcul. * Si l'erreur de celle-ci va, par exemple, à une minute & demie de tems, l'erreur de celle-là pourra être de deux minutes, & n'ira gueres au-delà.

Je laisse à juger sur cela, de la grandeur qu'on devra donner au rayon de l'équateur du planisphere. J'observe seulement qu'il faut que ce cercle soit tracé sur du métal, & que l'alidade soit pareillement de métal, afin que leurs divisions soient plus exactes. Il me semble au reste, que pour ne point maculer l'instrument, par les divers traits que chaque détermination requerra, on pourra le couvrir d'un papier fin & transparent, sur lequel on fera ces traits.

* Je mets en même proportion les erreurs sur la hauteur, & les erreurs sur l'heure, trouvées par les deux voies différentes, parce que l'erreur particulière commise sur la hauteur, en employant le planisphere, est la seule qui doive entrer ici en considération. Je regarde toute autre méprise comme fort légère, ou bien comme accidentelle, dans le cas pris pour exemple, & je la suppose évitable, lorsque les observations sont combinées avantageusement : telle est la méprise qu'on peut commettre, faute de bien discerner le vrai point d'intersection des cercles *Zb'*, *Zb''*. Ce genre d'erreur n'est pas à négliger absolument, je l'avoue, mais il concerne une autre matière de considération. Si l'on y étoit exposé à un degré non-léger, ce seroit un signe que la combinaison des observations seroit désavantageuse à quelque égard en se servant même du calcul.



CHAPITRE II.

Moyens de simplifier les calculs pour l'invention de l'heure, solution des Problemes XV.

& XVI, laissés I. Partie.

QUOIQUE j'aie proposé de se servir de figures subsidiaires au calcul, je suis bien éloigné d'estimer cette pratique au-delà de sa juste valeur; je ne prétends point qu'on doive s'en contenter. Je reconnois si bien l'importance du calcul, que je reviens à cette voie exacte, & que je vais m'appliquer à y procurer toute la simplicité & la facilité possibles.

Je porte d'abord mes réflexions sur le Probleme VII. On doit remarquer dans la Fig. 25, qui répond à ce Probleme, que le grand cercle $ENFE'$, sur lequel sont deux astres, a quelque point F plus voisin du pôle que tous les autres qui sont de même part de l'équateur, & ce point est celui où le cercle $ENFE'$ est coupé par le cercle horaire QPF , qui y est perpendiculaire. Si on connoissoit donc l'ascension droite du point F , & l'arc PF , dont je nomme le sinus y' , la tangente Y' , le cosinus x' , &c. (& ce sont choses faciles à découvrir). Le Probleme dont il s'agit seroit très-aisé à résoudre par le calcul, car on obtiendrait l'angle horaire FPZ , par une simple analogie.

Soit r' le sinus de cet angle, u' son cosinus. On connoît, je le suppose, au triangle PFZ , outre son angle en F , deux élémens; sçavoir le côté PF , & PZ dont S est cotangente, & on demande l'angle FPZ , compris entre les côtés donnés; ainsi on est dans un cas de la quatrième

classe (cas pareil à celui qui est régi par la troisième formule du premier Lemme de la première Partie). On a donc, *cotang.* $PFZ \times r' + y'S = u'x'$. Mais l'angle PFZ étant droit comme on l'a remarqué, la cotangente est zéro, & il reste $u' = \frac{y'}{x'} S = \frac{y'S}{r}$. * Cette valeur de u' est plus simple assurément que celle qui résulte pour r (sinus de l'angle EPZ) de l'équation du second degré,

$$\left. \begin{aligned} (rrXX' - 2rbX'X + rrXX) cctt - 2rX' \\ + 2bX \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} r^2 acst + r^4 aa ss \\ - rr aa cc XX \end{aligned} \right\} = 0, \text{ ou}$$

$$\left. \begin{aligned} (rrXX' - 2rbX'X + rrXX) tt - 2rX' \\ + 2bX \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} raSt + rr aa (SS - XX) \end{aligned} \right\} = 0,$$

trouvée dans la première Partie.

J'ai dit que l'arc PF , & que l'ascension droite du point F , sont faciles à découvrir (& je vais le montrer). Il y a plus, dans le cas où les deux astres vus ensemble sont des fixes, on peut égargner aux Navigateurs la peine de chercher ces choses & autres semblables, en formant des Tables où elles soient marquées. Ces Tables seroient peut-être assez utiles pour mériter qu'on y travaillât, car la même chose peut servir non-seulement à plusieurs Navigateurs, mais en plusieurs circonstances, comme l'on verra dans la suite : il ne resteroit donc au Marin à calculer l'ascension droite, & la distance du point F au pôle, que lorsque l'un des astres observés seroit une planète, ou bien lorsqu'il y auroit eu de l'intervalle entre les observations.

* On peut encore trouver cette valeur de u' par un petit circuit, en considérant que lorsque le cercle $ENE'F$ est vertical, son point F est à sa plus grande digression, & s'élève perpendiculairement à l'horizon XMK , parce que sa route étant perpendiculaire au cercle horaire PF , elle concourt avec une petite portion du vertical $ENE'F$. Par conséquent, selon ce qu'on a vu (première Partie) le sinus h de la hauteur FM du point F , est égal à $\frac{rs}{x'}$. Cette valeur de h étant substituée dans la formule $rrh - rxx' = cy'u'$, on a $rs(rr - x'x') = cx'y'u'$, ou bien $rsy' = cx'u'$, d'où on déduit $u' = \frac{y'}{x'} \cdot \frac{rs}{c} = \frac{y'S}{r}$.

Voici ce qu'il faudra faire alors, & en attendant que les Tables proposées soient construites.

Les complémens PE, PE' , des déclinaisons des deux points E, E' , étant donnés avec leur différence d'ascension droite, différence qui est mesure de l'angle EPE' , & dont les sinus & cosinus ont été nommés ci-devant a, b , il faut chercher 1°. l'un ou l'autre des angles $PEE', PE'E$; je nomme le sinus du premier l , sa tangente L , son cosinus λ , sa cotangente Λ . Cela posé, on est dans un cas de la quatrième classe, & on a $a\Lambda \pm yX' = bx$, d'où on déduit $\Lambda = \frac{bx \mp yX'}{a}$.

2°. L'angle PEE' étant connu, on peut trouver PF par une simple analogie; car outre l'angle droit on a deux élémens du triangle rectangle EFP , sçavoir l'hypothénuse PE , & l'angle PEE' ou PEF , opposé au côté désiré, ce qui est un cas de la troisième classe; on a donc $y' = \frac{yl}{r}$.

3°. la différence d'ascension droite des points E, F , est mesure de l'angle EPF du même triangle rectangle EFP ; je nomme son sinus g , son cosinus γ , sa cotangente r , &c. On trouvera cet angle par quelque une de ces équations très-simples: $r = \frac{xL}{y}$, $\gamma = \frac{Y'X}{r}$, $g = \frac{rL}{x'}$.

Observons que le Navigateur ayant connu l'angle PEE' , pourroit se dispenser de chercher PF , & trouver l'angle horaire EPZ du point E , en résolvant par la règle de Trigonométrie, le triangle obliquangle PEZ , dont il a trois élémens, sçavoir les côtés PE, PZ , & l'angle PEE' ou PEZ , opposé à un de ces côtés. La règle consiste à chercher d'abord l'angle EPF , par l'équation $r = \frac{xL}{y}$, qui en donne la cotangente, puis à chercher l'angle FPZ du triangle



du triangle rectangle PFZ par cette équation. *Cofin. FPZ

$= \frac{\gamma Y}{C} = \frac{\gamma YS}{rr}$, la somme ou la différence des angles EPF , FPZ , sera l'angle horaire requis du point E .

Voici les choses dont on pourroit former des Tables, & en même tems la maniere de les trouver. 1°. La distance EE' ou ϵ' , Fig. 20, 21, &c. de deux étoiles qui peuvent être observées conjointement. Pour trouver cette distance (dont j'ai nommé ci-devant le sinus δ , & le cosinus β), posé qu'on ne l'ait pas déjà dans les catalogues d'étoiles, on est dans un cas de la premiere classe, à l'égard du triangle EPE' , & on a $\beta = \frac{yy'b}{rr} \pm \frac{xx'}{r}$. b est le cosinus de la différence d'ascension droite des deux étoiles.

2°. L'angle PEE' du cercle horaire d'une de ces étoiles, avec le grand cercle $ENEF$, qui leur est commun. EE' étant connue au triangle EPE' , on est dans un cas de la troisieme classe, pour trouver son angle PEE' , & on a $\delta = \frac{y'a}{\delta}$.

3°. La moindre distance FP du cercle $ENEF$ au pôle: on vient de voir que le sinus y' de cette distance $= \frac{y'l}{r}$.

4°. L'ascension droite du point F , ou bien l'angle EPF : on l'aura, comme j'ai déjà dit, par une des équations $r = \frac{xL}{r}$, $\gamma = \frac{Y'X}{r}$.

5°. On peut ajoûter l'arc EF : cet arc sera trouvé par quelqu'une de ces équations, $\sin. EF = \frac{yg}{r} = \frac{\lambda Y'}{r}$, $\text{tang. } EF = \frac{y'G}{r} = \frac{\lambda Y}{r}$.

* Le fondement de cette équation est que PF est un côté commun aux deux triangles rectangles EPF , ZFP ; ainsi on a ces deux analogies: $r : Y :: \gamma : X'$, $r : C :: \text{cof. } FPZ : Y'$; donc $\gamma Y = r Y' = C \text{ cof. } FPZ$, &c.

La distance de deux étoiles est une chose invariable. Les autres choses que j'ai marquées, sont sujettes à une petite variation, à cause du mouvement lent de l'axe terrestre autour des poles de l'écliptique. Pour remédier à cela, il faudra donner dans la Table les changemens que ces quantités variables reçoivent en certain nombre d'années.

SCHOLIES. I. L'équation du second degré, rapportée ci-dessus, pour t sinus de l'angle EPZ , s'accorde si bien avec celle qu'on a vûe pour u' , que celle-ci peut être déduite de celle-là. Pour le montrer, je remarque 1^o, que le coefficient $rrX'X' \pm 2rbX'X + rrXX$, que peut avoir tt dans cette équation, est égal à $\frac{r^4aa}{Y'Y'}$. *

2^o. $X = \frac{ry}{Y'}$, & par conséquent $XX = \frac{rryy}{Y'Y'}$; car on a au triangle rectangle EFP , $r:\gamma::X' = \frac{rr}{Y'}$: X .

3^o. $X' = \frac{by \pm ag}{Y'}$; car le triangle $E'FP$ étant rectangle, on a $r:\cos. E'PF::X' = \frac{rr}{Y'}$: $X' = \frac{r.\cos. E'PF}{Y'}$; or par le second Lemme de la premiere Partie, $r.\cos. E'PF = by \pm ag$.

* Cela est facile à trouver; car on a cette proportion: $Y'Y':rr::y'y':x'x'$
 $= rr - y'y'$. Or $y'y' = \frac{yy ll}{rr}$, donc $\frac{rr}{Y'Y'} = \frac{x'x'}{y'y'} = \frac{r^4 - yy ll}{yy ll}$
 $= \frac{r}{yy} \times \frac{r^4}{ll} - 1$. On a d'ailleurs cette proportion, $\Delta\Delta:rr::ry$
 $= ll:ll$, ou bien $rr + \Delta\Delta:rr::rr:ll$; donc $\frac{r^4}{ll} = rr + \Delta\Delta$, & $\frac{rr}{Y'Y'} = \frac{rr + \Delta\Delta - yy}{yy} = \frac{xx + \Delta\Delta}{yy}$. Or, $\Delta\Delta = \frac{bbxx \pm 2bX'xy + yyX'X'}{aa}$,
 donc $\frac{rr}{Y'Y'} = \frac{aaxx + bbxx}{aayy} \pm \frac{2bX'x}{aay} + \frac{X'X'}{aa}$. Multipliant
 donc tout par $rraa$, substituant rr à $aa + bb$, & X à $\frac{rx}{y}$, on trouve enfin,
 $\frac{r^4aa}{Y'Y'} = rrXX$, &c.

Les trois quantités qu'on vient de voir étant substituées dans l'équation pour t , & ayant tout multiplié par $Y'Y'$, elle devient :

$$r^4 aatt - 2rrabySY't - 2rraagSY't + rraaSSY'Y' = rraarv\gamma\gamma. \\ + 2rrabySY't$$

Deux termes où t est linéaire, se détruisent mutuellement, & tous les autres sont divisibles par $rraa$, ainsi il reste :

$$rrtt - 2gSY't + SSY'Y' = rr\gamma\gamma.$$

Substituant $gg + \gamma\gamma$ à rr , on a :

$$ggtt - 2gSY't + SSY'Y' = \gamma\gamma rr - \gamma\gamma tt = \gamma\gamma uu.$$

Donc $gt - SY' = \gamma u$, ou bien $SY' = \gamma u + gt = ru$.

II. Si l'on veut avoir l'angle azymuthal PZM , Fig. 25, on l'obtiendra par une simple analogie, & même si l'on veut, sans avoir l'angle horaire; on l'obtiendra, dis-je, par quelqu'une de ces formules :

$$m = \frac{ry'}{c}, n = \frac{r'x'}{r}, N = \frac{ST'}{r}.$$

P R O B L È M E V I I I.

Où deux astres sont vus à une même hauteur, Fig. 26.

Ce Probleme nous arrêtera peu. Je suppose qu'on a par des Tables, ou autrement, l'arc $NF = EF \pm \frac{EE'}{12}$ mesure de l'angle PQZ , & qu'on connoît encore un autre élément du triangle obliquangle ZPQ , sçavoir PQ complément de PF , outre PZ complément de la hauteur du pole. On peut donc résoudre ce triangle par la règle de trigonométrie. La règle consiste à faire $P\phi$ perpendiculaire sur QZN , & à chercher d'abord l'angle $QP\phi$ par cette équation : $\cotang. QP\phi = \frac{y' \times tang. NF}{r}$, puis l'angle

Y y ij

ϕPZ par cette autre équation : $\cos. \phi PZ = \frac{X' \cos. QP\phi}{C}$
 $= \frac{X'S}{rr} \cosin. QP\phi$. La somme ou la différence des angles $QP\phi$, ϕPZ , fera l'angle horaire du point Q , dont l'ascension droite diffère de 180 degrés de celle du point F , que je suppose connue.

PROBLEME XI.

Où deux astres sont vûs dans un même vertical, & deux autres dans un autre vertical, Fig. 27.

Je nomme encore u' le cosinus de l'angle horaire du point F . Soit u'' celui de l'angle horaire du point F' , Y' la tangente de PF' ; p' , q' , le sinus & le cosinus de l'angle FPF' . Nous avons $ru' = Y'S$, & $ru'' = Y''S$: donc $\frac{ru'}{Y'} = S = \frac{ru''}{Y''}$, & $u'' = \frac{u'Y''}{Y'}$. Or, par le second Lemme de la premiere Partie $ru'' = q'u' + p't'$, ou $ru'' + q'u' = p't'$, & $rru'u'' + 2rq'u'u'' + q'q'u'u' = p'p't't'$ $= rrp'p' - p'p'u'u'$, d'où (à cause de $p'p' + q'q' = rr$) on déduit $rru'u'' + 2rq'u'u'' + rr u'u' = rrp'p'$. Substituant dans cette formule les valeurs de u'' & de $u'u''$, & multipliant tout par $Y'Y'$, on a $u'u' = \frac{rrp'p'Y'Y'}{rrY'Y' + 2rq'Y'Y'' + rrY''Y''}$, & $u' = \frac{rp'Y'}{\sqrt{(rrY'Y' + 2rq'Y'Y'' + rrY''Y'')}}$. En reprenant l'équation $ru' = Y'S$, on a :

$$S = \frac{rrp'}{\sqrt{(rrY'Y' + 2rq'Y'Y'' + rrY''Y'')}}.$$

Si on ne trouve pas ces valeurs de u' , S , assez commodes, à cause du signe radical qui s'y rencontre, voici encore une solution plus simple.

En comparant la formule qu'on vient de voir pour S ,

& celle-ci $\frac{r^4 aa}{Y'Y'} = rrXX + 2rbXX' + rrX'X'$, qu'on a vû au Probl. VII, en comparant encore le triangle QPQ' au triangle EPE' , on doit reconnoître que les deux formules sont semblables, & relatives à des lignes homologues. Y' est la tangente de PF , perpendiculaire à la base EE' du triangle EPE' , menée par le sommet P de l'angle opposé à cette base, lequel a pour sinus & cosinus a, b , & est compris entre des côtés dont X, X' sont les cotangentes : de même S est la tangente de Ph , perpendiculaire à la base QQ' du triangle QPQ' , menée par le sommet P de l'angle opposé à cette base, lequel a pour sinus & cosinus p', q' , & est compris entre des côtés dont $Y'Y''$ sont les cotangentes. Ainsi, comme on a vû qu'on peut avoir PF autrement que par la valeur algébrique, de sa tangente où le signe radical se rencontre ; c'est-à-dire, qu'on peut avoir PF par deux opérations simples & subordonnées, on peut trouver Ph par un procédé semblable.

Il faut déterminer d'abord l'angle PQQ' , par sa relation avec les trois élémens donnés, qui sont l'angle QPQ' , & les côtés qui le comprennent, lesquels ont x', x'' , pour sinus ; c'est un cas de la quatrième classe, & on a $p' \times \cotang. PQQ' + x'Y'' = q'y'$, d'où on déduit $\cotang. PQQ' = \frac{q'y' + x'Y''}{p'}$. L'angle PQQ' , ou PQh étant connu, on a Ph par cette analogie, $r : x' :: \sin. PQh : S$. Enfin la hauteur du pôle Ph étant connue, on aura u' par sa valeur $\frac{Y'S}{r}$.

Je ne m'arrêterai point aux Problemes XII & XIII. On s'apperoit sans doute, que si $P\phi$ perpendiculaire sur QZN , Fig. 29 (dont Pz est complément) est connue, ainsi que PF perpendiculaire sur $ENFE'$, avec l'ascension

droite des points ϕ , F , on est en état de proceder pour le Probleme XIII, de la même maniere qu'on vient de faire au Probl. XI. Je remonte au Prob. II.

PROBLEME II.

Où les hauteurs de deux astres sont données,

Fig. 20, 21, 22, 23.

Je suppose l'arc EE' connu au triangle EPE' , avec l'un ou l'autre des angles PEE' , $PE'E$. Cela ne requiert que deux petites opérations, posé qu'on ne l'ait pas par des Tables. On a donc trois élémens du triangle oblique EZE' , sçavoir ses trois côtés; ainsi on peut trouver l'un ou l'autre de ses angles en E , E' , c'est un cas simple de la premiere classe. (Soit PEE' l'angle connu au triangle EPE' , c'est l'angle ZEE' qu'il faut chercher.) On a, en conservant les dénominations employées ci-devant, $rrh' \pm r\beta h = \delta k \times \cos. ZEE'$: d'où résulte $\cos. ZEE' = \frac{rrh'}{\delta k} \pm \frac{r\beta}{\delta} \times \frac{h}{k}$. (Ce deuxieme terme est réductible à une expression plus simple, sçavoir au produit de la tangente de la hauteur du point E , & de la cotangente de l'arc EE' divisé par le rayon.)

Ayant ajouté les angles connus PEE' , ZEE' , Fig. 20, 22, ou ayant retranché l'un de l'autre, Fig. 21, 23, on aura l'angle PEZ , & on a déjà par l'hypothese deux autres élémens du triangle EPZ , sçavoir les côtés qui comprennent l'angle PEZ : la relation de ces élémens avec le troisieme côté PZ du triangle, détermine ce côté ou bien son complément, qui est la hauteur du pole; c'est un cas de la premiere classe, & on a $rrs \pm rxh = yk \times \cos. PEZ$. La hauteur du pole étant connue, on est dans un cas de

la troisieme classe pour l'angle horaire EPZ , & on a

$$z = \frac{k \sin. PEZ}{c}.$$

On peut aussi changer l'ordre qui vient d'être suivi, c'est-à-dire, trouver l'angle horaire de l'astre E avant la hauteur du pole, on est dans un cas de la quatrieme classe pour l'angle horaire: on a, en prenant V pour la cotangente de cet angle, & H pour la tangente de la hauteur de l'astre E , $V \times \sin. PEZ + yH = x \times \cos. PEZ$, d'où résulte $V = \frac{x \times \cotang. PEZ}{r} + \frac{yH}{\sin. PEZ}$. L'angle horaire étant découvert, on est dans un cas de la troisieme classe pour la hauteur du pole, on a, $c = \frac{k \times \sin. PEZ}{s}$.

Si l'on souhaite avoir l'angle azymuthal, on a $m = \frac{y^2}{k} = \frac{y \times \sin. PEZ}{c}$. On peut même obtenir cet angle sans avoir l'angle horaire & la hauteur du pole; on est pour cela dans un cas de la quatrieme classe: on a $N \times \sin. PEZ + kX = h \times \cos. PEZ$, d'où résulte $N = \frac{h \times \cos. PEZ}{r} + \frac{kX}{\sin. PEZ}$.

Un procédé conforme en gros à celui qu'on vient de voir, a été proposé il y a quelques années par M. Pitot, de l'Académie Royale des Sciences, pour le cas particulier où l'on auroit observé deux fois la hauteur de quelque astre, avec le tems écoulé entre les deux observations. Voyez les Mémoires de 1736, pag. 255.

Notre Probleme comprend le cas où l'on aura le tems écoulé entre les observations de deux astres dans l'horison rationel. J'ai rapporté, premiere Partie, d'après M. de Maupertuis, que dans ce cas particulier la tangente S de PH hauteur du pole $= \frac{rrp}{V(rrXX \pm 2rqXX' + rrX'X')}$. On doit

voir que dans ce même cas PH se confond avec PF , Fig. 24, ainsi deux opérations simples & subordonnées y suffisent, & peuvent être substituées à celle qu'indique la formule pour la tangente S , &c.

Je place ici une remarque sur la méthode proposée dans ce Chapitre. Je la donne comme plus commode, comme tendante pour chaque Probleme, à des opérations arithmétiques plus simples que celles de la première Partie : je crois bien qu'on conviendra unanimement de ce point, qu'on approuvera par conséquent cette dernière méthode pour la pratique ; mais il me semble d'ailleurs qu'en elle-même elle a quelque valeur, qu'elle est capable de satisfaire *les esprits Géométriques* : & dois-je me flatter qu'en effet chacun en jugera aussi favorablement ? Voici donc les raisons de mon opinion.

1°. Cette dernière méthode convient dans le genre avec celle de la première Partie, qui a M. de Maupertuis pour Auteur, & qui est très-belle assurément : on emploie dans celle-ci, comme dans celle-là, le calcul algébrique, le même calcul. Aussi les différentes formules qu'elles fournissent pour la solution du même probleme, ont-elles tant d'affinité, qu'on peut déduire l'une de l'autre, comme je l'ai montré. En un mot, ces deux méthodes roulent sur les relations qui regnent entre les élémens des triangles sphériques. Nous avons, par exemple, dans ce Probleme second quatre triangles, sçavoir PEE' , ZEE' , PEZ , $PE'Z$, qui, deux à deux, ont un côté commun, & trois à trois un sommet commun à leurs angles, en sorte qu'un angle quelconque est la somme ou la différence de deux autres angles. Or dans la méthode de la première Partie, on considère les trois angles qui ont leur sommet en P , on considère donc très-réellement les deux triangles PEZ , $PE'Z$, quoiqu'on ne les trace pas.

Dans

Dans la dernière méthode, ce sont les trois angles qui ont leur sommet en E , ou en E' , que l'on considère principalement; ce sont de part & d'autre des objets de même nature.

2°. La dernière méthode n'est pas moins concise que la première: elle est contenue en aussi *peu de lignes*. Les quatre principales opérations subordonnées que requiert, par exemple, ce Problème second, suivant la méthode de ce Chapitre (je compte pour les deux premières opérations, celles qui donnent l'arc EE' & l'angle PEE'), sont indiquées par des formules qui n'occupent pas plus d'espace que le calcul qui produit l'équation du second degré, donnée, première Partie, pour ce même Problème.

3°. La dernière méthode est assez *générale*: elle s'étend à tous les cas dans lesquels celle de M. de Maupertuis peut être employée avec certain succès.

4°. Si quelque méthode a du mérite géométrique; c'est en partie à l'*analyse* que ce mérite est dû. Or, sans se prévaloir ici de l'étymologie, ne peut-on pas avancer qu'il y a autant d'analyse dans la méthode, qui, comme celle de ce Chapitre, parvient à la solution d'un Problème en le décomposant & par degrés, que dans celle qui l'embrasse tout entier d'un seul coup, & exclusivement à tout autre objet?

J'avoue bien qu'une solution exécutée par plusieurs équations, est communément fort inférieure en mérite à celle qui est contenue dans une seule équation: mais je ne crois pas qu'on veuille dépriser la dernière méthode, relativement à la première, par cette considération générale; ce seroit en abuser, car elle suppose que les équations sont du même degré de part & d'autre. Si l'on se permettoit de former des reproches vagues, ne pourroit-on pas objecter d'un autre côté à la belle méthode de

M. de Maupertuis, qu'il est vicieux d'employer des équations du second degré, lorsque des équations linéaires fuffifent, & que quoique l'algebre soit fort supérieure à la simple arithmétique, par l'artifice de la construction & de la résolution de ses équations de plus d'un degré, cet artifice est cependant déplacé dans les rencontres où il n'est pas absolument nécessaire?

Mais enfin, peut-on dire, les solutions de ce Chapitre sont *indirectes*, & ne sont pas *immédiates*. On cherche, par exemple, pour le Probleme second, un angle *PEZ* qui n'est point demandé. Je passe l'objection, mais 1°, ne peut-on point la rétorquer d'une certaine façon? Il est vrai qu'on va au but assez immédiatement dans la Partie purement algébrique de la solution du second Probleme, que donne la premiere méthode; on part de la double formule $rrh + rsx = cyu$, $rrh' + rsx' = cy'u'$, & à l'aide d'une relation énoncée au second Lemme (relation dont la deuxieme méthode n'a pas besoin), on trouve une valeur du sinus de la hauteur du pole; mais cette valeur n'est qu'algébrique, & pour obtenir la valeur numérique qui est demandée dans la pratique, combien d'opérations arithmétiques ne faudroit-il pas faire? Combien de produits faudroit-il former? Combien de quotiens faudroit-il chercher? &c. Que de quantités, en un mot, faudroit-il trouver, qui ne sont pas plus demandées que l'angle *PEZ*? Ce ne seroit donc pas immédiatement, ni par une route bien directe, que l'on résoudroit en effet le Probleme second suivant la premiere méthode.

2°. Dans plusieurs Problemes deux choses sont inconnues, sçavoir l'heure, & la hauteur du pole (une troisieme chose y est même encore inconnue, sçavoir l'angle azymuthal). Or suivant la premiere méthode, tantôt c'est la hauteur du pole, tantôt c'est l'heure qu'il faut

chercher par préalable, en sorte que la solution n'est pas immédiate pour l'une des deux (ou pour deux des trois) inconnues. Au Probleme second, par exemple, la solution n'est pas immédiate pour l'heure dans la premiere methode, la recherche de la hauteur du pole devant la précéder. Que si on cherche par la methode de ce Chapitre un angle PEZ qui n'est pas demandé, ce n'est pas sans quelque avantage, car cet angle étant une fois connu, on peut indifféremment trouver laquelle on veut des trois inconnues, l'heure, la hauteur du pole, l'angle azymuthal, indépendamment des autres.

Au reste, je ne prétends point par ces raisons aller au-delà du soutien de la deuxieme methode, je consens qu'on donne la *préférence* à la premiere, & qu'on la juge plus élégante que toute autre.

P R O B L E M E X V I I.

Où la hauteur d'un astre & l'angle de son azymuth, avec celui d'un autre astre sont donnés, Fig. 20, 21, 22, 23.

Je joins ce Probleme au précédent, parce qu'il y a beaucoup de rapport, quoiqu'il soit moins simple. On connoît, je le suppose, l'arc EE' , & l'angle PEE' ; on a donc trois élémens du triangle EZE' , sçavoir le côté EZ , complément de la hauteur de l'astre E , le côté EE' , & l'angle MZM' qui y est opposé, & il s'agit de trouver l'angle ZEE' . (Car de chercher la hauteur de l'astre E' ; ce feroit un circuit inutile dans cette methode. Si j'ai cherché cette hauteur, Partie premiere, c'est que l'usage des seules formules de M. de Maupertuis, auquel je m'étois astreint, l'exigeoit. Au reste, il n'est pas plus difficile de trouver l'angle ZEE' , que le côté ZE' qui lui est oppo-

fé, indépendamment l'un de l'autre.) Or pour avoir cet angle ZEE' , on est dans un des cas compliqués de la quatrième classe, & le parti le plus commode est de suivre la règle de trigonométrie, qui consiste à supposer une perpendiculaire menée du sommet E de l'angle cherché sur le côté qui lui est opposé, & à prendre successivement les angles de ZE , & de EE' , avec cette perpendiculaire. L'algebre fournit les équations pour ces angles, nous avons déjà vu un cas pareil au Probl. II.

L'angle ZEE' étant connu, on aura PEZ par addition ou soustraction de PEE' , & l'on continuera comme au Probleme précédent.

PROBLEME XIV.

Où deux astres sont vus dans un même vertical, & la hauteur d'un troisième astre est connue Fig. 30.

En conservant les dénominations déjà employées ci-devant, nous avons u' cosinus de l'angle horaire du point $F = \frac{Y's}{c}$, lorsque le cercle $ENE'F$ est vertical, ainsi qu'il a été montré au Probleme XI, & v cosinus de l'angle horaire de l'astre $\epsilon = \frac{rrh'' - rsx}{ci}$. Nommant p' , q' , le sinus & le cosinus de la différence des points ϵ , F , en ascension droite, nous avons $rv = q'u' - p' \sqrt{rr - u'u'}$, d'où résulte $rvv - 2q'vu' + ru'u' = rp'p'$. Substituant dans cette équation les valeurs de v , u' , & de leurs quarrés, multipliant tout par $ccii$, substituant $rr - ss$ à cc , &c. on trouve

$$\left. \begin{array}{l} iiYY' \\ - 2ixq'Y' \\ + rrxx \\ + iip'p' \end{array} \right\} ss \quad + \left. \begin{array}{l} 2rh''iq'Y' \\ - 2r^3h''x \end{array} \right\} s \quad - rriip'p' = 0;$$

Formule plus simple que celle qui a été donnée, première
Partie, pour le même Probleme, sçavoir :

$$\left. \begin{aligned} & rr\ aa\ ii \\ & - 2rai\chi (pX' - p'X) \\ & + \chi\chi (rrX'X' + rrXX) \\ & - 2rbX'X \\ & + ii (qX' - q'X)^2 \end{aligned} \right\} ss \quad \left. \begin{aligned} & + 2rrah''i (pX' - p'X) \\ & - 2rrh''\chi (rrX'X' + rrXX) \\ & - 2rbX'X \end{aligned} \right\} s$$

$$\left. \begin{aligned} & - rr\ ii (qX' - q'X)^2 \\ & + rrrh''h'' (rrX'X' + rrXX) \\ & - 2rbX'X \end{aligned} \right\} = 0.$$

Observons cependant en passant, que l'une de ces formules est réductible à l'autre, en substituant dans la plus longue $\frac{r^4aa}{Y'Y'}$ à sa valeur $rrX'X' + rrXX - 2rbX'X$, $\frac{raq'}{Y'}$ à $pX' - p'X$, & $\left(\frac{rap'}{Y'}\right)^2$ à $(qX' - q'X)^2$, puis multipliant tout par $Y'Y'$, & divisant par $rraa$.

Comme cette solution n'est point encore assez commode, en voici une très-simple. Je suppose qu'on a par des Tables ou autrement, l'arc E , & les angles PEE' , PE , que fait le cercle horaire du point E avec les grands cercles $ENE'F$, E ; la somme ou la différence de ces angles, est l'angle EZ du triangle obliquangle EZ , dont on a, par l'hypothese, le côté Z : on peut donc résoudre ce triangle par la règle de Trigonométrie, c'est-à-dire, trouver par parties le côté EZ , ou l'angle E, Z . (Il est presque indifférent lequel de ces élémens on ait pour satisfaire au Probleme.) Si l'on veut se servir de EZ , on cherchera 1°. le côté ER du triangle rectangle ER ,

par cette équation: $tang. ER = \frac{tang. E \times cos. EZ}{r}$. 2°. Le

côté RZ du triangle rectangle ZR , par cette équation:

$cos. RZ = \frac{rh'' \times cos. ER}{cos. EZ}$. La somme ou la différence de

$Zz\ ii j$

ER, RZ , est EZ , l'un des côtés du triangle PEZ , dont on connoît d'ailleurs deux élémens, ſçavoir PE , & l'angle PEE' ou PEZ ; on peut donc trouver tel autre élément qu'on voudra de ce triangle, en procédant comme au Probleme ſecond. On aura, par exemple, ſ cosinus de PZ , par cette équation : $rrs \pm rxh = yk \times \cos. PEZ$; puis t ſinus de l'angle horaire EPZ du point E , par celle-ci : $ct = k \times \sin. PEZ$: ou bien on fera $V \times \sin. PEZ \pm yH = x \times \cos. PEZ$, &c.

Si on veut ſe ſervir de l'angle $E:Z$, on cherchera 1°. l'angle $E:R$ du triangle rectangle ER , par cette équation : $\cotang. E:R = \frac{\cos. E: \times \tan. ER}{r}$. 2°. L'angle $Z:R$ du triangle rectangle ZR par cette autre équation : $\cos. Z:R = \frac{\tan. E: \times \cos. E:R}{\tan. Z}$; la ſomme ou la différence des angles $E:R, Z:R$, eſt l'angle $Z:E$, lequel étant retranché de l'angle $P:E$, que je ſuppoſe connu, ou y étant ajouté, on a l'angle $P:Z$, compris entre deux côtés connus du triangle PZ ; ainſi on eſt en état de trouver la hauteur du pole par cette équation : $rrs \pm rxh'' = ik'' \times \cos. P:Z$, &c.

Si l'on avoit par des Tables la perpendiculaire PF , ſur le cercle $ENE'F$, l'arc EF , &c. on rendroit la ſolution encore plus ſimple; car après avoir trouvé l'arc EZ , on auroit par ſa ſouſtraction ou addition à EF , le côté ZF du triangle rectangle PFZ , & l'on obtiendrait la hauteur du pole, l'angle horaire FPZ , ou l'angle azymuthal hZM , par de ſimples analogies.

PROBLEME XV.

Où deux astres sont vus dans un même azymuth, dont on connoît l'angle avec l'azymuth d'un troisieme astre, Fig. 30.

Si, outre l'angle donné EZ , ou MZM' , on suppose connus comme au Probleme précédent, l'angle EE' ou EZ , & le côté E du triangle obliquangle EZ , on est en état de trouver par parties son côté EZ ; on aura 1°. l'arc ER par cette équation : $\text{tang. } ER = \frac{\text{tang. } E \times \text{cof. } EZ}{r}$.

2°. L'arc RZ par cette autre équation : $\text{fin. } RZ = \frac{\text{fin. } ER \times \text{tang. } EZ}{\text{tang. } EZ}$ la somme ou la différence des arcs ER, RZ , est EZ côté du triangle PEZ , où on connoît d'ailleurs deux élémens; ainsi on continuera comme au Probleme précédent.

PROBLEME XVI.

Où deux astres sont vus à une même hauteur, & l'angle de leurs azymuths est donné, Fig. 26.

Outre l'angle EZN , moitié de l'angle donné EZE' ou MZM' , je suppose connus l'angle PEE' ou PEN , & la moitié EN de l'arc EE' : on peut donc 1°. Chercher l'hypothénuse ZE du triangle rectangle ENZ par cette équation : $k = \frac{r \times \text{fin. } EN}{\text{fin. } EZN}$. 2°. L'angle ZEN du même

triangle par cette autre équation : $\text{fin. } ZEN = \frac{r \times \text{cof. } EZN}{\text{cof. } EN}$, ou par celle-ci : $\text{cof. } ZEN = \frac{H \times \text{tang. } EN}{r}$. Cet angle ZEN étant soustrait ou ajouté à l'angle PEN , on aura l'angle PEZ compris entre deux côtés connus du triangle EPZ , on fera donc en état de continuer comme ci-dessus.

CHAPITRE III.

Autre maniere de simplifier les calculs pour l'invention de l'heure.

CETTE maniere convient à peu de cas. Elle consiste à ajouter une observation à celles qui suffisent absolument pour la détermination désirée ; on obtient par ce moyen, une équation plus basse en degré que celle qu'on auroit sans cela.

Soient, par exemple, deux astres vûs dans un même azymuth, & soit donné leur angle azymuthal, outre la hauteur du pole : ce sont trois choses, qui, combinées seulement deux à deux, ne donneroient point l'heure par une équation linéaire, mais jointes ensemble, elles la donnent ainsi ; car on a par la 3^e formule de la premiere Partie, $\frac{Nt - su}{X} = c = \frac{Nt' - su'}{X'}$, ou $rNX't - rsX'u = rt'NX - ru'sX$. Or, par le second Lemme de la même Partie, $rt' = bt - au$, & $ru' = bu + at$, en certain cas (a, b , sont le sinus & le cosinus de la différence des astres en ascension droite), substituant ces valeurs de rt' & ru' dans l'équation précédente, on a $rNX't - bNXt + asXt = rsX'u - aNXu - bsXu$. d'où on déduit pour la tangente de l'angle horaire de l'un des astres, $\frac{rt}{u} = r \left(\frac{rsX' - aNX - bsX}{rNX' - bNX + asX} \right)$.

On a un exemple d'un autre cas auquel convient cette maniere, sous le Probleme XXXI de l'Astronomie Nautique. Voici le texte de M. de Maupertuis, à peu près.

Soient

Soient h, h', h'' , les (sinus de) trois hauteurs auxquelles on a observé un même astre; soient u, u', u'' , les cosinus des angles horaires; p, p' , les sinus; q, q' , les cosinus des tems écoulés entre la premiere & la deuxieme, la premiere & la troisieme observation. Par la premiere formule on a, $rrh - cyu = rsx = rrh' - cyu' = rrh'' - cyu''$, d'où l'on tire $\frac{rr(h-h')}{u-u'} = cy = \frac{rr(h-h'')}{u-u''}$, ou (faisant $h-h' = D, h-h'' = D'$) $D'u - D'u' = Du - Du''$. Mais on a $u' = \frac{qu-pt}{r}, u'' = \frac{q'u-pt'}{r}$, qui étant substitués dans l'équation précédente, donnent: $D'u(r-q) + D'pt = Du(r-q') + Dp't$; ou (mettant o, o' , pour $r-q, r-q'$, sinus versés des tems écoulés) $D'ou + D'pt = Do'u + Dp't$. D'où l'on tire pour la tangente de l'angle horaire de l'astre, au moment de la premiere observation $\frac{rt}{u} = r \left(\frac{Do'-D'o}{D'p-Dp} \right)$.

Ce procedé s'étend aisément au cas où l'on a les observations des hauteurs contemporaines de trois différens astres. Soient en ce cas, x, x', x'' , les sinus; y, y', y'' , les cosinus de leurs déclinaisons; p, p' , les sinus; q, q' , les cosinus de la différence d'ascension droite du premier & du second, du premier & du troisieme astre, &c.

Par la premiere formule on a, $\frac{rrh-cyu}{x} = rs = \frac{rrh'-cy'u'}{x'} = \frac{rrh''-cy''u''}{x''}$, d'où l'on tire, $rrhx' - cx'yu = rrh''x - cxy'u''$, & $rrhx'' - cx''yu = rrh'x - cxy'u'$, ou bien, $\frac{hx'-h''x}{x'yu - xy'u''} = \frac{c}{rr} = \frac{hx''-h'x}{x''yu - xy'u'}$. Mettant D pour $hx' - h''x$, & D' pour $hx'' - h'x$, & considérant que $ru' = qu - pt$, & $ru'' = q'u - p't$, on trouve $rx'y D'u = qxy'D'u + pxy'D't = rx'y Du - q'xy''Du + p'xy''Dt$,

ou (mettant o pour $rx'y - qxy'$, & o' pour $rx''y - q'xy''$)
 $oD'u + pxy'D't = o'Du + p'xy''Dt$; d'où l'on tire pour
 la tangente de l'angle horaire du premier astre, $\frac{rs}{u}$
 $= r \left(\frac{o'D - oD'}{x(py'D' - p'y''D)} \right)$, ou en remettant les valeurs de
 $o, o', \& D, D'$, dans le numérateur de cette fraction,
 $\frac{rs}{u} = r \left(\frac{h(qx''y' - q'x'y'') + ry(h''x' - h'x'') + x(q'h'y'' - q'h'y')}{py'D' - p'y''D} \right)$.

SCHOLIES. I. Outre la propriété de rendre le calcul plus simple jusqu'à certain point, qui se trouve dans la méthode de ce Chapitre, il est remarquable qu'elle a celle de donner le résultat de plusieurs observations, ce qui est un petit avantage, vû l'imperfection à laquelle ces opérations sont toujours sujettes sur mer. Car plus on combine d'éléments de cette qualité, plus il est rare que leurs défauts conspirent à produire une erreur en même sens, plus souvent au contraire doivent-ils tendre à des erreurs en sens opposé, & qui s'entre-détruisent en partie.

II. Le calcul que j'ai tiré du Probleme XXXI de l'Astronomie Nautique, n'est qu'une préparation pour la solution de ce Probleme, que les Sçavans de l'Académie de Russie ont rendu *fameux*, Probleme *plus curieux* cependant qu'*utile*, selon M. de Maupertuis, & qui consiste à trouver la déclinaison de l'astre dont on a les trois hauteurs, & l'élevation du pole. Or en disant au commencement de ce Chapitre, que la méthode que j'y présente, consiste à ajouter une observation à celles qui suffisent absolument pour la détermination désirée, j'ai supposé que la déclinaison étoit donnée, sans quoi je sçai que deux hauteurs d'un astre ne feroient pas suffisantes pour la détermination de l'heure. En un mot, je conviens que dans l'espece précise de ce Probleme XXXI de l'Astro-

nomie Nautique, les trois observations sont absolument nécessaires pour l'invention de chacune des trois inconnues qu'on y détermine.

On peut faire une remarque à ce sujet, sur une double propriété de la combinaison de plusieurs quantités Astronomiques, de même ou de différente espece, supposées données. Une de ces propriétés est, qu'à mesure qu'on accumule ces données, on a besoin de connoître moins d'élémens d'une autre espece, & on est en état d'en découvrir un plus grand nombre. Si on a, par exemple, une seule observation de la hauteur d'un astre, il faut connoître d'ailleurs deux quelconques d'entre ces quatre choses, la déclinaison de l'astre, son angle azymuthal, son angle horaire, & la hauteur du pôle, pour trouver quelque une des autres : mais si l'on a deux observations de hauteur de cet astre, avec le tems écoulé entre ces observations, il suffit de connoître d'ailleurs un des quatre élémens que je viens de marquer, pour être en état de découvrir tout le reste ; & si l'on a les observations de trois hauteurs de cet astre, avec leurs intervalles, il n'est pas nécessaire d'avoir d'ailleurs aucun des quatre élémens susdits, & on est en état de les découvrir tous par ordre.

L'autre propriété est, qu'en se servant des formules de M. de Maupertuis, on trouve par la combinaison de certaines données, une valeur algébrique plus simple pour quelque inconnue, que par d'autres combinaisons. C'est de cette propriété que j'ai fait usage dans ce Chapitre, & il y en a encore d'autres exemples dans la premiere Partie. Ainsi lorsqu'on a les passages de deux couples d'astres à deux verticaux, ce qui est le cas du Probl. XI, on a une équation d'un moindre degré pour l'invention de l'heure, que lorsqu'on a seulement le passage de deux astres à un

vertical, outre la hauteur du pôle, ce qui est le cas du Probleme VII.

L'usage qu'on peut faire de la connoissance de la premiere propriété, est de discerner combien de données sont absolument requises, pour la solution de quelque Probleme que ce soit du genre de ceux dont je parle. Voici, par exemple, une application de cette remarque à certaine solution du Probleme où il s'agit de trouver concurremment la hauteur du pôle, & la déclinaison de quelque étoile. Quoique ce Probleme soit étranger à mon objet, cependant comme il est célèbre en général, & qu'on l'estime même *utile pour la perfection de l'astronomie*, en ce que l'on y évite un *cercle* qui se rencontre dans la plupart des méthodes par lesquelles on cherche la hauteur du pôle, ou la déclinaison, je crois qu'on tolerera cette petite digression.

La solution ou méthode que j'ai en vûe, est celle du Probleme XL & dernier de l'Astronomie Nautique. (Cette méthode qui est qualifiée de *très-belle* par M. de Maupertuis, & avec justice, parce qu'elle ne suppose *la mesure actuelle d'aucun angle**, est dûe, suivant le même Ecrivain, à M. Mayer, de l'Académie de Russie, à titre d'Auteur, ou d'indicateur. On y suppose seulement que les intervalles de tems entre les passages de deux étoiles par le méridien, par deux verticaux, & par deux almicantharths inconnus, mais constans, sont donnés. Or, je dis qu'une de ces observations est surabondante pour la solution du Probleme dont il s'agit, car ce sont quatre quantités principales qui sont données pour chaque étoile, & il n'y a aussi que quatre inconnues principales pour chaque étoile, sçavoir sa hauteur & son angle azy-muthal, au moment d'une des observations, outre sa

* Voyez l'Astron. Naut. pag. 94, & la Préface, pag. xxxiiij, xxxiv.

déclinaison & la hauteur du pôle. Je dis, par exemple, qu'ayant seulement les tems écoulés entre les passages des deux étoiles au méridien & à deux autres verticaux, & à un seul almicantharath, toutes les inconnues que je viens de marquer sont déterminées, & peuvent être découvertes: on n'aura pas, à la vérité une équation linéaire, pour la déclinaison, ainsi que dans le Probleme XL de l'Astronomie Nautique, mais une équation d'un plus haut degré. Voici une preuve particuliere de cette assertion.

Soient les sinus, les cosinus, & les tangentes des déclinaisons des deux étoiles x, y, X , & x', y', X' . Soient t, t' , & u, u' , les sinus & cosinus des angles horaires des étoiles, lorsqu'elles passent au premier vertical; t'', t''' , & u'', u''' , les sinus & cosinus de ces angles, lorsqu'elles passent au second. La troisieme formule donne, suivant

ce qu'on a vû au Probl. VII, premiere Partie, $\frac{su - cX}{t} = N = \frac{su' - cX'}{t'}$, & $\frac{su'' - cX}{t''} = \frac{su''' - cX'}{t'''} = N'$; ou $sut' - cXt' = su't - cX't$, & $su''t''' - cXt''' = su'''t'' - cX't''$: ou $sut' - su't = cXt' - cX't$, & $su''t''' - su'''t'' = cXt''' - cX't''$; ou $\frac{Xt' - X't}{ut' - u't} = \frac{s}{c} = \frac{Xt''' - X't''}{u''t''' - u'''t''}$; ou (nommant [d'après M. de Maupertuis] a le sinus de la différence des arcs horaires, terminés par les sinus t & t' , & a' le sinus de la différence des arcs terminés par les sinus t'' & t''' , ce qui donne $ra = ut' - u't$, & $ra' = u''t''' - u'''t''$), on a $\frac{Xt' - X't}{ra} = \frac{s}{c} = \frac{Xt''' - X't''}{ra'}$, ou $a'Xt' - a'X't = aXt''' - aX't''$, ou $X'(a't - at'') = X(a't' - at''')$, ou faisant la fraction $\frac{a't' - at'''}{a't - at''} = e$) $X' = eX$. Ainsi nous avons déjà le rapport des tangentes des déclinaisons désirées.

Soient maintenant les cosinus des angles horaires des deux étoiles, lorsqu'elles passent au même almicantharath, v & v' ; la première formule donne $cyv + rsx = rrh = cy'v' + rsx'$, ou bien $c(y'v' - yv) = s(rx - rx')$, ou (substituant Xy à rx , & $X'y'$ à rx'), $\frac{y'v' - yv}{xy - x'y'} = \frac{s}{c}$ $= \frac{Xt' - Xt}{ra}$. Donc $rav'y' - rav y = XX't'y - XX't'y' - XX'ty + X'X'ty'$, ou $rav'y' + XX't'y' - X'X'ty' = rav y + XX'ty - XX'ty$. Donc $y':y::rav + X(Xt' - Xt):rav' - XX't' + X'X't$; & $y'y':yy::(rav + XX't - XX't)^2:(rav' - XX't' + X'X't)^2$. Or, on sçait que $y'y' = \frac{r^4}{rr + X'X'}$, & $yy = \frac{r^4}{rr + XX}$; donc $rr + XX:rr + X'X'::(rav + XX't - XX't)^2:(rav' - XX't' + X'X't)^2$, ou (en mettant eX au lieu de X' , & e au lieu de $t' - et$) $rr + XX:rr + eeXX::(rav + XX)^2:(rav' - eeXX)^2$, d'où il résultera enfin une équation du troisième degré, pour la tangente X de la déclinaison d'une des étoiles. Cette déclinaison étant connue, on trouvera facilement la déclinaison de l'autre étoile, par l'équation $X' = eX$, puis la hauteur du pôle par la tangente $\frac{rs}{c} = \frac{Xt' - Xt}{a}$. On aura ensuite, si l'on veut, le premier angle azymuthal des étoiles, par l'équation $\frac{su - cX}{i} = N$, &c.

Seroit-ce me tromper, que de regarder cette méthode comme approchante en mérite de celle de M. Mayer? Il est vrai d'un côté, qu'une équation du troisième degré est un peu longue, & difficile à résoudre, & que le calcul pour la déclinaison seroit moins simple par cette méthode, que par celle du sçavant Académicien, laquelle aboutit seulement à une équation linéaire dans l'Astronomie Nautique: mais en récompense, la méthode qu'on

vient de voir exige une observation de moins que celle-là, & cette observation retranchée, est une de celles qui sont les plus difficiles à exécuter, & où il est à craindre que la réfraction ne cause quelque défaut par son irrégularité. Or, *c'est, ce semble*, (au dire d'un très-habile homme) *une méthode avantageuse que celle, qui, rejettant sur le calcul les.... difficultés de l'Astronomie, en rendra la pratique* (ou bien la partie qui est de l'office de l'Observateur) *plus facile*, & moins sujette aux vices latents que la réfraction peut y jeter. Au reste, je laisse aux Maîtres de l'art à décider sur ce point.

Une des suppositions de M. Mayer, étant surabondante en rigueur, il doit encore y avoir lieu à un autre procédé pour l'invention de la déclinaison, sans la mesure actuelle d'aucun angle, sçavoir en retranchant l'observation du passage des étoiles à un des verticaux, & en conservant le reste. Voici ce procédé, mais je le donne moins pour la pratique que pour la théorie, & pour une plus ample confirmation de ma remarque, sur le nombre des données nécessaires à nos Problemes Astronomiques. Je conviens d'ailleurs, qu'il n'y a pas grand mérite à avoir pensé à ces procédés. Comme la principale partie du calcul suivant ainsi que du précédent, est tirée de l'Astronomie Nautique, c'est à M. de Maupertuis que l'honneur en appartient.

Soient v'' , v''' les cosinus des angles horaires des étoiles, lorsqu'elles passent au second almicantarath, & le surplus comme ci-dessus. On a, pour les passages aux

deux almicantaraths, $\frac{y'v' - yv}{rx - rx'} = \frac{s}{c} = \frac{y'v''' - yv''}{rx - rx'}$, d'où

résulte $\frac{y'}{y} = \frac{v - v''}{v' - v''}$; ou (faisant $\frac{z}{r} = \frac{v - v''}{v' - v''}$)

$y' = \frac{zy}{r}$. Pour le passage au vertical, on a (en faisant

$ra = ut' - u't$, $\frac{xy't - x'yt}{yy'a} = \frac{s}{c} = \frac{y'v' - yv}{r(x - x')}$, ou (en
 substituant $\frac{iy}{r}$ à y'), $\frac{ixt' - rxt}{iay} = \frac{iyv' - yvv}{rr(x - x')}$, ou $yy(iiav' - riav) = rr(xx'it' - rxx't - ixx't' + rx'x't)$. Et (en
 substituant $rr - yy$ à xx , & $rr - \frac{ii}{rr}yy$ à $x'x'$), $yy(iiav' - riav + rrit' + riit) - r^4(it' + rt) = -rrxx'(it' + rt)$, ou (en faisant $it' + rt = ro$, & $i(a[iv' - rv] + r[rt' + it]) = r^3o$), $yy - rro = oxx'$, & (en
 quarrant chaque membre) $oy^4 - 2rrooy^2 + r^4oo = oxxx'x' = oo(r^4 - rryy - iiyy + \frac{ii}{rr}y^4)$.



TROISIEME PARTIE.

Du choix entre les manieres de trouver l'heure , & des moyens de faire les observations supposées.

SI toutes les observations étoient parfaitement exactes, toutes les voies différentes qui constituent les divers Problemes proposés ci-devant sur l'invention de l'heure, seroient également bonnes , & il seroit d'ailleurs indifférent quelle fût la situation de l'astre, ou des astres, dont les observations sont supposées pour chaque Probleme. Mais il n'est que trop certain que l'on se trompe toujours de quelque chose en observant à la mer ; & les mêmes erreurs commises dans les observations dont on a besoin , & qu'on prend pour fondement du calcul, ou d'une opération graphique, mettent, par leur différente complication, ou par la diversité des circonstances, une grande différence entre les résultats de la même méthode, & peuvent en mettre aussi entre ceux des différentes méthodes ou Problemes. Il y a donc un choix à faire à cet égard entre les différentes circonstances, où une même méthode peut absolument être employée, & un autre choix entre les différentes méthodes. C'est même presque par ce seul égard que l'on doit déterminer quelle est la meilleure maniere de trouver l'heure en mer , selon le désir de l'Académie, car la facilité des opérations * est peu de chose, en comparaison

* Ce n'est pas la facilité respective des opérations de divers genres, telles que le calcul & la formation d'une figure, qui peuvent servir à un même Probleme, dont j'entends parler, c'est de celle des opérations homogenes qui conviennent aux divers Problemes, ou en différentes rencontres.

de l'exactitude à laquelle il faut toujours tendre , afin d'en approcher le plus qu'il est possible , quand on ne sçauroit l'obtenir ; & d'ailleurs , les opérations les plus faciles répondent communément aux cas où les erreurs des observations sont les moins nuisibles. Ainsi , pour diriger le choix qu'il convient de faire , il faut *examiner dans quelles rencontres les erreurs des observations tirent moins à conséquence* , & il est bon de sçavoir comment on peut évaluer leur effet , une telle évaluation étant utile au Navigateur , pour connoître jusqu'où il peut compter sur le résultat de ses observations , dans le cas où il n'aura pas la commodité de faire celles qui sont les plus avantageuses , ni de choisir les circonstances les plus favorables.



CHAPITRE PREMIER.

Du choix que l'on doit faire entre différentes applications de la même méthode, ou détermination des circonstances dans lesquelles une observation quelconque doit être faite, afin que son erreur tire moins à conséquence pour l'invention de l'heure.

MR. Bouguer, dont j'ai emprunté ci-dessus quelques expressions, a bien fait sentir la nécessité d'une détermination pareille à celle dont il s'agit, il nous a découvert une manière d'y procéder, & nous en a laissé un beau modèle dans la troisième Partie de son excellente Piece déjà citée, touchant la méthode d'observer en mer la déclinaison de la boussole. Il y fait usage pour cela du calcul différentiel : je me servirai aussi du même moyen, ou pour mieux dire, je ne le négligerai pas, car j'en employerai un autre en premier lieu, afin d'abrégé. L'usage de la seule manière inventée par M. Bouguer, produiroit ici trop de prolixité, à cause de la multitude & de la nature des Problèmes que j'ai embrassés ci-devant, puisque cet habile Géomètre a été obligé de faire plusieurs articles, pour appliquer sa méthode à l'unique, & assez simple Problème, où l'angle azymuthal d'un astre est conclu de l'observation de sa hauteur, & de la supposition que celle du pôle est connue exactement, ou à peu près. D'ailleurs ce moyen que je vais employer d'abord, sera intelligible à plus de personnes que le calcul différentiel.

La recherche de l'heure pouvant être souvent jointe, & allant pour ainsi dire de pair avec celle de la hauteur

du pole , je déterminerai conjointement , quelles sont les circonstances les plus favorables pour l'invention de l'une & de l'autre chose , quoique la dernière ne soit pas de mon objet. Je ne pourrois même séparer ces choses sans inconvénient , certaine opposition qui est entre elles , servant à faire mieux entendre ce qui convient en particulier à l'une ou à l'autre.

L'angle horaire de toute étoile ou de tout point du ciel , est une chose qui change continuellement , uniformément , & assez rapidement , par l'effet du mouvement journalier : au contraire la hauteur du pole , c'est-à-dire , du centre de ce mouvement , est une chose fixe pour chaque point de la terre. C'est sur ces propriétés opposées , que je vais déterminer en général quelle doit être la position d'un astre , ou quelles doivent être les positions de plusieurs astres , pour donner l'une ou l'autre de ces choses , avec le moins d'erreur qu'il est possible. On peut déjà entrevoir , & j'annonce , que l'observation qui est favorable pour l'une , est défavorable ou peu utile pour l'autre.

Le mouvement journalier , comme je l'ai remarqué dans la première Partie , fait que les astres changent continuellement , tant d'azymuth que d'almicantarath : mais ces changemens , & ceux qui en dépendent , sont différens à certain égard de ceux de l'angle horaire. Ils sont sujets à variété ; car tantôt ils sont grands & prompts , tantôt ils sont lents & petits , & presque insensibles. Il y a telle situation de la sphere , où l'angle azymuthal d'un astre change moins que sa hauteur ; telle autre où c'est sa hauteur qui change moins que son angle azymuthal. Une de ces choses peut changer autrement pour un astre voisin du pole , que pour un astre qui en est plus éloigné. Il y a telle partie du cours de chaque astre , où c'est sa hauteur qui

change peu, & telle autre où c'est son angle azymuthal qui reçoit le moindre changement, &c.

Je considère d'abord le cas où l'une de ces choses, l'heure, & la hauteur du pôle, est connue, soit exactement, soit à peu près, ou bien n'est pas désirée, & où l'on cherche seulement l'autre : & je dis que pour connoître le plus exactement qu'il se peut la hauteur du pôle, qui est une chose fixe, il faut observer un ou deux élémens quelconques, du nombre de ceux qui ont été supposés dans les divers Problemes ci-dessus, dans la circonstance où ils changent le moins ; & qu'au contraire, pour trouver le plus correctement l'heure, qui est une chose changeante, il faut observer un ou deux de ces élémens quelconques, dans la circonstance où ils changent le plus, posé qu'ils ne soient pas trop difficiles à observer alors. Je dis que plus un de ces élémens approchera de l'état fixe au moment où il sera observé, plus sûrement il donnera la hauteur du pôle, & plus vicieusement il donneroit l'heure ; c'est-à-dire que l'erreur que l'on commettra dans l'observation de cet élément, ne produira qu'une erreur égale, ou de peu plus grande sur la conclusion de la hauteur du pôle dans plusieurs Problemes, & qu'elle en produiroit une beaucoup plus grande sur la conclusion de l'angle horaire. Je dis d'un autre côté, que plus un élément approchera de la rapidité & de l'uniformité de la variation de l'angle horaire par la sienne, au moment où il sera observé ; plus sûrement il donnera cet angle, & plus défectueusement il donneroit la hauteur du pôle, sauf quelques exceptions ; c'est-à-dire, que l'erreur qui découlera dans la détermination de l'heure, de celle de l'observation d'un tel élément, ne sera pas plus grande, ou de peu plus grande que celle de son principe, & que celle qui en résulteroit sur la hauteur du pôle, l'excéderoit de beaucoup pour l'ordinaire.

Entrons donc un peu en détail, sur les changemens auxquels les élémens que j'ai supposés donnés dans les Problemes des Parties précédentes sont sujets, selon que l'astre est, ou que les astres sont dans telle ou telle partie de leur cours, qu'ils ont plus ou moins de déclinaison, & que le pole est plus ou moins élevé. On verra dans ce détail, un commencement de preuve de mes propositions.

La sphere étant parallele, ou presque parallele, la hauteur des astres ne varie point, ou varie très-peu; ainsi leur déclinaison étant supposée donnée, l'observation de la hauteur d'un astre quelconque, ou des hauteurs de deux astres, donneroit la hauteur du pole avec autant d'exactitude qu'elle en auroit: mais il est visible que cette observation ne donneroit point l'heure, quand même il s'en faudroit de 9 ou 10 minutes que le pole ne fût au zénith, puisqu'en se trompant d'autant de minutes sur la hauteur de l'astre observé, on pourroit se tromper du quart-de-cercle entier sur son angle horaire, en le mettant, par exemple, au méridien, lorsqu'il seroit au cercle de six heures, ou à ce cercle, lorsqu'il seroit au méridien.

Au contraire, l'angle azymuthal de tous les astres, ou de presque tous, change beaucoup dans cette situation de la sphere, & il change également, ou presque également à l'angle horaire. Aussi l'observation de cet élément donneroit l'heure avec autant d'exactitude qu'elle en auroit; mais elle ne donneroit point, ou donneroit mal, la hauteur du pole, surtout lorsque l'astre ne seroit pas fort élevé, & fort voisin du premier vertical, qui, dans ce cas, est presque co-incident avec le cercle de six heures.

La sphere étant droite, ou presque droite, les circonstances qu'on vient de voir sont renversées, & il s'en trouve

de nouvelles. Les astres varient beaucoup en hauteur, & le plus qu'il est possible, & avec le plus d'uniformité, quant à chacun, mais ils en varient diversement entre eux : au contraire, ils changent peu d'angle azymuthal pour la plupart, & ils en changent diversement en tems égaux. Tout cela a besoin d'être développé. A l'égard du changement de hauteur, voici d'abord une regle générale, c'est que pour les astres qui passent entre le pole élevé & le zénith, ou bien entre le pole abbaissé & le nadir, ce changement total, c'est-à-dire, celui qui se fait entre la culmination de l'astre, & sa plus grande dépression, est égal au double du complément de la déclinaison de l'astre. Pour tous les autres astres, c'est-à-dire, ceux dont la déclinaison est moindre que la hauteur du pole, leur changement total en hauteur, est égal au double du complément de la hauteur polaire. Et quant à l'angle azymuthal, c'est aussi une regle générale, que l'azymuth des astres qui sont dans le premier cas, ne parcourt qu'une partie de l'horison, & une partie d'autant moindre, que leur déclinaison surpasse plus la hauteur du pole : d'ailleurs cet azymuth va tantôt en un sens, tantôt en un autre. Au contraire, l'azymuth des astres qui sont dans le second cas, avance toujours en même sens, & parcourt tout l'horison en 24 heures : ainsi la variation totale de leur angle azymuthal, est égale à celle de l'angle horaire, mais elle est tantôt plus lente, & tantôt plus prompte.

Revenons à notre hypothese. La sphere étant droite, ou presque droite, la hauteur d'un astre situé à l'équateur, qui, dans ce cas, est presque co-incident avec le premier vertical, change autant, ou presque autant que l'angle horaire, & toujours uniformément, ou il s'en faut très-peu. Il est encore visible que par l'observation de cet élément, on auroit l'heure aussi exactement que cet

élément même. Au contraire, une telle observation ne donneroit point, ou donneroit mal la hauteur du pôle, si ce n'est que l'astre fût fort élevé. Quant aux astres qui déclinent de l'équateur, ils varient d'autant moins en hauteur, qu'ils ont plus de déclinaison, & ils en varient peu sensiblement vers le tems de leur culmination; ainsi leur hauteur étant observée dans cette circonstance, donneroit assez exactement la hauteur du pôle.

Dans la même hypothèse de la sphere droite, ou presque droite, les astres se meuvent perpendiculairement; ou presque perpendiculairement à l'horison, lorsqu'ils se levent ou se couchent; ainsi leur angle azymuthal ne change point dans cette circonstance, & il est assez propre à donner la hauteur du pôle. Cet angle change le plus vers le tems de la culmination de l'astre, lorsque son cours est presque parallele à l'horison, & ce changement est d'autant plus grand & plus prompt, que l'astre passe plus près du zénith, ou bien décline moins de l'équateur, mais il est lent, lorsque l'astre est voisin du pôle. L'angle azymuthal change médiocrement pour la plupart des astres, entre ces extrémités du passage à l'horison, & du passage au méridien. La sphere étant parfaitement droite, un astre situé à l'équateur ne change point d'azymuth entre ses passages au méridien, & à ces passages, il en change diamétralement tout d'un coup. Tout astre qui passe pareillement au zénith, lorsque la sphere n'est pas droite, change diamétralement d'azymuth à ce passage.

La sphere étant oblique, les changemens de la hauteur & de l'angle azymuthal des astres, participent aux états opposés qu'on vient de voir dans les deux hypothèses précédentes. Ils ne sont la plupart, ni si grands, ni si petits; ni si rapides, ni si lents; ni si inégaux, ni si approchans de l'égalité, ou bien s'ils sont susceptibles de quelques-uns de

de ces états, c'est dans une moindre partie de leur cours. Au reste, il est commun à cette hypothese & aux précédentes, que plus un astre est voisin du méridien, moins il change de hauteur à chaque instant, & que plus il est éloigné de ce cercle, plus par conséquent il en change. Or ce plus grand éloignement du méridien a lieu, quant aux astres dont la déclinaison est moindre que la hauteur du pôle, à leur passage au premier vertical. Quant aux astres dont la déclinaison surpasse la hauteur du pôle, on sçait qu'ils ne passent point au premier vertical, ou bien que leur plus grande digression du méridien est moindre que 90 degrés, & inégale. L'angle azymuthal varie au rebours de la hauteur; il change le plus, lorsque la hauteur change le moins, & au contraire il change le moins, lorsque la hauteur change le plus. C'est donc toujours vers le tems du passage d'un astre au méridien, que son angle azymuthal change le plus, & vers le tems de son passage au premier vertical (posé qu'il y passe) que cet angle change le moins. Pour les astres qui ne passent point au premier vertical, il est visible qu'il y a quelque partie de leur cours où ils se meuvent perpendiculairement à l'horison, comme je l'ai déjà observé, & qu'alors leur angle azymuthal ne varie pas.

Plus un astre est éloigné du méridien, ai-je dit, plus il change de hauteur. Il est à propos d'ajouter, & il est très-aisé de voir, que ce plus grand changement instantané, est moindre que celui de l'angle horaire, lorsque la sphere est oblique, & d'autant plus petit qu'elle est plus oblique. (Cela doit être en effet, puisque le changement total d'un astre en hauteur pendant 12 heures, est tout au plus égal au double du complément de la hauteur du pôle). Il suit donc du principe que j'ai posé, que pour découvrir l'heure par l'observation de la hauteur de quelque astre, il faut

la prendre lorsqu'il est le plus éloigné du méridien ; mais que dans cette circonstance , qui est la plus favorable à l'invention de l'heure , on a moins d'avantage pour la découvrir lorsque la sphere est oblique , que lorsqu'elle est droite , & à proportion qu'elle est plus oblique ; & c'est ce que je prouverai rigoureusement dans la suite par le calcul. On doit donc regarder comme certain mon principe général , sçavoir , qu'à mesure que la variation d'un élément est moindre que celle de l'angle horaire , il résulte une plus grande erreur dans la détermination de l'heure , que celle qu'on peut commettre dans l'observation de cet élément , &c.

Pour l'angle azymuthal , celui de quelques astres varie autant , ou plus , que l'angle horaire , vers le tems du passage de ces astres au méridien , dans le même cas de la sphere oblique : mais cet angle ne peut pas être observé directement sur mer , parce qu'une telle observation requiert une ligne méridienne ; & d'ailleurs , quand bien on auroit cette ligne sur mer , il seroit encore difficile d'y prendre directement l'azymuth d'un astre , vers le tems où cet azymuth varie le plus , parce que c'est alors que l'astre est le plus élevé , &c.

A l'égard de l'invention de la hauteur du pole , on voit sans doute que dans le même cas de la sphere oblique , il y a des circonstances qui y sont aussi favorables que dans tout autre cas , puisque le changement de hauteur est insensible pour la plupart des astres à leur passage au méridien , & que le changement d'angle azymuthal est pareillement insensible pour quelques astres , en certaine partie de leur cours. On doit voir aussi , que la circonstance la plus défavorable dans le même cas , pour trouver la hauteur du pole par l'observation de celle d'un astre , ou de celles de deux astres , est lorsque cet astre , ou ces astres

sont voisins du premier vertical. On peut juger sur cela, des restrictions qu'exigent dans l'usage, les Problemes XXXVIII & XXXIX de l'Astronomie Nautique, qui consistent à trouver sur mer la hauteur du pole, soit par la durée du jour, soit par le tems écoulé entre le lever ou le coucher de deux Planetes.

Il me reste à remarquer touchant la hauteur, & l'on peut aisément reconnoître à l'inspection d'un globe, que la variation instantanée de cet élément, est la même pour tous les astres qui sont dans le même azymuth, ou dans des azymuths également éloignés du premier vertical, quelques soient la hauteur & la déclinaison de ces astres, parce que ceux qui sont plus de chemin, le sont plus obliquement. On peut conclurre de-là, que la plus grande variation de hauteur des astres qui ne passent pas au premier vertical, est moindre que celle des astres qui y passent. (On peut aussi tirer la même conclusion de ce que la variation totale de hauteur de ceux-là est moindre que la variation totale de hauteur de ceux-ci.) Ainsi pour déterminer l'heure par la hauteur d'un astre, c'est quelqu'un de ceux dont la déclinaison est moindre que la hauteur du pole, & du côté du pole élevé, qu'il faut observer préféablement à ceux d'une condition différente, &c.

Le détail des propositions où je viens d'entrer touchant les changemens divers de la hauteur, & de l'angle azymuthal des astres, ne regarde pas seulement l'usage qu'on peut faire de ces élémens, il tend encore à montrer en quelles circonstances les variations des autres élémens propres à donner l'heure, & la hauteur du pole, sont moindres ou plus grandes: mais avant que de passer à cette exposition, je m'arrête pour confirmer par le calcul, plusieurs des propositions précédentes.

Nous avons par la premiere formule, $rrh \pm rsx = cyu$,
C c c ij

& en prenant la petite variation, la hauteur du pôle ainsi que la déclinaison de l'astre étant supposées précises, $rrdh = cydu$. Donc en nommant dH la petite variation instantanée de la hauteur (d'où résulte $dh = \frac{kdH}{r}$), & dE le petit arc de l'équateur qui mesure la variation de l'angle horaire correspondante à dH , (d'où résulte $du = \frac{idE}{r}$), on a $rrkdH = cyt dE$.

Donc 1°. dH est zéro lorsque t est zéro, c'est-à-dire, lorsque l'astre passe au méridien.

2°. dH est un *maximum*, lorsque sa différence ddH est égale à zéro. Or, dH étant $= \frac{cyt}{rrk} dE$, $ddH = (kdt - tdk) \frac{cy}{rrkk} dE$ lorsque dE est constante. Faisant donc $kdt - tdk = 0$, substituant $\frac{hdH}{r}$ à dk , & $\frac{udE}{r}$ à dt , ce qui donne $kudE - htdH = 0$, ou bien $rrkku - chtt y = 0$, parce que $dH = \frac{cyt}{rrk} dE$; mettant ensuite $rr - hh$ pour kk , & $rr - uu$ pour tt , multipliant tout par cy , puis mettant pour cyu sa valeur $rrh - rsx$, &c. on trouve enfin $hhsx - rhxx - rhss + rrsx = 0$. Or cette équation est divisible par ces deux-ci : $hs - rx = 0$, $hx - rs = 0$. Nous avons déjà vu la deuxième, elle indique la partie du cours d'un astre, dont la déclinaison excède la hauteur du pôle, où cet astre est à sa plus grande digression du méridien : la première marque la hauteur d'un astre à son passage au premier vertical ; car en faisant $n = 0$, dans la deuxième formule du premier Lemme, qui est $rrx + nck = rsh$, l'on trouve aussi $rx = hs$.

3°. On peut découvrir en général, indépendamment du calcul de l'article précédent, que plus un astre est

Éloigné du méridien par son azymuth, plus la variation instantanée de sa hauteur est considérable. Il suffit pour cela de substituer à yt , dans l'équation $rrkdH = cytdE$, la valeur mk , prise de la cinquième formule du premier Lemme; car on aura $dH = \frac{cm}{rr} dE$: & il est visible que plus m , sinus de l'angle azymuthal, sera grand, plus aussi le sera la variation dH . On voit d'ailleurs par la même expression, que la plus grande variation dH est moindre que dE , lorsque la sphere est oblique, dans la proportion du cosinus de la hauteur du pole au sinus total.

Reprenons la première formule, & supposons maintenant de l'erreur tant sur la hauteur de l'astre, que sur celle du pole, ce qui rend h, s, c, u , variables, pendant que x, y , demeurent constantes; nous aurons $rrdh - rxds = cydu + yudc$, & (mettant pour les différences du sinus & du cosinus de la hauteur du pole le petit arc du méridien $dL = \pm \frac{rds}{c} = \pm \frac{rdc}{s}$ &c.) $cytdE = cmkdE = rrkdH \mp rxc dL \pm syudL$; & (mettant pour syu la valeur $\frac{rrhs - rxss}{c}$, tirée de la première formule, puis rx la valeur $\frac{rsh \mp nck}{r}$, tirée de la deuxième formule, ce qui rend 1°. $syu = \frac{rhs(rr - ss) \pm nckss}{rc} = \frac{rhsc \pm nkss}{r}$, 2°. $rx c = \frac{rhsc \mp nkcc}{r}$) ; $rcmk dE = r^3 kdH \mp nkdL$ ($\pm cc \pm ss$), ou $cmdE = rrdH \mp rndL$.

Donc 1°. si $m = r$, ce qui rend $n = 0$, c'est-à-dire, si l'on a pris la hauteur de l'astre à son passage au premier vertical, l'erreur dE qui se trouve dans la détermination de l'angle horaire, est la plus petite qu'il est possible de commettre en évitant le hasard; & l'erreur sur la hauteur du pole est sans conséquence pour cette détermination,

puisque l'on a $dE = \frac{r}{c} dH$.* (Cependant cette moindre erreur qui résulte sur l'angle horaire de celle qu'on a commise sur la hauteur de l'astre, est plus grande que celle-ci, lorsque la sphere est oblique, ainsi que je l'ai déjà dit, conformément au principe général.) Et si l'astre est fort voisin du premier vertical lorsqu'on prend sa hauteur, ce qui rend n fort petit, l'erreur sur la hauteur du pole est de petite conséquence dans la détermination de l'angle horaire.

Donc 2°. lorsqu'on peut observer la hauteur d'un astre à son passage au premier vertical, ou lorsqu'il est fort près de ce cercle; & que l'on connoît d'ailleurs à peu près la hauteur du pole, ne fût-ce que par l'estime pratiquée à la mer, une seule observation suffit pour la détermination de l'heure, & l'on peut se servir du Probleme V. ci-dessus. Et si l'on étoit dans le cas de ne pas connoître la hauteur du pole, ou de ne la connoître que très-grossièrement, & qu'on voulût découvrir l'heure, sans déterminer plus précisément cette hauteur, il ne faut pas craindre de faire les deux observations des hauteurs d'un ou de deux astres, lesquelles conviennent à ce cas, selon le Probleme second, de faire, dis-je, ces deux observations dans les circonstances où elles donneroient le plus mal la hauteur du pole, puisque le défaut de ces observations à l'égard de la hauteur du pole, est alors indifférent à la détermination de l'heure. Bien loin même d'éviter ces circonstances, ce sont celles qu'il faut préférer & joindre ensemble; je veux dire, qu'il est à propos pour la détermination de

* Je dis en évitant le hasard, car absolument parlant, dE peut être moindre que $\frac{r}{c} dH$, & peut même être zéro, lorsque les termes $rrdH$ & $rndL$ ont des signes contraires. Mais c'est un hasard que l'on auroit tort de tenter, en prenant volontairement un astre à quelque distance du premier vertical, puisque l'on s'exposeroit également par-là, au danger d'avoir les deux termes de la valeur de dE affectés de signes semblables.

l'heure seule, dans le cas du Probleme second, d'observer deux astres les plus voisins du premier vertical, soit de même côté, soit de différens côtés du méridien; car l'erreur dE qui se trouvera dans la détermination de l'heure en suivant cette pratique, pourra être zéro, si les deux erreurs dH, dH' , sont en sens contraires, elle sera au plus égale à la moitié de $\frac{r}{c} dH + \frac{r}{c} dH'$, posé que les deux astres soient précisément au premier vertical, & communément $\frac{c}{r} dE$ sera environ la moitié de la plus grande erreur dH , à laquelle on est sujet en prenant la hauteur d'un astre, erreur que M. Bouguer, déjà cité sur ce point, estime de 15 minutes de degré.

Par la raison des contraires, on doit dire (on le sçait même assez sans cela, & il est inutile de le prouver directement par le calcul) que pour trouver seulement la hauteur du pole dans le cas du Probleme second, il faut observer les deux hauteurs lorsque les deux astres sont le plus voisins du méridien, circonstances qui sont les plus défavorables pour la détermination de l'heure. Cette remarque paroît peut-être superflue: mais je la fais moins pour elle-même, que pour fortifier l'induction que je tire de la précédente, en faveur de cette maxime générale, sçavoir que *soit qu'on cherche seulement la hauteur du pole, soit qu'on cherche seulement l'heure, & par quelques élémens qu'on veuille chercher l'une de ces choses, dans les Problemes du premier & du troisieme Chapitre de la premiere Partie, il faut toujours choisir les deux circonstances les plus favorables, en particulier à l'invention de la chose désirée, quoiqu'elles soient les plus défavorables à la détermination qu'on pourroit faire de l'autre chose, concurremment avec celle-là.* Si on veut trouver seulement l'heure, par exemple, par l'observation des passages de deux couples d'astres à deux ver-

ticaux, ce qui est le cas du Probleme XI, Probleme qui fournit concurremment la hauteur du pole; on peut, & il est même à propos, de préférer les deux circonstances qui donneroient le plus mal cette hauteur, & *vice versa*, &c. C'est des qualités de cet élément employé au Probl. XI^e, & de celui qui sert au Probleme suivant, qu'il me reste à parler.

Observer deux astres à leur passage à un même vertical, c'est les saisir lorsque la différence de leurs angles azymuthaux est zéro, ou à peu près, ou bien lorsque l'angle du grand cercle ENE'/F , qui passe par ces astres avec le vertical MZ de l'un des deux est aussi zéro, ou à peu près, *Fig. 25, 27, &c.* Observer deux astres à leur passage à un même almicantharath, c'est les saisir lorsque leur différence de hauteur est nulle ou à peu près, ou bien lorsque l'angle du grand cercle ENE'/F , qui passe par ces astres avec le vertical μZN , qui en est équidistant, est droit ou à peu près, *Fig. 26, 28.* La différence des angles azymuthaux de deux astres, & la différence de leurs hauteurs, ou bien les angles du grand cercle sur lequel sont situés deux astres avec certains verticaux, sont donc les élémens de la variation, desquels il s'agit de déterminer l'état vers le tems où ces élémens servent à nos Problemes.

Quant à la différence des hauteurs de deux astres, il est manifeste 1^o, que sa variation est nulle lorsque les hauteurs croissent ou décroissent ensemble, & qu'elles reçoivent un changement égal; & que cette variation est petite, lorsque les hauteurs reçoivent des changemens presque égaux. Ainsi, comme nous avons vu que les changemens de hauteur de deux astres également éloignés du premier vertical par leurs azymuths sont égaux, & que ces changemens sont d'ailleurs en même sens, lorsque les deux astres sont de même part du méridien, il s'ensuit que

la variation de l'élément en question est nulle; ou peu considérable, lorsque le vertical μZN , qui est équidistant des deux astres E, E' , Fig. 26, 28, &c. & perpendiculaire, ou à peu près perpendiculaire au grand cercle $ENE'F$, sur lequel sont ces astres, n'est pas différent du premier vertical, ou en est peu éloigné.

2°. Il n'y a pour certains astres qu'un tems très-court, où la variation $dH - dH'$ de la différence de leur hauteur puisse être nulle sensiblement. Ce tems est assez long pour d'autres astres : un peu avant ou après ces tems, la variation instantanée $dH - dH'$ de deux des premiers est plus grande, que la variation pareille de deux des seconds, quoique la variation totale $H - H'$ dont ceux-là sont capables, soit moindre que la variation totale de ceux-ci, en sorte que le rapport de la variation instantanée à la variation totale, est bien plus grand alors pour ceux-là que pour ceux-ci; & les astres qui sont fort voisins du 1^{er} vertical, sont ceux de la première condition, & ceux qui sont fort voisins du méridien sont ceux de la seconde; car il résulte de ce qui a été dit ci-dessus, que la variation dH va en croissant pour les astres qui sont situés du côté du premier vertical, où est le pôle élevé, lorsqu'ils s'approchent de ce cercle, & la variation dH' va toujours en diminuant pour les astres qui sont de l'autre côté du premier vertical : ainsi avant ou après l'instant où dH est précisément égale à dH' , $dH - dH'$ est d'autant moins petite que chacune de ces quantités a une plus grande variation ddH, ddH' ; & c'est ce qui arrive lorsque les astres sont voisins du premier vertical : au contraire $dH - dH'$ est d'autant plus petite, que chacune de ces quantités a une plus petite variation, & c'est ce qui arrive lorsque les astres sont voisins du méridien, &c.

3°. Il est encore visible que si les deux astres situés à

peu près dans le même almicantarath, étoient de même part du premier vertical, la variation $dH - dH'$ de leur différence de hauteur, quand même elle se trouveroit petite, * ne feroit pas la plus petite dont cet élément est susceptible, & que le tems de la rencontre supposée de ces astres à un même almicantarath, est assez éloigné du tems où leur variation $dH - dH'$ est effectivement la plus petite.

Il résulte de tout cela, & du principe posé ci-dessus, que ce sont deux astres situés de différens côtés du premier vertical, de même part du méridien, & les plus proches qu'il est possible de ce dernier cercle, qu'il faut choisir pour découvrir le plus sûrement la hauteur du pôle, par l'observation du passage de ces astres à un même almicantarath.

On seroit parvenu à la même conclusion, en considérant la variation de l'angle du grand cercle $ENE'F$, sur lequel deux astres sont placés, & du vertical $Z\mu N$, équidistant de ces astres, *Fig. 26, 28, &c.* car la variation de cet élément est d'autant plus petite, que les points E, E' , varient moins en hauteur, & qu'ils sont plus éloignés du point mitoyen N , &c.

D'un autre côté, la variation $dH - dH'$ de la différence de hauteur de deux astres, ne sçauroit être plus grande que quand l'une des hauteurs croît pendant que l'autre décroît; & quand chacune de ces quantités dH & dH' est la plus grande qu'il est possible. Ainsi pour déterminer le plus sûrement l'heure, par l'observation de deux astres dans un même almicantarath, il faut en choisir deux qui soient de différens côtés du méridien, & le plus voisins qu'il se pourra du premier vertical: mais cela ne suffit pas, il faut encore que ces astres soient de même

* (C'est ce qui auroit lieu, si les astres étoient fort voisins.)

part du premier vertical, plutôt que de différens côtés de ce cercle, parce que la variation $dH - dH'$ a un plus grand rapport à la variation totale $H - H'$ dans le premier cas que dans le second. Il est donc avantageux pour la détermination de l'heure, par l'élément dont il s'agit, que le vertical μZN , qui est équidistant des deux astres, & perpendiculaire ou à peu près, au grand cercle $ENE'F$ où ils sont, soit co-incident avec le méridien, ou en soit peu éloigné. Et c'est aussi ce que demande l'opposition d'entre la détermination de la hauteur du pole & celle de l'heure, puisque nous avons vû qu'il convenoit à celle-là, que le cercle μZN fût co-incident avec le premier vertical, ou en fût peu éloigné.

Cette proposition que je viens d'avancer touchant la détermination de l'heure, sçavoir qu'il est à propos que les deux astres observés dans un même almicantharath, soient de même côté plutôt que de différens côtés du premier vertical, peut être confirmée par la considération de la variation de l'angle du grand cercle $ENE'F$, où sont les astres avec le vertical μZN , équidistant de ces astres: car cette variation est d'autant plus grande, le reste étant égal, que les points E, E' , sont moins éloignés du point mitoyen N . Or, en supposant deux astres E, E' , situés de divers côtés du méridien, & de même part du 1^{er} vertical, & un troisieme astre E'' d'autre part de ce cercle, & à la même distance qu'en est E' , ce qui rend égales les variations dH', dH'' des hauteurs des astres E', E'' ; il est évident que les astres E, E' , sont moins éloignés de leur point mitoyen, que les astres E', E'' ne le sont du leur; donc, &c. Mais si les astres sont de même côté du premier vertical, & peu élevés, plus ils seront éloignés l'un de l'autre, & voisins par conséquent du premier vertical, plus ils seront propres, comme je l'ai déjà dit, à la déter-

mination de l'heure, parce que la variation de l'angle des cercles μNZ , $ENE'F$ augmentera plus par le plus grand changement des points E , E' en hauteur, qu'elle ne diminuera par le plus grand éloignement de ces points.

Il suit de la même considération, que si l'on n'est pas exposé à une plus grande erreur, en croyant observer deux astres dans un même almicantarath lorsque ces astres sont élevés, que lorsqu'ils sont bas; il vaudra mieux choisir des astres qui soient dans le premier cas, que d'en prendre qui soient dans le second, le reste étant égal; car plus les astres sont élevés, plus ils sont voisins. Mais il ne faut pas abuser de cette considération, & vouloir pousser l'avantage dont il s'agit, jusqu'à prendre des astres très-élevés, & par conséquent très-voisins, parce que le premier vertical n'étant pas exactement connu sur mer, sur-tout avant qu'on sçache l'heure, on s'exposeroit par-là à l'inconvénient que ces astres fussent trop écartés de ce grand cercle par leur azymuth, & que la variation de leur hauteur fût par conséquent alors trop petite, &c.

A l'égard de la variation instantanée de la différence des angles azymuthaux de deux astres, différence présumée $= 0$, lorsqu'on croit saisir ces astres à leur passage par un même vertical, cette variation est à son plus haut point de grandeur, ou en est voisine, 1°. Dans le cas où les angles azymuthaux changent en sens différens, lorsque leurs changemens sont les plus grands, ou peu s'en faut. 2°. Dans le cas où ces angles changent en même sens, lorsque l'un de ces angles est dans son état de plus grand changement, ou en approche, & que l'autre est un de ceux qui changent le moins parmi ceux qui peuvent être combinés avec celui-là. Or c'est ce qui arrive lorsque l'astre supérieur est fort près du zénith & du méridien, & que l'astre inférieur est fort près de l'horison, ainsi que du méridien.

Le premier cas a lieu, lorsque les deux astres sont du côté du premier vertical, où est le pôle élevé; & la circonférence dont il s'agit s'y trouve en effet: car l'astre supérieur étant au-dessus du pôle, est mû d'Orient en Occident; & d'ailleurs plus il est près du zénith, plus son angle azymuthal change rapidement; & l'astre inférieur étant plus bas que le pôle, revient d'Occident en Orient au regard de l'horison, & d'ailleurs, plus il est près tant du méridien que de l'horison, plus le changement de son angle azymuthal est grand. La liaison de la proximité du méridien avec ce plus grand changement, est assez évidente par ce qui a été dit ci-dessus. Pour l'autre point, sçavoir que plus un astre situé au-dessous du pôle & dans le méridien ou auprès, est voisin de l'horison, plus le changement de son angle azymuthal est grand, je le prouve, pour abréger, par le calcul. Nous avons $mk = yt$, par la cinquième formule de M. de Maupertuis. Faisant donc varier m & t , qui sont les sinus de l'angle azymuthal & de l'angle horaire, pendant que k & y , qui sont les cosinus de la hauteur & de la déclinaison de l'astre, demeurent constans, nous avons $kdm = ydt$, ou $dm = \frac{y}{k} dt$. Et lorsque l'astre est fort près du méridien, ce qui rend les sinus m & t fort petits, leurs variations dm , dt , sont à peu près les mêmes que celles des angles auxquels appartiennent ces sinus: la variation instantanée de l'angle azymuthal est donc proportionnelle à $\frac{y}{k}$ dans cette circonstance. Or, je dis que cette fraction est d'autant plus grande, que l'astre est plus bas; car le cosinus y de sa déclinaison en est d'autant plus grand, & quoique k soit aussi plus grand que si l'astre étoit moins bas, l'augmentation que reçoit y est plus grande que celle de k ; donc, &c.

Le second cas a lieu, lorsque les deux astres sont du côté du premier vertical où n'est pas le pôle élevé, & la circonstance marquée ci-devant s'y trouve aussi, car les deux astres sont mûs en même sens, & l'angle azymuthal de celui qui est supérieur & voisin du zénith, change beaucoup: mais celui de l'astre inférieur change d'autant moins, qu'il est plus près de l'horison, & qu'il décline plus par conséquent de l'équateur, ce qui rend le cosinus y de sa déclinaison d'autant plus petit; car cet astre étant voisin du méridien, la variation de son angle azymuthal est, comme nous venons de le voir, proportionnelle à $\frac{y}{k}$. Or cette fraction est d'autant moindre, que son numérateur y est plus petit, & son dénominateur k plus grand. Il est vrai que l'astre inférieur étant supposé voisin du méridien, cette partie de son cours est celle où son angle azymuthal reçoit le plus grand changement: mais cela n'empêche pas que la variation instantanée de la différence des angles azymuthaux des deux astres situés de cette manière, ne soit plus grande que s'ils étoient dans ou auprès d'un azymuth éloigné du méridien, parce que le changement de l'angle azymuthal de l'astre supérieur, est beaucoup plus grand dans la première circonstance que dans l'autre.

Il suit de-là, & du principe exposé ci-devant, que pour déterminer le plus sûrement l'heure par l'observation du passage de deux astres par un même vertical, il faut 1°, que ce vertical MZ , où on croit voir les deux astres, *Fig. 25, 27, &c.* soit le plus près qu'il est possible du méridien (de même que doit être situé, comme on l'a vu, le vertical μZN pour la même détermination, lorsqu'on observe deux astres dans un même almicantharath); & cette position du vertical MZ auprès du méridien, se-

roit au contraire très-défavorable à l'invention de la hauteur du pôle. Il faut 2° , pour la détermination de l'heure par le moyen dont il s'agit, que l'un des astres soit fort élevé, & l'autre fort bas. Je parlerai encore du même sujet dans le Chapitre suivant.

D'un autre côté, la variation instantanée de la différence des angles azymuthaux de deux astres, est dans l'état de la plus grande petitesse, ou voisine de cet état, lorsque ces angles varient en même sens & également, ou presque également, & le moins qu'il est possible; & c'est ce qui se rencontre, lorsque ces astres sont de même part du méridien, & que le vertical où on croit les voir est co-incident avec le premier vertical, ou en est peu éloigné. Cette position des deux astres est donc la plus avantageuse pour l'invention de la hauteur du pôle, & la plus défavorable pour la détermination de l'heure. Au reste, il faut encore, pour obtenir le plus sûrement la hauteur du pôle par ce moyen, que l'un des astres soit fort élevé, & l'autre fort bas : la raison en est, que la variation instantanée de la différence des angles azymuthaux de deux astres ainsi disposés, a un plus petit rapport à la variation totale de cet élément, que si les deux astres étoient à des hauteurs moins différentes : car deux astres situés en certain moment au premier vertical, l'un fort élevé & l'autre fort bas, seront dans quelque autre partie de leurs cours, en des azymuths bien plus éloignés, que ne seront deux astres qui se seront pareillement rencontrés au premier vertical, mais qui sont plus voisins que ceux-là, &c.

Ce que je viens de dire sur l'état de la variation instantanée de l'angle compris entre les azymuths de deux astres, convient aux cas où cet angle est réputé nul. A l'é-

gard de ceux où cet angle est supposé réel, & doit même avoir quelque grandeur (tels sont les cas énoncés dans les Probl. XV & XVI.), je me borne à quelques exemples sur l'état de la variation dont il s'agit, parce que le détail de toutes les rencontres seroit trop long, & peut-être ennuyeux : d'ailleurs il ne fera pas difficile de le suppléer, à celui qui aura bien compris ce qui précède.

Au Probleme XVI, on fait usage de l'angle des azymuths de deux astres, situés sur un même almicantharath. Si donc les deux astres sont assez près du méridien, & de même part de ce cercle, en sorte que le vertical μZN , équidistant des deux astres, soit voisin du premier vertical (position avantageuse pour l'invention de la hauteur du pôle), & si d'ailleurs les deux astres sont peu élevés, & moins que le pôle, l'angle azymuthal de l'un croîtra, & celui de l'autre décroîtra, & les changemens de ces angles seront presque égaux : ainsi la variation de l'angle des azymuths de ces astres sera petite, & désavantageuse par conséquent pour l'invention de l'heure : mais si les astres sont élevés, & plus élevés que le pôle, en sorte que celui qui est du côté du pôle, soit au-dessus du point de la plus grande digression du méridien, les angles azymuthaux des deux astres changeront en même sens, & presque également : ainsi la variation instantanée de l'angle de leurs azymuths sera grande, & pourra même être beaucoup plus grande que celle de l'angle horaire. Cette situation des astres seroit donc assez avantageuse pour l'invention de l'heure, si l'angle de leurs azymuths pouvoit être pris avec peu d'erreur : mais plus les astres sont élevés, & plus l'erreur à laquelle on est exposé en prenant cet angle doit être grande, & je ne sçais si elle ne pourroit pas monter à un degré trop considérable. Il n'y a donc peut-être pas

pas de position des astres qui soit fort favorable en effet à la détermination de l'heure, dans le cas où le vertical μZN est voisin du premier vertical.

Que si on suppose que les deux astres qui ont même hauteur sont fort proches du premier vertical, & de même part de ce cercle, en sorte que le vertical μZN , équidistant des deux astres, soit voisin du méridien (position avantageuse pour l'invention de l'heure), on appercevra que l'observation de l'angle des azymuths de ces astres ne seroit pas bien favorable pour la détermination de la hauteur polaire, si les astres étoient bas; & s'ils étoient élevés, l'observation de cet angle seroit peut-être sujette à une trop grande erreur, pour être utile à la même détermination.

Au Probleme XV, le vertical où sont deux astres, peut se trouver situé très-favorablement pour donner l'heure, ou pour donner la hauteur du pole; mais l'observation de l'angle de ce vertical avec celui du troisième astre, ne seroit assez avantageuse ni pour donner la hauteur du pole dans le premier cas, ni pour donner l'heure dans le second, si le troisième astre étoit fort bas, quand bien l'angle dont il s'agit seroit fort grand dans le second cas, &c. Que si le troisième astre étoit fort élevé, cet angle pourroit être tel, que s'il étoit observé sans trop d'erreur, on auroit de l'avantage pour trouver l'heure dans le second cas (& alors il faudroit que cet angle fût de 90 degrés, ou approchant), ou pour trouver la hauteur polaire dans le premier: mais l'observation supposée seroit peut-être sujette à un défaut trop grand en soi, pour que sa conséquence pût être légère. Les Probl. XV & XVI ne sont donc peut-être propres dans la pratique, qu'à donner l'une ou l'autre de ces choses, la hauteur du pole, ou l'heure, selon la rencontre.

Au Probleme XVII, on fait usage de l'angle des azymuths de deux astres, & de la hauteur de l'un d'entre eux. Or, si l'on ne désire qu'une de ces choses, l'heure & la hauteur du pole, il est à propos que l'angle dont il s'agit, approche de 90° , plutôt que de s'en éloigner. Si, par exemple, c'est l'heure seulement que l'on veut déterminer, il faut déjà, comme on l'a vu, que l'astre dont la hauteur sera observée, soit voisin du premier vertical, & il est encore à propos que l'autre astre soit auprès du méridien, parce que la variation instantanée de l'angle de leurs azymuths en sera plus grande, puisque le premier astre est vers la partie de son cours, où le changement de son angle azymuthal est le plus petit, & que l'autre sera vers la partie de son cours, où le changement de son angle azymuthal est le plus grand.

Mais si l'on souhaite que l'une des observations du Probleme XVII soit avantageuse pour la détermination de l'une des choses dont il s'agit, & que l'autre observation le soit pour celle de l'autre chose, l'angle des azymuths des deux astres doit être au moins fort petit, s'il ne peut être nul; d'ailleurs l'un des astres doit être assez élevé, & l'autre fort bas. Si l'astre, par exemple, dont la hauteur sera observée, est voisin du méridien, ce qui est avantageux pour déterminer la hauteur polaire, il est clair qu'afin que l'observation de l'angle des azymuths des astres soit favorable pour la détermination de l'heure, il faut 1^o que l'autre astre soit pareillement voisin du méridien, & que les hauteurs des astres soient très-différentes, parce que la variation instantanée de l'angle de leurs azymuths en sera d'autant plus grande, ces azymuths avançant dans ce cas en sens contraires, & chacun avec une rapidité approchante de la plus grande qu'il puisse avoir. 2^o. Les astres étant supposés de même part du premier

vertical, il est à propos, le reste étant égal, qu'ils soient aussi de même part du méridien, parce que la variation instantanée de l'angle de leurs azymuths aura un plus grand rapport à la variation totale de cet élément, que si les deux astres étoient de divers côtés du méridien; il faut donc que l'angle des azymuths des astres soit fort petit dans l'exemple proposé, & le plus avantageux seroit qu'il fût nul. Pareillement si l'astre dont la hauteur sera observée est voisin du premier vertical, ce qui est avantageux pour l'invention de l'heure, il faut que l'autre astre soit voisin aussi du même cercle, afin que l'observation de l'angle des azymuths des astres soit favorable pour l'invention de la hauteur du pôle, parce que la variation instantanée de cet élément sera fort petite, les azymuths des astres avançant dans ce cas en même sens, & avec le plus de lenteur, ou à-peu-près, qu'il se puisse, &c. Donc encore dans cet exemple, l'angle des azymuths des astres doit être fort petit, &c.

Jusqu'ici j'ai exposé les états de la variation instantanée des divers élémens employés dans les Problemes, touchant l'heure & la hauteur du pôle, & j'ai fait en même tems l'application de mon Principe, au cas où l'on demande seulement l'une ou l'autre de ces choses, & où on la cherche soit par une, soit par deux observations. Il s'agit maintenant de statuer sur le cas où l'on demande conjointement l'heure & la hauteur du pôle, ce qui requiert nécessairement la combinaison de deux observations; & je dis, 1°. Qu'il faut faire l'une des observations dans la rencontre la plus favorable à l'invention de l'heure, & l'autre observation dans la rencontre la plus favorable à l'invention de la hauteur du pôle, nonobstant que la première rencontre ne soit pas propre à donner la hauteur du pôle, & que la deuxième ne soit pas propre non

plus à donner l'heure; car ces défauts respectifs des observations deviennent indifférens, dès que chacune de ces observations est avantageuse pour une des choses demandées, puisqu'il n'est pas nécessaire de bien connoître la hauteur du pole, pour obtenir l'heure aussi exactement qu'il se peut, ni de bien connoître l'heure, pour obtenir pareillement la hauteur du pole avec la justesse possible.

Par exemple, si c'est par le passage de deux couples d'astres à deux verticaux, que l'on veuille déterminer l'heure & la hauteur du pole, ce qui est le sujet du Probleme XI, il faut que l'un des verticaux soit co-incident, s'il se peut, avec le méridien, ou en soit fort voisin, & que l'autre soit de même co-incident avec le premier vertical, ou fort près de ce cercle. Si c'est par les hauteurs de deux astres que l'on cherche les deux choses dont il s'agit, ce qui est le sujet du Probleme second, il faut que l'un des astres soit sur le premier vertical, ou auprès, & que l'autre soit au méridien, ou en soit proche, &c.

2°. Si les deux rencontres ou circonstances qui se présentent, pour les deux observations dont on a besoin, ne sont pas les plus favorables de toutes, chacune à chaque chose demandée, il faut, le reste étant égal, que ces circonstances aient entre elles un certain rapport égal, ou approchant de celui qui se trouve entre les circonstances qui sont absolument les plus favorables de toutes. C'est ce qui va être expliqué par des exemples.

Au Probleme second, les deux rencontres les plus favorables absolument, tant à l'invention de l'heure, qu'à celle de la hauteur du pole, sont, comme je viens de le dire, que l'un des astres soit au méridien, & l'autre au premier vertical. Or il se trouve entre ces circonstances ce rapport, sçavoir que les azymuths des deux astres sont un

angle droit. Lors donc qu'il n'y aura ni sur le premier vertical, ni au méridien, des astres dont on puisse observer les hauteurs, il faudra, le reste étant égal, en choisir deux dans les parties du ciel adjacentes, dont les azymuths fassent un angle droit, ou approchant d'un droit, par préférence à ceux dont les azymuths feroient un angle plus différent d'un droit. Si, par exemple, il y a un astre E à côté du méridien, dans la partie orientale & méridionale du ciel, un second astre E' à côté du premier vertical, dans la partie Orientale & Septentrionale, enfin un troisieme astre E'' à même distance que l'astre E' du premier vertical, mais situé dans la plage Occidentale & Septentrionale, l'azymuth du premier astre, fait avec l'azymuth du second un angle plus approchant d'un droit, que n'est celui qu'il fait avec l'azymuth du dernier astre. C'est donc la hauteur de l'astre E' qu'il faut observer, & combiner avec celle de l'astre E , préféablement à celle de l'astre E'' .

Au Probleme XI, où l'on fait usage du passage de deux couples d'astres à deux verticaux, il faut, si ces verticaux sont autres que le méridien & le premier vertical, qu'ils fassent du moins un angle droit, ou approchant d'un droit. Au Probleme XIII, où l'on fait usage des passages d'une couple d'astres à un vertical, & d'une autre couple à un même almicantharath, il faut pareillement que le vertical ZN' , équidistant de ces derniers, fasse avec celui où passent les deux premiers, l'angle le plus approchant d'un droit.

Je fonde cette deuxieme regle en premier lieu, sur son analogie avec la regle précédente. Je pourrois l'établir en second lieu, en spécifiant, & en prouvant par le calcul l'avantage de la pratique proposée. Il consiste, cet avantage, lorsque les deux observations sont erronées,

d'un côté en ce que leurs erreurs quelconques ont des effets contraires à l'égard de l'une ou de l'autre des choses désirées ; c'est-à-dire , soit à l'égard de l'heure , soit à l'égard de la hauteur du pole , effets qui se compensent par conséquent jusqu'à un certain point , & peuvent se compenser parfaitement : d'un autre côté , en ce que les erreurs des observations ne tirent que médiocrement à conséquence , pour la chose à l'égard de laquelle elles sont conspirantes. Et dans le cas où une seule des observations pecheroit , le vice de cette observation partageroit son influence entre les deux choses désirées , de maniere que son effet en seroit moindre sur chacune. Mais si l'on s'écartoit de la regle dont il s'agit , les défauts des observations , ou le défaut seul de l'une d'elles , entraîneroit une erreur non-médiocre sur l'une des choses désirées , & d'ailleurs lorsque les deux observations pecheroient , leurs défauts pourroient ne pas produire des effets contraires à l'égard de l'autre chose.

L'avantage que j'attribue à la seconde regle , peut enfin être rendu sensible par la confection de quelques figures , & par des exemples , & c'est le parti que je prends. Je donnerai par la même voie , une nouvelle preuve de la premiere regle du cas dont il s'agit , & je retoucherai un point traité précédemment. Ces démonstrations serviront d'ailleurs , ou conduiront à deux choses ; sçavoir 1^o à enseigner au Navigateur un moyen facile de discerner à peu près le degré d'erreur auquel il est exposé dans la recherche de l'heure , ou de la hauteur du pole , ou de l'angle azymuthal d'un astre , en quelque occurrence qu'il se trouve. 2^o. A justifier ce que j'ai avancé touchant quelques utilités du planisphere proposé ci-devant.

Je prends le sujet du Probleme second pour exemple. Soit , *Fig.* 31 , 32 , 33 , 34 , *P* le pole ; *z* le vrai zénith ,

P Σ une partie du vrai méridien : soient $\epsilon \Sigma E$, & $\epsilon' \Sigma E'$, ou $\Sigma \epsilon' E'$ des portions des verticaux où sont réellement les astres E, E' , dont les hauteurs sont observées : soient $Z \epsilon$, $Z \epsilon'$, des arcs des cercles qui ont les points E, E' pour poles, & pour amplitudes les complémens des hauteurs observées, arcs dont l'intersection Z est différente du vrai zénith, lorsque les observations des hauteurs des astres péchent, soit par excès, soit par défaut, & est prise cependant pour le zénith. Les arcs $\Sigma \epsilon$, $\Sigma \epsilon'$, sont égaux aux petites quantités dH, dH' , dont on peut se tromper dans ces observations. Les arcs $Z \epsilon, Z \epsilon'$, ayant leurs poles dans les azymuths $\epsilon \Sigma E, \epsilon' \Sigma E'$, sont perpendiculaires à ces cercles : si l'on peut donc regarder les lignes qui composent le quadrilatere $Z \epsilon \Sigma \epsilon'$ rectangle en ϵ, ϵ' , comme droites ou presque droites, on aura l'angle $\epsilon Z \epsilon'$, égal ou à peu près égal au complément de l'angle $\epsilon \Sigma \epsilon'$ que font les deux verticaux où sont les astres : ainsi les lignes $\epsilon Z, \epsilon' Z$, ont à peu près la même inclinaison respective que les verticaux des astres ; & si ces verticaux comprennent un angle droit, *Fig. 31, 32, 33*, l'angle $\epsilon Z \epsilon'$ est droit, ou à peu près, & le quadrilatere $Z \epsilon \Sigma \epsilon'$ peut être pris pour un parallélogramme.

Supposons maintenant 1^o que l'un des astres est au méridien, & l'autre au premier vertical, conformément à la premiere regle, *Fig. 31*, & que l'erreur $\epsilon' \Sigma$ sur la hauteur du premier est de 10 minutes, & l'erreur $\epsilon \Sigma$ sur la hauteur du second, de 15 ; le zénith putatif Z fera, il est vrai, éloigné du véritable de 18 minutes & plus, mais d'un côté ce faux zénith Z sera seulement éloigné du méridien d'une quantité à peu près égale à $\epsilon \Sigma$, qui est l'erreur commise sur la hauteur de l'astre situé au premier vertical. L'angle $Z P \Sigma$ est l'erreur qui en résulte sur l'angle horaire, & il est aisé de reconnoître que cet angle est à

l'arc ϵz , à peu près comme le sinus total est au sinus de Pz , c'est-à-dire au cosinus de la hauteur du pôle. (C'est ce que nous avons déjà vu plus haut, en trouvant par le calcul $dE = \frac{r}{c} dH$.) D'un autre côté, le faux zénith fera seulement éloigné du premier vertical d'une quantité à peu près égale à $\epsilon'z$, en sorte que $PZ - Pz$, ou $Pz - PZ$, qui est l'erreur résultante sur la hauteur du pôle, fera égale seulement à l'erreur sur la hauteur de l'astre situé au méridien, c'est-à-dire, de dix minutes ou environ.

Enfin, les cercles ZE, ZE' , étant pris pour les azymuths des astres, les angles $ZEz, ZE'z$, seront les erreurs sur les angles azymuthaux. Remarquons en passant, que plus les astres seront bas, moins ces erreurs seront considérables, & que les hauteurs étant égales, on sera exposé à une moindre erreur sur l'angle azymuthal de l'astre situé au premier vertical, que sur l'angle de l'autre.

Supposons 2^o que les deux astres sont dans des azymuths également éloignés du méridien & du premier vertical, rencontre qui s'écarte de ce que requiert la première règle le plus qu'il se puisse, en remplissant la seconde. Supposons encore que les erreurs sur les observations des hauteurs de ces astres sont égales, & de 15 minutes chacune; le quadrilatère $Z\epsilon z\epsilon'$ sera un carré, & la distance du zénith putatif Z au vrai zénith, sera de plus de 21 minutes: mais dans le cas de la *Fig. 32*, le point Z se trouve sur le méridien, & l'erreur dans la position de ce point, tombe seulement sur la hauteur du pôle: & dans le cas de la *Fig. 33*, le point Z se trouve sur le premier vertical, ainsi on se trompe de l'angle ZPz sur l'heure, & comme PZ ne diffère pas sensiblement

blement de Pz en grandeur, il ne résulte pas d'erreur sur la hauteur du pôle. Dans le cas des *Fig. 32 & 33*, les deux astres sont de même part du méridien; il en seroit de même si les deux astres étoient de différens côtés de ce cercle, l'erreur dans la position de Z , pourroit n'influer que sur la détermination de l'heure, ou que sur celle de la hauteur du pôle, ainsi que je l'ai avancé. Quant à ce que j'ai dit que l'erreur résultante de celles des observations n'est que *médiocre*, je l'entends dans ce sens, que la distance des points Zz est moindre que la somme des erreurs des deux observations. On doit bien appercevoir maintenant, & sans que je le montre plus expressément, que la rencontre des *Fig. 32 & 33* est moins avantageuse que celle de la *Fig. 31*, requise par la première règle, pour le cas où l'on demande conjointement l'heure & la hauteur du pôle.

Si dans cette hypothèse des *Fig. 32, 33*, l'observation de la hauteur d'un des astres étoit exacte, celle, par exemple, de l'astre E , la ligne Zz tomberoit en $z's$, & le point Z en s' , en sorte que le zénith putatif seroit également éloigné du méridien, & du premier vertical, savoir des quantités $s'd$, & dz , moindres chacune que l'erreur $z's$, commise par excès, ou par défaut, sur la hauteur de l'astre E' , $z's$ étant de 15 minutes, $s'd = dz$, seroit d'environ 10 minutes & demie.

Supposons 30° , que les azymuths des deux astres font un angle très-différent d'un droit, & que ces azymuths, ou du moins l'un d'entre eux, sont beaucoup plus près du premier vertical que du méridien, *Fig. 34*. Cette rencontre approche de celle que recommande la règle que j'ai donnée, pour le cas où l'on désireroit avoir seulement l'heure, & elle est rejetée par les deux règles du cas où l'on chercheroit conjointement l'heure & la hauteur du

pole : aussi est-il visible, que le zénith putatif Z est fort éloigné du vrai zénith Σ , lorsque les erreurs des observations auxquelles sont égales les arcs $\epsilon \Sigma$, $\epsilon' \Sigma$, ont des influences contraires à l'égard de l'heure, & que cet éloignement des points Z , Σ , cause une erreur notable sur la détermination de la hauteur du pole, erreur qui est d'autant plus grande, le reste étant égal, que le point Z est plus voisin du méridien.

Pour supplément à ce que j'ai dit sur le cas où l'on chercheroit seulement l'heure par les observations des hauteurs de deux astres, j'ajoute que quand les branches d'azymuth où ils se trouvent, font un angle très-aigu, & que l'un des deux est à une hauteur médiocre, il faut que l'autre soit à une hauteur différente. La raison de cette regle est plus aisée à appercevoir par la confection d'une figure qu'autrement. Elle dépend, cette raison, de ce que les arcs $Z \epsilon$, $Z \epsilon'$, des cercles qui ont les deux astres pour poles, & les complémens de leurs hauteurs pour amplitudes, ont leurs concavités tournées en même sens dans la première supposition, &c. Dans le cas de la même recherche, & lorsque les branches d'azymuth où sont les astres, font aussi un angle très-aigu, ou bien en font un fort obtus, il faut encore que les astres ne soient pas tous deux très-bas, s'ils sont à quelque distance du premier vertical, &c. En un mot, il faut communément que les deux astres par les hauteurs desquels on prétend déterminer l'heure sans la hauteur du pole, & indépendamment de la connoissance qu'on peut avoir de cette hauteur par estime, ne soient pas bien voisins (le Lecteur suppléera aisément les raisons de cette assertion). Et de-là il suit, que lorsqu'un seul astre se présente à l'Observateur, il faut qu'il y ait certain intervalle entre les momens où il prendra deux hauteurs de cet astre, afin qu'il puisse en déduire l'heure avec quelque justesse.

Je crois qu'on apperçoit déjà, par les *Fig. 31, 32, 34*, l'utilité que le Navigateur tireroit d'un planisphere, pour découvrir les limites de l'erreur, que les vices inévitables de ses observations peuvent jeter en certaines rencontres dans la recherche qu'il veut faire, soit de l'heure, soit de la hauteur du pôle, soit de l'angle azymuthal d'un astre. Et pour juger par-là si ses observations méritent ou non dans ces rencontres, qu'il prenne leur résultat par la voie du calcul; après avoir déterminé le point du zénith putatif *Z*, il n'auroit qu'à opérer ensuite sur des suppositions qui différassent de ses observations, autant que celles-ci peuvent s'écarter de la réalité: il formeroit ainsi une figure, dans laquelle le point du vrai zénith seroit enfermé, & il verroit jusqu'où ce point peut être éloigné pour le plus, soit du méridien, soit du premier vertical putatif, qui passent par *Z*. Le Navigateur n'auroit pas même absolument besoin de faire cette figure en entier, ni de la construire toujours avec une scrupuleuse précision.

Qu'il décrive, par exemple, dans le cas du *Probleme second*, des arcs $\sigma\sigma$, $s\sigma$, &c. *Fig. 35*, des cercles qui ont les deux astres pour pôles, & pour amplitudes respectives les complémens de leurs hauteurs observées, plus & moins les quantités dH , dH' , dont on peut se tromper dans ces observations: ces arcs composeront autour de *Z*, un quadrilatere $\sigma\sigma s\sigma$, dans lequel sera contenu le point du vrai zénith. Or comme le vertical de l'un ou de l'autre des astres, divise ce quadrilatere en deux portions qui sont à peu près égales & semblables, il n'est pas nécessaire de le former en entier, il suffit d'en faire une moitié, & même la partie de cette moitié où est la limite du plus grand écart où l'on puisse tomber à l'égard du méridien, ou du premier vertical. Il n'est pas nécessaire non plus, de chercher les centres propres des arcs $s\sigma$,

$\sigma\sigma$, &c. On peut opérer sur ceux qui ont servi pour la détermination du point Z , en changeant seulement l'ouverture du compas. On peut en un mot, prendre bien des licences, & faire cette espece d'opération très-promptement.

Voici un autre exemple. Si l'on est dans le cas du Probleme VII, où la hauteur du pole étant donnée, & deux astres étant réputés vûs au même vertical, on cherche l'heure. Soit, *Fig. 36*, $ENE'Z$ le grand cercle sur lequel ces deux astres sont situés; PZ le complément de la hauteur polaire donnée: le vrai zénith peut se trouver à quelque distance de part ou d'autre du grand cercle $ENE'Z$. Soient donc décrits des arcs $\sigma\sigma$, $\sigma\sigma$, de cercles paralleles à $ENE'Z$, & qui en soient autant éloignés, que l'on présume que ce grand cercle peut être écarté du vrai zénith: puis du centre P , soient décrits d'autres arcs $\sigma\sigma$, $\sigma\sigma$, de cercles qui aient pour amplitudes le complément de la hauteur polaire supposée, plus & moins la quantité dont on a pû se tromper dans l'observation, ou l'estime de cette hauteur, & l'on aura un quadrilatere $\sigma\sigma\sigma\sigma$, où le point du vrai zénith sera enfermé.

On doit remarquer maintenant, si on ne l'a fait déjà, que les rencontres que j'ai dit être avantageuses pour la recherche de l'heure & de la hauteur du pole, ont la plupart ce caractere, sçavoir que les lignes qui doivent être tirées sur le planisphere, pour la solution des Problemes touchant ces choses, se coupent dans ces rencontres perpendiculairement, ou à peu près. J'ai dit, par exemple, que quand on veut observer deux astres dans un même vertical, ce qui est supposé aux Probl. VII, XI, &c. il faut que l'un des astres soit très-élevé, & l'autre fort bas; c'est à-dire, que l'intervalle de ces astres approche de 90 degrés: & il est visible que cela étant, les deux arcs

de-cercle qu'il faut décrire pour trouver sur le planisphere le pole Q du grand cercle, sur lequel les deux astres sont situés, & pour avoir ainsi le moyen de tracer ce grand cercle, feront des angles approchans d'un droit.

J'ai dit pour le cas du Probl. VII, que le vertical où les deux astres sont observés, doit être fort voisin du méridien; & il est visible que cela étant, le cercle $Zi\zeta$, décrit autour du pole, *Fig. 25*, avec un rayon équivalent au complément de la hauteur donnée de ce point, coupera le vertical des astres sous un angle approchant d'un droit. J'ai dit pour le cas du Probl. XVII, où l'on suppose donné l'angle des azymuths de deux astres, avec la hauteur de l'un d'eux; que lorsqu'on cherche conjointement l'heure & la hauteur du pole, cet angle doit être fort petit: & l'on peut voir que cela étant, on tirera des lignes presque perpendiculaires dans l'opération graphique, par laquelle on déterminera la position de l'astre dont la hauteur n'est pas observée, &c.

Au contraire, les rencontres défavantageuses, & les plus défavantageuses, au moins à quelque égard, ont cette qualité que les lignes qui doivent être tracées pour la solution des Problemes dont il s'agit, sont inclinées l'une à l'autre, & fort inclinées.

Or, quand des lignes se coupent perpendiculairement, ou à peu près, leur point d'intersection est facile à discerner, & ce point seroit au contraire difficile à reconnoître, si les lignes qui se croisent, étoient fort inclinées respectivement.

Donc 1^o, lorsque les intersections des lignes tracées sur le planisphere pour la détermination de l'heure & de la hauteur du pole, seront difficiles à discerner, le Navigateur peut de cela seul conclure pour l'ordinaire, que la rencontre où il a fait son observation, ou ses observa-

tions, est défavorable au moins à quelque égard, en se servant même du calcul.

2°. Puisque les intersections des lignes tracées sur le planisphere, pour les Problèmes dont il s'agit, sont faciles à discerner dans les rencontres avantageuses, on doit en conclure que l'usage du planisphere est peu défectueux dans ces rencontres, & qu'il ne le feroit notablement, que dans celles qui doivent être rejetées. Cette conséquence est peut-être assez évidente, cependant pour ne rien négliger, je vais l'appliquer à un exemple.

Soient deux astres réputés vus dans un même vertical; quelque soit leur position, on fera, je l'avoue, exposé en opérant sur le planisphere, à mettre un peu à côté de leur vraie place, les arcs dont l'intersection doit indiquer le pôle du grand cercle qui passe par les astres, parce qu'on peut faire les rayons de ces arcs un peu trop grands ou trop petits. Or si les deux astres étoient fort voisins, on feroit d'ailleurs exposé à prendre, au lieu du vrai point d'intersection de ces arcs, bien ou mal placés, un autre point qui en feroit éloigné: ainsi on risqueroit de placer fort mal le pôle putatif du grand cercle des deux astres, & d'en décrire un autre qui en feroit fort écarté par quelques endroits, entre lesquels pourroit être la région du zénith. L'usage d'une opération graphique feroit donc, j'en conviens, défectueux dans cette rencontre où les astres sont voisins: mais aussi elle est défavorable, cette rencontre, puisqu'on y feroit exposé à réputer les astres dans un même vertical, en quelque moment où le grand cercle sur lequel ils sont situés, feroit fort écarté du zénith. Mais si l'un des astres est fort élevé, & l'autre fort bas, en sorte que leur intervalle approche de 90 degrés, on discernera très-bien le vrai point d'intersection des arcs tracés pour l'invention du pôle du grand cercle où sont

les deux astres : ainsi on ne risquera pas de se tromper notablement dans la fixation de ce pôle, & le cercle qu'on décrira par les deux astres, en conséquence de cette fixation ne pourra s'écarter que peu de ce grand cercle, où ils sont réellement, principalement vers la région du zénith. L'opération graphique ne sera donc que peu défectueuse en cette rencontre.

Au reste, je crois qu'on voit assez pourquoi j'ai usé de restriction dans la remarque précédente. Il y a en effet des rencontres avantageuses à quelque égard, quoique le vrai point d'intersection des lignes tracées sur le planisphere soit difficile à discerner en ces rencontres. Ainsi celle qui répond à la *Fig. 34*, est favorable d'un côté pour la détermination de l'heure, quoique défavorable d'ailleurs pour l'invention de la hauteur du pôle : & l'on peut voir encore que l'opération graphique a deux qualités différentes en cette rencontre, c'est-à-dire, qu'elle est peu défectueuse pour la détermination de l'heure, quoiqu'elle le soit beaucoup pour celle de la hauteur polaire : car la ligne qui joint les points *P*, *Z*, & qui est le méridien putatif, étant fort inclinée aux deux arcs *'Z*, *'Z*, il est aisé de reconnoître la vraie position de cette ligne, & l'on ne peut gueres s'en écarter, quoique le zénith putatif *Z* soit difficile à fixer, & que l'on puisse le placer notablement trop loin, ou trop près du pôle. Il en est de même pour tout autre cas favorable, où les lignes tracées sur le planisphere seroient fort inclinées ; & il est vrai généralement & absolument, que les opérations graphiques ont toute la précision dont ce genre est susceptible, & qu'elles sont par conséquent peu défectueuses, dans toutes les rencontres favorables à quelque détermination, & relativement à cette détermination.

Pour conclusion de ce long Chapitre, je vais donner

le résultat du calcul trigonométrique, à l'égard d'une hypothèse prise pour exemple, par un des premiers Membres d'une Compagnie très-sçavante. Cela servira à montrer de plus en plus, l'importance des regles que j'ai établies. J'ai rapporté au Chapitre second de la Partie précédente, que l'on a proposé dans les Mémoires de l'Académie des Sciences, un procédé pour l'invention de l'heure, de la hauteur du pôle, & de l'angle azymuthal. * Ce procédé me paroît très-bon, comme je l'ai déjà dit: mais qu'il me soit permis d'ajouter, que le cas particulier auquel on l'a appliqué, n'a pas été bien choisi.

On suppose que l'on a observé deux hauteurs du Soleil, à une heure d'intervalle seulement, la déclinaison de cet astre étant de $13^{\circ} 50'$ du côté du pôle élevé, & que l'une des hauteurs est de $36^{\circ} 53'$, & l'autre de $45^{\circ} 53'$. Les observations étant supposées parfaitement exactes, il en résulte que la hauteur du pôle est de $46^{\circ} 45'$; que l'angle horaire au moment de la premiere observation, est de $50^{\circ} 10' 4''$, 4 (ce qui réduit en tems, donne cette observation à 8 heures $39' 19'' 42'''$ du matin); que l'angle azymuthal du Soleil au moment de la même observation, est de $68^{\circ} 47'$, & au moment de la deuxieme observation, de $53^{\circ} 27' 22''$, en sorte que l'angle de l'azymuth du Soleil avec le premier vertical, est de $36^{\circ} 32' 44''$ en ce second moment, & que l'angle des deux azymuths du Soleil, est seulement de $15^{\circ} 19' 38''$.

Pour revenir à ce qui est ordinaire, supposons maintenant que les observations des deux hauteurs sont erronées. Il y a, je l'avoue des combinaisons d'erreur, dont la conséquence n'est pas considérable; tels sont les cas où ces observations pecheroient toutes deux en même sens, soit

* C'est dans un Mémoire intitulé : *Résolution d'une Question astronomique, utile à la Navigation*, Pag. 255. des Mém. de 1736.

par excès, soit par défaut. Supposons, par exemple, qu'elles sont trop foibles chacune de six minutes, c'est-à-dire, que la premiere hauteur est réputée de $36^{\circ} 47'$, dont le complément est $53^{\circ} 13'$, & la seconde de $45^{\circ} 47'$, dont le complément est $44^{\circ} 13'$. D'ailleurs, faisons abstraction du déplacement de l'Observateur, tant en longitude qu'en latitude, pendant l'intervalle des observations, &c. Cet intervalle étant d'une heure juste, l'arc de grand cercle EE' , compris entre les deux lieux du Soleil dans son parallele, est de $14^{\circ} 34'$, & l'angle PEE' de cet arc avec l'horaire du Soleil, est de $88^{\circ} 12'$, selon le mém. cité. On trouve donc pour l'angle putatif ZEE' de cet arc, avec l'azymuth du Soleil au moment de la premiere observation, $47^{\circ} 4' 46''$: ainsi l'angle putatif PEZ de cet azymuth du Soleil avec son cercle horaire, est de $41^{\circ} 7' 4''$, & on trouve pour l'angle horaire putatif EPZ en ce moment $50^{\circ} 18' 23''$, 45; (c'est environ $8' 19''$ d'excès sur le véritable, ou bien une erreur de $33'' 16'''$ de tems) & pour la hauteur putative du pole, $46^{\circ} 48' 22''$ (c'est $3' 22''$ d'excès sur la véritable), &c. Ces erreurs qui résultent de celles des observations sont, dis-je, légeres.

Mais il n'en seroit pas de même, si les observations des hauteurs péchoient l'une par excès, l'autre par défaut, ce qui est fort possible. Mettons seulement que l'une est trop foible, & l'autre trop forte de six minutes, ce qui n'est pas la moitié de toute l'erreur à laquelle on est exposé en mer, selon M. Bouguer, & supposons, par exemple, que c'est la premiere observation qui est foible, c'est-à-dire, qu'elle est de $36^{\circ} 47'$, dont le complément est $53^{\circ} 13'$, & que l'autre hauteur est réputée de $45^{\circ} 59'$, dont le complément est $44^{\circ} 1'$. On trouve pour l'angle putatif ZEE' de l'arc EE' , avec l'azymuth du Soleil au mo-

ment de la premiere observation $46^{\circ} 8'$ environ; ainsi l'angle putatif *PEZ* de cet azymuth du Soleil avec son cercle horaire, est de $42^{\circ} 4'$; & on trouve ensuite pour l'angle horaire putatif *EPZ*, au moment de la premiere observation, $50^{\circ} 40'$ (c'est près de $30'$ de degré, ou bien deux minutes d'heure d'excès sur le véritable); pour la hauteur putative du pole $46^{\circ} 4' 35''$ (c'est $40' 35''$ de différence par défaut d'avec la vraie); pour l'angle azymuthal putatif du Soleil au moment de la premiere observation, $69^{\circ} 41'$ (c'est 54 minutes d'excès sur le véritable); pour l'autre angle azymuthal, $54^{\circ} 34'$ (c'est $66' 38''$ d'excès sur le véritable); enfin pour l'angle des deux azymuths du Soleil $15^{\circ} 7'$, (c'est $12' 38''$ de différence par défaut du véritable: cette erreur est à peu près la même que la somme des deux erreurs commises sur les hauteurs. Quant aux erreurs sur les angles azymuthaux, je ne peux m'empêcher de remarquer en passant, qu'elles sont très considérables par rapport à celles qui les produisent, & qu'il est étonnant qu'on ait proposé un cas où l'on seroit exposé à de telles erreurs, surtout depuis l'édition du beau Mémoire de M. Bouguer, sur la méthode d'observer en mer la déclinaison de la Bouffole, qui est de 1731. Ce Sçavant prétend, Art. dernier de cette Piece, qu'en déterminant les endroits du ciel où doivent être les astres, lorsqu'on veut découvrir en mer la variation de la Bouffole, par une seule observation, il marque aussi assez les endroits qu'il faut préférer, lorsqu'on en emploie plusieurs. Et il ajoute cet avis, sçavoir, qu'on multiplie quelquefois mal-à-propos le nombre des observations, sans penser que c'est presque toujours *

* Ce mot, *presque toujours*, est peut-être excessif, à moins que l'Auteur ne parle d'observations faites en divers tems, car en multipliant les observations contemporaines, & les réunissant, la conséquence de leurs erreurs doit ordinairement être plus légère [Au reste, M. B. n'a peut-être pas marqué suffisamment, comme il l'avance, tous les endroits du ciel avantageux pour la détermination

multiplier les occasions de se tromper ; c'est-à-dire, comme je l'entens, sans penser qu'on peut les combiner d'une manière désavantageuse, & de grande conséquence. C'est justement ce qui est arrivé dans le Mémoire cité de 1736.)

Il en seroit à peu près de même, si on supposoit au contraire la première observation trop forte de six minutes, & la deuxième trop foible de la même quantité ; c'est-à-dire, celle-là de $36^{\circ} 59'$ (compl. $53^{\circ} 1'$), & celle-ci de $45^{\circ} 47'$ (compl. $44^{\circ} 13'$) : car on trouve dans ce cas, pour l'angle putatif, $ZEE' 47^{\circ} 59' 18''$, 16 ; ainsi l'angle putatif PEZ , vaut $40^{\circ} 12' 41''$, 84 : & l'on a pour l'angle horaire putatif au moment de la première observation, $49^{\circ} 38' 27''$, 5, angle différent du vrai d'environ $31' 37''$, ou de 2 minutes $6'' 28'''$ de tems par défaut ; & pour la hauteur putative du pôle, $47^{\circ} 24' 20''$, hauteur qui excède la vraie de $39' 40''$, &c.

Pour donner un bon exemple de détermination des trois choses proposées dans le Mémoire cité, il eût fallu combiner deux observations, l'une faite vers midi, & l'autre environ six heures $53' 40''$ du matin, ou 5 heures $6' 20''$ du soir, momens où le Soleil passe au premier vertical, & se trouve à $19^{\circ} 10'$ de hauteur, lorsque sa déclinaison est de $13^{\circ} 50'$, & la hauteur du pôle de $46^{\circ} 45'$, comme il a été supposé ci-dessus. Car quelque fût la

de l'angle azymuthal, dans le cas où l'on a besoin de deux observations ; ou du moins quelqu'un pourroit ne pas assez pénétrer cette conséquence de la doctrine, & se méprendre : car il est avantageux pour la détermination de l'angle azymuthal, par une seule observation de hauteur, que l'astre soit voisin du premier vertical ; ainsi quelqu'un pourroit penser qu'il est avantageux aussi pour la détermination de cet angle de combiner deux observations de hauteurs prises dans le voisinage du premier vertical, mais c'est tout le contraire ; la combinaison de ces observations seroit dangereuse, quoique chacune soit favorable en particulier ; c'est ce qu'on peut voir en prenant le résultat de la dernière hypothèse de ce Chapitre. Une bonne combinaison pour la recherche dont il s'agit, lorsqu'on a une observation de hauteur auprès du premier vertical, est d'y en joindre une prise auprès du méridien, &c.

combinaison des erreurs des deux observations, l'erreur qui en résulteroit sur l'angle horaire, ne feroit que d'environ $8' 46''$ de degré, ou de $35'' 4'''$ d'heure, l'observation du Soleil auprès du premier vertical, étant supposée seulement erronée de 6 minutes, comme ci-devant, &c.

Peut-être dira-t-on que l'intervalle des observations qui excède 5 heures dans cette dernière hypothèse, est trop considérable, & que non-seulement la déclinaison du Soleil varieroit sensiblement dans cet intervalle, mais que le vaisseau pourroit faire beaucoup de chemin, soit en longitude, soit en latitude, ce qui altere une ou plusieurs circonstances du Probleme, &c. (c'est apparemment par cette considération, que dans le mémoire cité on n'a mis qu'une heure d'intervalle entre les deux observations). Je réponds sur cela, 1°. Que je ne conseille pas absolument de combiner des observations faites en des momens éloignés, je ne le fais que pour le cas où il n'y a qu'un seul astre qui se présente à l'Observateur, & où il y a plusieurs choses à déterminer. 2°. Je remarque qu'il est aisé d'avoir égard aux altérations causées par le mouvement du vaisseau, pourvu qu'on sçache à peu près la direction & la longueur de sa route, &c. 3°. Si l'on ne veut pas entrer dans cette discussion, on peut se contenter de chercher une seule de ces choses à la fois, l'heure, ou la hauteur du pôle, en se fondant sur une observation favorable à cette chose, & sur la connoissance qu'on a de l'autre par estime. 4°. Enfin, si le Navigateur se défie trop de son estime, & qu'il veuille ne mettre qu'un petit intervalle entre les deux observations de hauteur, nécessaires pour déterminer ou l'heure, ou la hauteur du pôle, il faut qu'il choisisse pour ces observations, des endroits du ciel moins éloignés du premier vertical, ou du méridien, que dans l'hypothèse du Mémoire de 1736.

Pour trouver l'heure, par exemple, il faut prendre chacune des hauteurs du Soleil, lorsqu'il est dans un azy-muth le plus voisin qu'il se peut du premier vertical, en laissant un intervalle raisonnable entre les deux observations; c'est-à-dire, qu'il faut prendre une des hauteurs avant que le Soleil arrive au premier vertical, & l'autre après qu'il y a passé. Supposons en conséquence de cette proposition, que le Navigateur étant, par la même latitude ($46^{\circ} 45'$), & le Soleil à la même déclinaison que ci-dessus, cet astre soit observé à six heures & demie, & à sept heures & demie précises du matin (c'est le même intervalle que ci-dessus), les deux hauteurs en ces deux momens doivent être $15^{\circ} 7' 44''$, 7 & $25^{\circ} 23' 19''$.

Or, si les deux observations pechent en même sens, c'est le cas où l'erreur qui en résultera sur l'angle horaire fera la plus grande, mais peu considérable cependant. Supposons, par exemple, les deux observations trop faibles chacune de six minutes, c'est-à-dire, que la première hauteur est réputée de $15^{\circ} 1' 44''$, 7, dont le compl. est $74^{\circ} 58' 15''$, 3; & l'autre de $25^{\circ} 17' 19''$, dont le compl. est $64^{\circ} 42' 41''$, on trouve pour l'angle putatif *PEZ*, au moment de la première observation, $44^{\circ} 42' 11''$, 44; & pour l'angle horaire putatif, au même moment, $82^{\circ} 39' 10''$, angle qui excède le véritable de $9' 10''$, ou bien de $39'' 40'''$ de tems. Cette erreur n'est que de très-peu plus grande que celle qui se trouve dans la combinaison d'une observation faite au passage même par le premier vertical, avec une observation de hauteur méridienne.

Supposons enfin que les deux observations pechent en sens contraires; que la première hauteur est réputée, par exemple, trop petite, & la deuxième trop grande, c'est-à-dire, que celle-là est réputée de $15^{\circ} 1' 44''$, 7

(compl. $74^{\circ} 58' 15'',3$), & l'autre de $25^{\circ} 29' 19''$, dont le compl. est $64^{\circ} 30' 41''$, on trouve pour l'angle putatif ZEE' , au moment de la premiere observation $42^{\circ} 24' 18'',72$, ainsi l'angle putatif PEZ de l'azymuth du Soleil, avec son cercle horaire en ce moment est de, $45^{\circ} 47' 41'',28$; & on trouve pour l'angle horaire putatif EPZ , au même moment, $82^{\circ} 27' 55'',3$, angle qui differe du vrai de $2' 4'',7$ par défaut, ce qui réduit en tems, ne revient qu'à $9'' 19'''$, au lieu que dans la même combinaison d'erreurs des hauteurs, pour le cas du Mémoire de 1736, il résulte 2 minutes, ou $120''$ d'erreur sur l'heure. On peut conclurre de ces derniers calculs, qu'une demi-heure d'intervalle entre les deux observations seroit encore suffisante, pourvû qu'on prît les deux hauteurs des deux côtés du premier vertical. Je dis *suffisante* pour la détermination de l'heure seulement, car on n'auroit qu'une détermination très-vicieuse de la hauteur du pole, & de l'angle azymuthal par conséquent, lorsque les deux observations pecheroient en sens contraires.

Au reste, on doit voir par ces exemples, quelle est la bonne maniere de trouver l'heure pendant le jour, lorsque le Soleil décline du côté du pole élevé, & qu'il est le seul astre visible, principalement si l'horison est couvert par quelque brouillard, qui ne permette pas d'observer le lever ou le coucher de cet astre : car quand l'horison sera net, on pourra encore prendre l'observation du lever ou du coucher du Soleil (ou plutôt celle du moment où son bord inférieur touche l'horison sensible), au lieu d'une observation de sa hauteur lorsqu'il est auprès du premier vertical, parce que l'erreur propre à la premiere espece d'observation est moins grande, que celle à quoi est sujette une observation de hauteur, & la conséquence de celle-la ne sera pas plus grande, que la conséquence de celle-

ci, si ce n'est que la déclinaison du Soleil & la hauteur du pole fussent grandes.

Lorsque le Soleil décline du côté du pole abaissé, & qu'il n'y a pas d'autre astre qui paroisse conjointement, c'est son lever ou son coucher qu'il faut, s'il est possible, observer par préférence, pour la détermination de l'heure; tout autre tems est moins favorable pour cette détermination par une observation de hauteur du Soleil, parce que cette observation seroit plus fautive, & que la conséquence de son erreur seroit plus grande. Et si l'horison est occupé par un brouillard, il faut observer le Soleil à la moindre hauteur qu'on pourra. Dans l'intervalle entre la première & la dernière apparition du Soleil, il faudra s'en rapporter à une montre réglée sur la meilleure observation précédente. Cependant, si l'on étoit dans une région où la déclinaison de la Bouffole eût certaine constance, on pourroit, après l'avoir vérifiée par la meilleure & la plus récente observation, tenter encore vers midi d'observer l'angle azymuthal du Soleil, à l'aide de cet instrument, dans ce même cas de la déclinaison du Soleil du côté du pole abaissé.

Quant au tems des crépuscules, il ne sera pas rare, si le ciel est serain, de découvrir alors quelques Planetes, & même plusieurs étoiles de la première grandeur, & ces astres pourront être dans une position avantageuse pour l'invention de l'heure. Mais de quelle méthode se servira-t-on dans ce cas, ainsi que pendant la nuit? C'est de quoi je vais traiter dans le Chapitre suivant.



CHAPITRE II.

Du choix entre les différentes méthodes, ou especes d'observations qui peuvent servir à trouver l'heure.

SI tous les avantages possibles se trouvoient réunis dans une seule méthode, le choix dont il s'agit ne seroit pas long à faire, & demanderoit peu de discussion: cette méthode mériteroit sans doute une préférence entière & absolue. Mais les avantages paroissent dispersés; telle méthode en a, ou paroît en avoir un, qui manque d'un autre: on ne peut donc, ce semble, établir de préférence générale & sans exception, & il y a lieu à quelque discussion, s'il faut peser & comparer les diverses qualités des différentes méthodes, & y assigner des rangs.

On peut regarder comme les deux principales especes d'observations, celle de prendre les hauteurs des astres, & celle d'en observer une couple à son passage par un même vertical, ce sont au moins les deux especes les plus familières, & il est aisé de voir ce que les autres especes ont de commun avec celles-là. Or la premiere a cet avantage, par exemple, que l'on peut absolument l'employer en tout tems où les astres sont visibles, & qu'on peut profiter d'un instant rapide, où quelque astre perce au-travers d'un nuage; mais aussi cette méthode requiert un instrument, & elle est difficile à exécuter pendant la nuit, surtout lorsqu'on ne découvre pas l'horison.

D'un autre côté, l'observation de deux astres à leur passage par un même vertical, a ce petit inconvénient, qu'on ne peut la faire en tout tems où les astres paroissent; il faut,

il faut, à l'égard de chaque couple d'astres, attendre certain moment, & on peut le manquer par quelque hasard : mais aussi en récompense, *cette opération se peut faire facilement sur mer*, s'il en faut croire M. de Maupertuis, pag. 62 de l'Astronomie Nautique, & n'a besoin d'aucun instrument ; car, ajoute-t-il, *on ne peut pas appeller un instrument, un fil chargé d'un plomb, qui est tout ce qu'il faut pour la faire.* Et dans sa Préface, pag. xxxij, M. de Maupertuis met cette observation de deux astres dans un même vertical, après celle du lever ou du coucher d'un astre, & avant toute autre, quant à la *simplicité & la facilité*, insinuant au reste qu'on peut la faire avec *précision & exactitude*, même sur mer. *Sur la mer*, dit-il, page suivante, *un fil chargé d'un plomb suffit.* A quoi il ajoute, que si l'on vouloit se contenter d'une moindre exactitude, on pourroit, à la vue simple, juger assez juste, si la ligne qui joint deux étoiles est verticale, surtout si l'on choisiroit deux étoiles assez éloignées l'une de l'autre. L'autorité de M. de Maupertuis est grande assurément, mais elle se trouve balancée, il faut l'avouer, & un peu affoiblie peut-être, par celle d'un autre Sçavant, non moins versé dans l'Astronomie, lequel a blâmé la méthode dont il s'agit. Ce Sçavant est M. Bouguer ; je rapporterai son jugement plus bas.

Il est à propos, avant que d'entreprendre un examen régulier & pleinement décisif, des qualités des différentes especes d'observations, de faire quelques remarques.

1°. Quoique ces différentes especes puissent être inégales en mérite absolu, cette inégalité, quant à plusieurs, ne va pas, selon mon estime, à un bien haut point, à un point tel que l'égalité de mérite relatif aux circonstances ne puisse se retrouver entre ces méthodes, & que celle même qui seroit moins bonne absolument, ne puisse prévaloir à raison des circonstances, sur une meilleure.

2°. L'occasion de mettre en pratique la préférence que quelque méthode pourroit mériter sur les autres, en parité de circonstances, ne se présentera pas toujours; elle ne peut gueres se trouver, cette occasion, que pendant la nuit, encore ne se présentera-t-elle pas à chaque moment: car les circonstances ne peuvent pas être toujours favorables à l'usage de chaque méthode, il n'y en aura qu'une pour l'ordinaire à employer en tel ou tel moment, sçavoir celle qui conviendra le mieux aux circonstances présentes, & qui méritera à cet égard la préférence actuelle sur une autre méthode, qui seroit meilleure en parité de circonstances.

Le Navigateur doit donc être en état de faire usage de plus d'une méthode; il faudra qu'il emploie tantôt l'une, tantôt l'autre, suivant l'occurrence: il sçaura, s'il est intelligent & attentif, tirer bon parti de la plupart des especes d'observations, recherchant toujours la circonstance la plus avantageuse pour chaque méthode, il faisira la première qu'il trouvera de cette qualité, & rarement il manquera d'en trouver quelque une, parce que la position des astres qui est la plus défavantageuse pour une méthode, est favorable pour une autre.

Par exemple, lorsque la hauteur du pôle étant connue, on demande l'heure, s'il se présente un astre auprès du premier vertical, il vaudra mieux pour la détermination requise, prendre la hauteur de cet astre, que d'attendre le passage d'une couple d'astres à un même vertical, si ce vertical fait un grand angle avec le méridien, ou si ces astres sont peu éloignés l'un de l'autre. Et lorsqu'on demande conjointement la hauteur du pôle, & l'heure, s'il se trouve deux astres dont les azymuths fassent un angle droit ou approchant, il est à propos de prendre les hauteurs de ces deux astres, ce qui est la matiere du Pro-

blème second, surtout si l'un est voisin du méridien, &c.

Si au contraire, deux astres assez différens en hauteur, se trouvent en des azymuths très-obliques l'un à l'autre, il est à propos d'observer l'angle de ces azymuths, & la hauteur d'un des astres, ce qui est la matiere du Probleme XVII. surtout si les astres sont fort voisins du premier vertical, ou du méridien. Et dans le cas où, sans connoître suffisamment la hauteur du pole, on demanderoit seulement l'heure, si deux astres se trouvoient pareillement en des azymuths très-obliques l'un à l'autre, & au premier vertical, il ne faudroit pas négliger de prendre leurs hauteurs, & d'opérer suivant le Probleme second, &c.

3°. Si les circonstances sont parfaitement favorables au même moment, ou en des momens peu éloignés, à des procédés différens, par exemple, à quelqu'un de ceux où l'on se fonde sur l'observation de la hauteur d'un astre, & à quelqu'un de ceux où l'on se sert du passage de deux astres à un même vertical; au lieu de choisir entre ces différens procédés, & d'en laisser un, il paroît à propos de les employer conjointement: car on aura ce qui est désiré avec plus de sûreté, si leurs résultats sont conformes, ou avec moins d'erreur présomptive, en prenant un milieu entre ces résultats, s'ils sont différens.

On pourroit, ce semble, sur ces considérations, se dispenser de peser exactement les qualités des divers procédés: cependant comme l'intention de l'Académie paroît être que l'on porte la discussion jusqu'à assigner une maniere de trouver l'heure pendant la nuit, meilleure que toute autre, au cas qu'il y en ait une; comme cette discussion est d'ailleurs curieuse; enfin comme il faut du moins montrer sur quoi est fondée l'estime qui me fait dire, que l'inégalité de mérite entre divers procédés en

parité de circonstances , ne sçauroit être que médiocre ; je vais tenter la recherche de l'erreur à laquelle on peut être exposé , en croyant saisir une couple d'astres à leur passage par un même vertical ; car c'est cette erreur qu'il faut comparer avec celle à quoi est sujette l'observation de la hauteur d'un astre , pour connoître si l'une de ces observations prévaut sur l'autre , & je me bornerai à cet essai.

J'ai rapporté le témoignage de M. de Maupertuis , en faveur de l'observation de deux astres dans un même vertical , par le moyen d'un fil à plomb : mais le jugement de M. Bouguer sur cette pratique est bien différent , on ne peut le dissimuler. M. Meynier l'avoit proposée dans une addition à son Mémoire sur la maniere d'observer en mer la déclinaison de la Bouffole , *pag.* 62 , & il l'avoit *limitée* à l'observation de l'étoile polaire , avec quelqu'une de celles qui l'environnent , à peu près comme il est enseigné dans le livre de la Connoissance des Tems. Ainsi M. Meynier avoit saisi une des circonstances favorables à cette espece d'observation , puisque le vertical de l'étoile polaire n'est jamais fort écarté du méridien , à moins que le pole ne soit bien haut. * Cependant M. B. a blâmé rudement ce procédé dans ses remarques sur le Mémoire cité. » M. Meynier supplée (dit-il *pag.* 5) une maniere de trouver l'heure dans l'addition qu'il a mise après » coup à son Mémoire : mais il veut qu'on se serve pour » cela d'un fil à plomb , ne se ressouvénant pas d'en avoir

* Au reste , M. Meynier prétendoit découvrir l'heure par cette observation , sans calcul , à l'aide de je ne sçai quel planisphere qu'il a imaginé , & indépendamment de la différence des hauteurs du pole pour les différens lieux ; & à cet égard il se trompoit lourdement. Mais M. B. qui dit n'avoir pas voulu rapporter toutes les *méprises* de M. Meynier , mais seulement *celles qui tirent le plus à conséquence* , & qui se présentent les premières , a négligé de relever cette faute , & il ne traite la pratique dont il s'agit d'*imparsaire* , qu'à raison de l'*agitation continuelle du vaisseau* , laquelle doit causer des oscillations irrégulières , au fil chargé d'un plomb.

» rejeté l'usage auparavant, à cause de l'agitation conti-
» nuelle du vaisseau. Or, un moyen *si imparfait* de trou-
» ver l'heure (ajoute M. B.), fera qu'on se trompera *au*
» moins de 15 ou 20 minutes de tems, ce qui produira en
» suite des erreurs excessives dans l'azymuth ». Quinze ou
20' de tems, répondent à 4 ou 5 degrés, erreur bien con-
sidérable sur l'angle horaire, si l'on y étoit effectivement
exposé. D'ailleurs M. B. approuve, *page suivante*, &
veut même qu'on détermine l'angle horaire d'un astre par
l'observation de sa hauteur.

Voilà, je le répète, un jugement bien différent de
celui de M. de Maupertuis. Et quel parti doit prendre
dans un cas de cette espece, une personne dont les lumie-
res sont aussi bornées que les miennes, & si inférieures à
celles des Sçavans qui se contrarient ?

Non nostrum inter vos tantam componere pugnam.

Ces Messieurs sont plus capables que qui que ce soit, de
discerner le point qui doit les concilier ; & j'aimerois
beaucoup mieux attendre le jugement réfléchi porté par
l'un ou par l'autre, que de le prévenir. Si j'ose parler sur
ce sujet, ce n'est qu'avec répugnance, & à cause de la
nécessité que paroît imposer l'énoncé du Programme de
l'Académie. S'il faut donc que je m'en explique, je dirai,
avec la permission de ces Messieurs, qu'on peut, ce sem-
ble, user de tempérament, & prendre un certain milieu
entre les deux extrémités. L'observation de deux astres
dans un même vertical, n'est peut-être pas susceptible
d'autant d'*exactitude*, que l'insinue M. de Maupertuis ;
d'un autre côté, je ne la crois pas sujette à autant d'*im-*
perfection que l'a avancé M. Bouguer. Je pense que cet
Auteur, si judicieux ailleurs en tout, a été un peu trop
loin à cet égard : c'est en passant, c'est dans un écrit fait

pour repousser un agresseur téméraire , dans un écrit composé peut-être avec quelque précipitation , que M. Bouguer a blâmé la méthode dont il s'agit. On peut donc soupçonner qu'il s'y est un peu laissé emporter par l'ardeur polémique.

Venons au fait. Nous avons vû que l'erreur dE sur l'heure, est $= \frac{r}{c} dH$, lorsqu'on la détermine par la hauteur d'un astre situé sur le premier vertical , ce qui est la position la plus favorable pour cette détermination. Supposons pareillement que les deux astres E, E' , qu'on prétend observer dans un même vertical , sont situés le plus avantageusement à l'égard du méridien , pour la même détermination , c'est-à-dire, que E l'un des deux astres, est sur le méridien même véritable $\angle PE$, ou $P \angle E$, Fig. 37 & 38.

1°. C'est avec un fil chargé d'un plomb , que l'on propose de faire l'observation dont il s'agit , mais ce fil ne doit pas être extrêmement délié , il doit du moins être visible , il faut qu'il ait par conséquent certaine épaisseur (aussi quelques-uns proposent-ils de prendre une ficelle). Ainsi lorsqu'on regarde ce fil , les deux plans de rayons visuels qui en rasent les côtés , font un certain angle qui est différent , selon que le fil est plus ou moins éloigné de l'œil. Soient l'arc qui est la mesure de ce petit angle , & son sinus , nommés dM , dans le cas où l'on auroit placé ce fil à la distance de l'œil la plus convenable OH , fig. 52 pour y viser selon une ligne horizontale. Si l'on veut donc viser à ce fil selon une ligne OB , oblique à l'horison, pour l'ajuster sur un objet élevé E' , il me semble qu'il faut placer ce fil plus près de l'œil , comme en BC , le placer, dis-je , plus près de l'œil dans le sens horizontal , en raison du sinus OC du complément de la hauteur de l'objet E' ,

au rayon OH , afin qu'il y ait même distance de l'œil à la partie du fil B , ajustée sur l'objet, que dans le cas où on viseroit horizontalement au fil. Ainsi l'angle des deux plans de rayons visuels qui rasent les deux côtés du fil, a pour mesure, & pour sinus $\frac{r}{k} dM$, k' étant le cosinus de la hauteur de l'objet E' . Soit donc cet angle représenté, *Fig.* 37 & 38, par l'angle sphérique mzm' , compris entre les deux quarts-de-cercle zm , zm' , car il peut arriver qu'au moment où l'on croira le fil bien ajusté sur les deux astres, un d'entre eux réponde à un des côtés du fil, & l'autre astre à l'autre côté, en sorte que la ligne $EE'Z$ qui joint les deux astres, & renferme le zénith putatif Z , soit oblique au fil.

Et je ne crois pas même qu'on puisse sauver ou diminuer cet inconvénient, en affectant d'employer un fil très-délié, ou d'éloigner beaucoup le fil de l'œil; car on seroit alors exposé, ce me semble, à une illusion équivalente, qui seroit de juger les deux astres bien répondans au fil, en quelque moment où le fil seroit réellement entre deux, & à quelque distance des principaux rayons visuels, dirigés à l'un & à l'autre. Une cause suffisante pour cela, outre celles que je toucherai plus bas, c'est qu'on ne peut pas voir, comme chacun le sçait, en même tems d'une vûe distincte, deux petits objets situés à des distances très-différentes de l'œil, tels que sont le fil & quelque astre: car si l'on veut voir distinctement le fil, l'astre paroîtra double, & si c'est l'astre, qui, comme l'objet le plus éclatant, attache le plus la vûe, c'est le fil qui paroîtra double ou confus. Le plus sûr est peut-être, que le fil employé pour l'observation, ait certaine grosseur, sçavoir telle qu'il puisse couvrir entièrement l'astre le plus élevé.

2°. Il peut encore arriver qu'au moment où l'on croira

le fil bien à plomb, & les deux astres bien répondans au fil, ce fil soit incliné à la ligne verticale, en même sens que la ligne qui joint les deux astres est inclinée à ce fil même, ainsi qu'il est représenté, *Fig. 37 & 38*, où z est le vrai zénith, & zm le vertical qui rencontre un des côtés du fil au point où il coupe l'horison, en sorte que l'angle zmz est celui que fait le fil avec une ligne vraiment perpendiculaire. Je nomme le sinus de cet angle dI . En supposant donc PZ donné, & égal à peu près à Pz , complément de la vraie hauteur du pole, le concours des accidens qu'on vient d'expliquer, peut faire que le zénith putatif Z se trouve éloigné du vrai zénith z , des deux petits arcs zz , zZ ; & PZ étant le méridien putatif, l'angle zPZ , qui répond au petit arc dE de l'équateur, est l'erreur sur l'heure.

Or, quand zE' , complément de la hauteur de l'astre supérieur, est considérable en comparaison de zz , on peut regarder les deux arcs zE' , zE' , comme égaux ou à peu près; à plus forte raison les deux arcs zE , ZE , sont aussi égaux entre eux. Cela posé, le triangle sphérique mEz , donne cette analogie: $\text{Sin. } zE(k) : \text{sin. } zm(r) :: \text{sin. } zmE$

$(dI) : \text{sin. } zEm$, ou $zEz = \frac{r}{k} dI$. Le triangle sphérique zEE' donne cette autre analogie: $\text{Sin. } EE'(\delta) :$

$\text{sin. } zE'(k') :: \text{sin. } EzE' \left(\frac{r}{k'} dM \right) : \text{sin. } zEE' = \frac{r}{\delta} dM$.

Or l'angle zEZ étant la somme des deux petits angles zEz , zEZ , son sinus est à peu près égal à la somme des sinus de ces angles partiels; & le triangle sphérique PEZ donne enfin cette analogie: $\text{Sin. } PZ(c) : \text{sin. } ZE(k) :: \text{sin. } zEZ \left(\frac{r}{k} dI + \frac{r}{\delta} dM \right) : \text{sin. } EPZ$ ou $zPZ = dE = \frac{r}{c} \left(dI + \frac{k}{\delta} dM \right)$.

Telle

Telle est l'erreur qui peut résulter sur l'heure, des deux causes que j'ai marquées. Et cette formule, où il reste à déterminer dI & dM , donne déjà la confirmation de ce que j'ai dit ci-dessus, sçavoir que l'astre supérieur doit être fort haut, & que l'astre inférieur doit être fort bas, à moins que celui-là ne fût précisément au zénith, ce qui n'est pas le cas le plus ordinaire : car tant que l'astre supérieur sera ailleurs qu'au zénith, le sinus δ de la distance des deux astres, sera moindre que le cosinus k de la hauteur de l'astre inférieur ; ainsi la fraction $\frac{k}{\delta}$ fera d'autant plus petite, que ces quantités seront sinus de plus grands arcs. On voit de plus, qu'il est à peu près indifférent que les deux astres soient du côté du zénith où est le pôle élevé, ou qu'ils soient du côté opposé. Il paroît encore (& cela suit aussi du principe général posé ci-devant) que lorsqu'on veut observer l'étoile polaire dans un même vertical, avec quelqu'une de celles qui l'environnent dans les constellations de la grande Ourse, du Dragon, de Cassiopée, &c. il vaudroit mieux, cessant la difficulté que j'indiquerai bientôt, observer l'étoile polaire avec quelqu'une de ces étoiles, lorsque celle-ci est supérieure à la polaire, que lorsqu'elle est au-dessous, car la fraction $\frac{k}{\delta}$ est plus petite dans le premier cas que dans le second.

Il reste, dis-je, à déterminer, ou plutôt à estimer les quantités dI & dM : mais il reste aussi deux causes d'erreur à considérer, & il faut peut-être joindre l'effet d'une de ces causes à dI . Cette cause est celle qui a singulièrement frappé M. Bouguer, je veux dire les oscillations du fil, provenant de l'*agitation continuelle du vaisseau*, oscillations, il faut l'avouer, incommodes & très-nuisibles : car non-seulement elles peuvent faire que le fil soit

incliné en quelque instant où on le croira dans la position verticale, ce qui est l'erreur dont j'ai déjà fait état, erreur qui naît de l'irrégularité à laquelle M. B. prétend que les oscillations d'un pendule sont sujettes sur mer, mais encore elles rendent difficile l'application du fil aux deux astres. A l'égard de l'astre supérieur, le mieux qu'on puisse faire pour y ajuster le fil, c'est de viser à cet astre par une partie du fil qui soit fort voisine de son point de suspension, encore pourra-t-on manquer de tems en tems cette jonction, à cause des secousses du vaisseau, pendant qu'on attendra le moment requis du passage de l'astre inférieur. Et à l'égard de celui-ci, les oscillations du fil feront nécessairement qu'il paroîtra tantôt à sa droite, tantôt à sa gauche, en sorte qu'il faudra prendre pour le moment du passage de l'astre par le fil, celui vers lequel les excursions du fil de part & d'autre de l'astre seront jugées égales. Or c'est en quoi il est facile de se méprendre, & ce qui suppose d'ailleurs que le fil répond toujours à l'astre supérieur.

L'autre cause d'erreur a lieu dans le cas où la distance des deux astres qu'on prétend observer dans un même vertical, excède certain terme qui est d'environ 15 degrés: & ce cas est cependant celui que l'on doit rechercher, ainsi que je l'ai démontré plus haut, sans quoi l'erreur $\frac{k}{\delta} dM$ pourroit être considérable, quoique la quantité dM le fût peu. Cette cause consiste en ce que l'on ne peut voir en même tems d'une vûe distincte, deux objets qui font à l'œil un angle au-dessus d'une certaine quantité; * mais si l'on a jetté d'abord un regard juste sur un de ces

* C'est un fait assez connu, sur-tout par les Marins. Cela les empêche de prendre la hauteur des étoiles avec l'Arbalestrille ou le Quartier-Anglois, lorsqu'elles sont fort élevées, & ils en regardent l'observation comme incertaine, quand l'astre est élevé d'environ 20 degrés.

objets , il faut mouvoir l'œil au moins , pour voir ensuite l'autre objet de la même manière. Or , il peut arriver pendant ce mouvement & changement de direction de l'œil , que le fil par lequel on doit mirer soit un peu déplacé. Bien plus , si les deux astres sont fort distans (ce qui est d'ailleurs le plus avantageux) , il faudra mouvoir la tête même de haut en bas , & de bas en haut , pour porter la vue successivement & alternativement sur chacun des astres , parce que le jeu de l'œil dans son orbite , est assez borné : or , sans parler de la gêne qu'il y a à renverser la tête , il peut arriver que pendant sa conversion dans le sens vertical , elle se jette un peu à droite ou à gauche de sa situation précédente , & que l'œil se trouve par conséquent dans un autre vertical avec le fil , quand même ce fil seroit fixe.

Cette dernière cause d'erreur me paroît assez considérable , & je pense qu'il est à propos de chercher le moyen de s'y soustraire , en faisant l'observation dont il s'agit. Je proposerai une idée sur cela dans le Chapitre suivant : je souhaite qu'elle soit praticable , & qu'elle ne ramene point d'inconvénient , au lieu de celui que je veux supprimer.

Pour revenir aux autres causes d'erreur , je ne crois pas qu'on puisse s'en garantir entièrement sur mer , mais je ne suis pas en état de faire une estime précise de leur effet : je la laisse à ceux qui connoissent la mer par expérience. Je dirai seulement que si l'on parvient à éviter la dernière erreur que j'ai marquée , l'observation du passage de deux astres par un même vertical , prévaudra , ce me semble , sur une observation de hauteur. Au reste , je ne vois pas que la première espèce d'observation puisse excéder extrêmement la seconde en mérite ; car pourquoi l'observation de la hauteur de quelque astre est-elle fautive sur mer ,

surtout la nuit, & lorsqu'on ne voit pas l'horison? C'est, 1^o, parce qu'il faut viser à l'astre par des pinnules qui doivent avoir quelque grandeur, & parce que l'instrument peut être fautif. C'est, 2^o, parce que cet instrument n'est pas justement à plomb, ou bien parce que le pendule qu'on y applique pour montrer la ligne verticale, souffre des oscillations: & ne retrouvons-nous pas de pareilles sources d'erreur dans l'observation de deux astres à leur passage par un même vertical? Enfin, si la hauteur d'un astre est difficile à prendre lorsqu'elle change sensiblement, pareille difficulté ne se rencontre-t-elle pas dans l'observation dont il s'agit, lorsqu'on veut saisir la circonstance la plus favorable à la détermination de l'heure, puisque l'angle des azymuths des deux astres change promptement dans cette circonstance.

Il me reste une remarque sur la détermination de l'heure, qui trouve ici sa place; c'est que l'erreur dE qu'on peut commettre sur l'heure, est d'autant plus grande que le pôle est plus élevé. En effet, nous avons vu qu'en la déterminant par la hauteur d'un astre situé sur le premier vertical, l'erreur $dE = \frac{r}{c} dH$; * & nous venons de voir $dE = \frac{r}{c} (dI + \frac{k}{s} dM)$, lorsqu'on détermine l'heure par l'observation de deux astres, dans un même vertical putatif, voisin du méridien; il est aisé d'ailleurs de reconnoître que cette fraction $\frac{r}{c}$ doit entrer dans toute autre expression de l'erreur dont il s'agit. Mais quant à la détermination de la hauteur du pôle, l'erreur qui peut s'y glisser est la même, quelle que soit cette hauteur. Aussi

* Je suppose dH constante, ou plutôt, comme il est vraisemblable que cette erreur est plus grande à mesure que le pôle est moins élevé, parce que la hauteur des astres change plus promptement, & est plus difficile à observer; je suppose que dH ne croît pas en raison du cosinus de la hauteur du pôle.

est-il également important au Navigateur, de connoître avec la même justesse sa latitude telle qu'elle soit, grande ou petite : mais il n'en est pas de même pour l'heure ; plus le pole est élevé, moins il est important de la bien connoître sur mer. Car si on la cherche pour découvrir la différence de la longitude du lieu où l'on est, & de celle du lieu d'où l'on est parti, il importe moins de se tromper dans l'estime de cette différence, à mesure que le pole est plus élevé, parce que le moyen parallele entre les deux lieux est d'autant plus petit. Et si c'est pour servir à trouver la variation de la Bouffole qu'on veut sçavoir l'heure, il importe moins aussi de la bien connoître à cet égard, à mesure que le pole est plus haut. En un mot, en supposant que l'erreur dans la position du zénith putatif à l'égard du vrai méridien est constante, c'est-à-dire, que la distance du zénith putatif à ce méridien est constante, il résulte de-là, à la vérité, que l'erreur sur l'heure est inégale, selon que le pole est plus ou moins élevé : mais l'erreur sur l'arc du parallele où est l'Observateur, est à peu près la même en grandeur absolue, c'est-à-dire du même nombre de toises, en supposant la terre sphérique, & c'est à cette erreur que le Navigateur est, ce me semble, seulement ou principalement intéressé.



CHAPITRE III.

Des moyens de faire les observations qui servent à déterminer l'heure, &c.

§. I. Des moyens de prendre la hauteur des Astres.

LORSQUE l'horison est découvert, le Quartier Anglois est le meilleur instrument entre les anciens pour prendre la hauteur du Soleil : ce même instrument est encore propre pour observer la hauteur des astres qui ne jettent point d'ombre, s'ils sont peu élevés. Le nouvel instrument proposé par M. de Fouchy, dans les Mémoires de 1740, est très-propre dans le même cas de la visibilité de l'horison, pour montrer la hauteur quelconque de tout astre. Mais lorsque l'horison n'est pas visible, il faut employer un instrument qui prenne de lui-même sa situation, ou qui soit garni d'un pendule, pour marquer la ligne verticale.

Les instrumens de la premiere espece sont divers. On peut voir la description des principaux & plus commodes, dans le Mémoire de M. Bouguer, touchant la méthode d'observer exactement sur mer la hauteur des astres; Piece qui a remporté le Prix de 1729.



§. II. *Des moyens d'observer deux astres à leur passage par un même vertical.*

LE moyen le plus simple est de se servir d'un fil à plomb. Ce moyen convient également à la circonstance où l'on ne voit pas l'horison, & à celle où il seroit visible : mais si l'on se trouve quelquefois dans celle-ci, on peut employer un moyen meilleur, en ce que l'on évitera l'incommodité des oscillations du fil à plomb. Il faut appliquer à une piece ajoutée, & garnie de deux pinnules, un fil, de maniere que l'angle de ce fil, avec la ligne qui passe par les pinnules, differe d'un droit, d'une quantité égale à l'inclinaison de l'horison visuel ; un Observateur y visera par les pinnules, en tenant le plan de l'instrument dans une position à peu près perpendiculaire au vertical où les deux astres doivent se rencontrer ; ainsi le fil sera dans ce même vertical, ou en sera extrêmement voisin, quand même il seroit un peu incliné à l'horison, conjointement avec le plan de l'instrument ; un second Observateur visera donc aux deux astres par ce fil.

J'ai déjà remarqué qu'on ne peut viser directement du même coup d'œil à deux astres, lorsqu'ils sont éloignés. J'estime qu'il est à propos dans ce cas, de faire en sorte qu'on voie l'astre le plus élevé par réflexion, car le rayon réfléchi venant de cet astre, pourra être rendu fort voisin du rayon direct émané de l'autre. Soit EO , Fig. 53 ce rayon direct émané de l'astre inférieur ; $E'bo$ le rayon direct qui iroit de l'astre supérieur à l'œil de l'Observateur ; $E'M$ un autre rayon du même astre : ce rayon peut être renvoyé à l'œil de l'Observateur selon MO , de maniere que l'angle EOM soit fort petit : une petite piece M de miroir

plan, appliqué au fil, suffit pour cela. On donnera à cette piece une telle inclinaison à l'égard du fil, qu'elle en ait 30 ou 40 degrés à l'égard de l'horison; & en tenant le miroir un peu au-dessus ou un peu au-dessous du rayon visuel de l'astre inférieur, on y pourra voir un astre dont la hauteur soit depuis 50 environ jusqu'à 80 degrés.

Mais quoique les deux astres puissent être vus ainsi sur une même ligne verticale, cela n'est pas suffisant pour en conclurre qu'ils sont réellement au même vertical, il faut encore que l'œil soit avec le fil, dans un plan perpendiculaire à la piece de miroir, & cela suppose deux choses, sçavoir 1^o, qu'il y ait, par exemple, un second fil *bm*, combiné avec celui (*BM*) auquel est appliquée la piece de miroir, & qui soit tendu par le même poids, d'où il résultera que ces fils seront toujours dans un même plan, & que ce plan affectera la situation verticale, soit que les fils soient parallèles ou non. 2^o. Il faut que la piece de miroir soit rendue exactement perpendiculaire au plan des deux fils. Cela supposé, si l'œil de l'Observateur est placé maniere que l'un des fils paroisse couvrir l'autre, & que les deux astres y répondent, ils seront alors dans un même vertical.

Ce moyen, comme on le voit, n'est rien moins que simple. C'est un vrai instrument que l'assemblage du miroir & des deux fils, & il faudra, je l'avoue, beaucoup d'attention & de dextérité de la part du constructeur, pour rendre le miroir exactement perpendiculaire au plan des fils. Je ne m'arrêterai point sur la maniere d'y réussir, je dirai seulement que le miroir doit être placé à demeure, & que le fil qui en sera armé, doit être incapable de se tordre. Le plus sûr seroit d'employer une lame au lieu d'un fil. Au reste, pour faire servir le miroir à l'observation d'un astre plus ou moins élevé, il s'agira seulement
d'incliner

d'incliner plus ou moins à l'horison le fil , ou plutôt la lame *BM* qui le portera. C'est ce qu'on exécutera aisément dans le besoin , en changeant l'application de cette lame au poids , ou autre corps qui tiendra le fil *bm* tendu , c'est-à-dire , en éloignant plus ou moins les extrémités inférieures de la lame & du fil , selon une droite tracée sur ce poids , sans changer la situation des parties supérieures.

Un autre moyen plus avantageux , mais de plus grand appareil , seroit de se servir de l'instrument proposé en 1740 , par M. de Fouchy , pour observer la distance de deux astres , & pour quelques autres usages. Or pour mettre cet instrument à l'usage que j'entends , on y appliquera un fil garni d'un plomb : un Observateur soutenant l'instrument , suivra les deux astres , & un autre Observateur remarquera le moment où le fil à plomb étant en repos , sera dans le plan de l'instrument , ou bien fera en oscillant des excursions à peu près égales de part & d'autre du plan de l'instrument : c'est en ce moment que les deux astres se trouveront au même vertical.

S. III. *Sur l'observation de deux astres dans un même almicantarath.*

CETTE observation est fort simple , fort facile , & fort juste sur mer , lorsque l'horison sensible est l'almicantarath commun des deux astres , & qu'il est découvert : mais cette observation cesse d'être simple , & devient difficile , lorsque les astres sont au-dessus de l'horison , il faut alors au Marin un instrument.

Le meilleur de tous pour ce cas , est encore , ce me semble , celui de M. de Fouchy , en y ajoutant une piece particuliere , sçavoir une lame plate tournante sur un axe perpendiculaire au plan de l'instrument , lame

qui soit par conséquent toujours perpendiculaire à ce plan : cette lame portera un fil à plomb. Comme l'angle que font les deux astres à l'Observateur, est connu par la distance des deux astres, qui est donnée par les tables, ou par l'instrument même dont il s'agit, on disposera la lame de manière qu'elle divise cet angle par le milieu : un Observateur soutenant l'instrument, suivra les deux astres, en les joignant dans sa lunette; ainsi le plan de l'instrument sera dans celui du grand cercle, qui passe par les deux astres (ou si ces deux plans sont inclinés l'un à l'autre, à cause des réfractions, ce sera dans un sens indifférent à l'observation désirée), & lorsque ces astres seront parvenus au même almicantarath, la lame perpendiculaire au plan de l'instrument, sera dans le plan du vertical équidistant des deux astres; un second Observateur remarquera ce moment, qui est celui où le fil à plomb étant en repos, se trouvera dans le plan de la lame, ou bien fera en oscillant, des excursions à peu près égales de part & d'autre de ce plan.

*S. IV. Sur l'observation de l'angle des azymuths
de deux astres.*

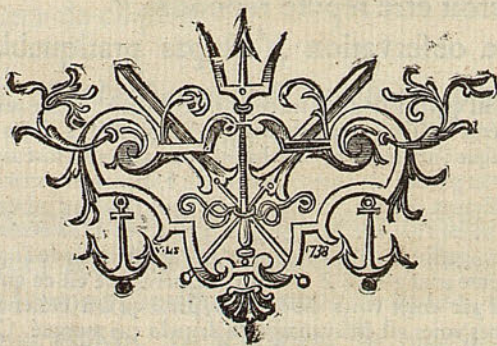
IL est à souhaiter que cette observation, qui seroit utile sur mer, n'y soit pas impossible; mais elle paroît difficile, je l'avoue, lorsque la mer est agitée, & que l'horizon n'est pas visible. Je n'ai rien de précis à proposer touchant la manière de l'exécuter avec certaine justesse, & c'est ici que je sens le plus mon insuffisance & ma stérilité pour l'invention : mais il y a des génies capables d'y suppléer, & peut-être quelqu'un voudra-t-il bien se prêter à cette recherche, ou décider si l'on n'en doit rien espérer.

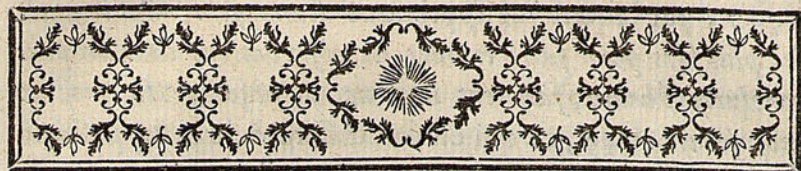
Pourroit-on employer un secteur de cerole suspendu de façon qu'il affectât la position horisontale par son propre poids? Au-dessus de cette piece seroient deux fils situés dans un même plan, & placés, sçavoir l'un au centre du cercle, perpendiculairement à son plan, & l'autre à sa circonférence, & au commencement de la division du limbe. Un Observateur dirigeroit le plan des deux fils à l'astre supérieur, en y visant par ces fils; un autre Observateur, tenant un fil à plomb auprès du limbe de l'instrument, viseroit à l'astre inférieur par ce fil, & par celui du centre du cercle; enfin ce même observateur, ou pour le mieux, un troisième, remarqueroit le point moyen du limbe, auquel répondroit le fil à plomb, &c. Mais cette pratique seroit sujette à un inconvénient non-leger, en ce que le principal instrument souffriroit des agitations, & le fil à plomb tenu par le deuxième Observateur en souffriroit d'autres, ce qui ne permettroit peut-être pas de bien juger à quelle division du limbe le fil à plomb devoit être réputé répondre.*

Si cette observation n'est pas praticable sur mer,

* Si l'on réussit quelquefois à faire cette observation, il me reste à avertir que si l'on veut opérer ensuite graphiquement au Probl. XVII, il y a une précaution à prendre, lorsque l'angle des azymuths des deux astres est fort aigu. L'opération graphique a deux parties: la première consiste à former en particulier le triangle $EE'Z$ par les élémens donnés, qui sont la distance des deux astres, & la hauteur de l'un d'eux, outre l'angle EZE' dont il s'agit; & par-là on détermine la hauteur du second astre, aussi-bien que l'angle $EE'Z$; l'autre partie de l'opération consiste à décrire ce même triangle $EE'Z$ sur le planisphere, & c'est ce qu'on peut exécuter absolument par deux voies différentes, ainsi qu'il a été enseigné ci-dessus; mais l'une de ces voies est désavantageuse dans le cas marqué. Cette voie est de former le triangle $EE'Z$ par le moyen de ses trois côtés. Or, comme l'angle EZE' est supposé fort aigu, on se trompant tant soit peu dans cette deuxième partie de l'opération sur la grandeur de l'un ou de l'autre côté EZ , $E'Z$, on placeroit assez mal le point Z , & cela nuirait ou à la détermination de l'heure, ou à celle de la hauteur du pôle. Il faut donc, pour bien construire le triangle en question sur le planisphere, employer seulement l'autre procédé, c'est-à-dire, former ce triangle sur la base EE' , par le moyen du côté EZ , & de l'angle $EE'Z$ adjacent à cette base, lequel a été déterminé par la première partie de l'opération. Quand on se tromperoit un peu sur cet angle, il n'en résulteroit qu'une petite erreur dans la position du point Z .

lorsque l'horison est couvert, on pourroit tenter d'y en substituer une autre, dont je n'ai pas encore parlé, sçavoit celle de l'inclinaison du grand cercle où sont situés les deux astres à l'égard de l'horison : car cet élément étant donné, avec la hauteur de l'un des astres, on en deduiroit aisément l'heure & la hauteur du pole. Au triangle sphérique $ZE\alpha$, fig. 54. où $Z\alpha$ est le vertical qui rencontre le grand cercle $EE'\alpha$ des deux astres à son intersection en α avec l'horison, on auroit l'angle $E\alpha Z$, complément de l'inclinaison de ce cercle $EE'\alpha$ à l'horison, le côté EZ opposé à cet angle, côté qui est complément de la hauteur observée, & le côté $Z\alpha$ qui est un quart-de-cercle : ainsi on auroit l'angle ZEE' , auquel ce côté $Z\alpha$ est opposé par cette simple analogie ; $\sin. EZ : \sin. tot. :: \sin. E\alpha Z : \sin. ZEE'$; & on poursuivroit, comme il a été prescrit ci-dessus (Partie deuxieme) pour le second Probleme.





AVERTISSEMENT

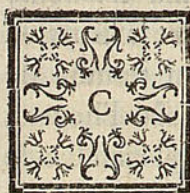
E T

ADDITIONS

Pour une Piece intitulée : Essai d'Horolepse Nautique , & marquée par ce vers :

Nautam ne pigeat coeli convexa tueri ;

Dont la premiere Partie a été présentée en 1744, & cottie N^o V, &c.



'E S T depuis le mois d'Août 1744, que j'ai composé la suite de cette Piece , & il m'en restoit une petite portion à faire à Pâques 1745 : mais j'ai achevé cet Essai dans la même disposition où je l'ai continué, c'est-à-dire, sans aucune vûe sur le Prix, ne sçachant pas même qu'il avoit été remis. Ç'a été seulement pour vuidier ma tête d'un reste d'idées, en les consignat par écrit, que j'ai travaillé ; & j'ai simplement suivi mon premier plan, tel que je l'avois formé au hasard, faute d'avoir sçu démêler le vrai but de l'Académie. Enfin, j'avois envoyé à Paris, & fait présenter la continuation de ma Piece, lorsque j'ai reçu le nouveau Programme pour

Kkk iij

1747, par lequel j'ai appris que *les moyens mécaniques les plus sûrs pour faire en mer les observations dont on peut conclurre l'heure, faisoient le principal objet de la question proposée en 1743*, ce qui est fort différent de la supposition sur laquelle j'ai travaillé : car quoique j'aie raisonné sur la maniere de faire les observations d'où on peut déduire l'heure, je n'ai pas considéré ce point comme mon capital, mais comme un accessoire qu'il me suffisoit d'effleurer. Je dois même déclarer qu'un tel sujet demandant, pour être traité pleinement & avec succès, un talent & des connoissances dont je me sens mal pourvû, je me serois entièrement abstenu de toucher à la question de l'invention de l'heure en mer, si j'eusse bien connu d'abord l'intention de l'Académie. Que si je reviens aujourd'hui sur cette question, c'est plutôt pour avouer ma foiblesse, & pour rendre raison de l'état où est la partie de ma Piece, présentée depuis la remise du prix, que pour essayer de satisfaire au desir du nouveau Programme.

J'AI proposé au dernier Chapitre de ma troisième Partie, d'employer un pendule pour connoître la situation de l'instrument quelconque, par lequel on tentera de faire une observation pour la détermination de l'heure, lorsque l'horison ne sera pas visible, & je n'ai rien dit de l'usage des niveaux à liqueur : mais j'ai vû depuis, dans les Transactions Philosophiques, de la traduction de M. de Bremont, que les anglois ont eû recours depuis quelques années, à ce moyen proposé autrefois en France, dans des assemblées qui se tenoient chez M. & dont la proposition a été renouvelée & fort recommandée par M. de Radouay, dans ses remarques sur la Navigation, imprimées à Paris en 1727. * Ce moyen

* Cet Ouvrage est muni d'approbations, & d'un Privilège datés de l'an. 1724.

mérite effectivement attention, & je vais en parler sommairement.

Je remarque par préalable, que la forme du corps de l'instrument par lequel on doit prendre la hauteur d'un astre lorsque l'horison est couvert, ou faire quelqu'autre observation utile à l'invention de l'heure, n'est pas, à mon sens, le principal chef de la recherche proposée par l'Académie. On a atteint, ou peu s'en faut, la perfection à cet égard : on sçait appliquer une lunette au lieu de pinnules aux instrumens de mer, on sçait les diviser avec assez d'exactitude, & autant qu'il est nécessaire, soit par la méthode de *Nonius*, soit par d'autres, &c. La difficulté est, ce me semble, de trouver le meilleur moyen de déterminer la situation de l'instrument dirigé à l'astre par l'Observateur. Or, je crois qu'il n'y a qu'un pendule ou un niveau à liqueur, qui puisse être employé à cette fin : s'il faut donc opter, ce n'est qu'entre ces deux moyens.

Quant au pendule, il est sujet, comme je l'ai déjà dit dans ma Piece, à des oscillations incommodes, & d'autant plus incommodes qu'elles sont plus promptes, & ont plus d'étendue. Mais 1°. on peut les ralentir tant qu'on veut, ces oscillations, sans donner pour cela une longueur excessive au pendule; car au lieu de le prendre simple, on peut le composer de deux poids *P, Q*, *fig. 55.* appliqués à une verge, soutenue ou par un pivot qui soit dans la ligne des poids, ou par un double fil; en sorte qu'elle tende à la situation verticale, ou à la situation horizontale, ainsi qu'il est représenté dans la *Fig. 55.* 2°. On peut encore diminuer l'étendue des oscillations du pendule lorsqu'elle sera trop grande, en faisant frotter à discrétion quelque une de ses parties sur une houppe ou pinceau, planté dans le corps de l'instrument, & que l'observateur poussera de

son doigt à la rencontre du pendule, mais qu'un petit ressort en éloignera, dès que le doigt l'aura quitté, afin qu'il reste un peu de jeu au pendule. Je crois qu'avec cette double précaution, il ne sera pas extrêmement difficile de reconnoître les limites de deux de ses excursions consécutives de part & d'autre du vrai point de repos, &c. Au reste, je pense que c'est l'expérience qui doit décider sur la durée qu'il convient de procurer aux oscillations dont il s'agit; il n'est pas nécessaire d'observer qu'il y a un inconvénient particulier à la rendre grande, parce que l'oscillation est sujette à devenir par-là d'autant moins régulière, en sorte que le milieu de l'arc décrit dans cette oscillation, peut être différent du vrai point de repos.

Quant aux niveaux à liqueur, ceux de forme commune sont sujets à des oscillations, aussi-bien que les pendules, & par la même cause. De-là naît le rapport connu des mouvemens alternatifs dont une liqueur contenue dans un tuyau est susceptible, à ceux d'un pendule. M. Newton a traité le premier ce sujet, & M. Dan. Bernoulli a amplifié cette théorie en différentes sections de son Hydrodynamique. On sçait que les oscillations de la liqueur sont plus ou moins lentes, selon que le tuyau où elle est enfermée a plus ou moins de longueur, &c. L'application d'un niveau à liqueur commun à un instrument, est donc sujette à inconvénient, aussi-bien que celle d'un pendule; cependant le niveau à liqueur a en ce point un petit avantage sur le pendule, n'étant pas exposé à l'impression du vent, & n'ayant pas besoin d'en être garanti comme celui-ci. J'ai déjà remarqué que M. de Radouay a conseillé l'usage de ce moyen. Il rapporte dans son livre, que quelques Pilotes en avoient fait épreuve, & le goûtoient: mais je ne sçais point que cela ait eû de suite en France. M. Jean Elton, Anglois, a eu plus de succès;

il

il paroît avoir introduit l'usage du niveau à liqueur, pour les observations de hauteur, parmi ceux de sa nation. Les *Transactions Philosophiques* de 1732, n° 423, contiennent la description de son instrument, qui a beaucoup de rapport avec le Quartier Anglois ordinaire. Deux niveaux y sont combinés, pour lui procurer une juste situation, soit pour l'observation en avant, soit pour l'observation en arrière; & c'est un avantage dans l'usage de cet instrument. Il faut, après lui avoir donné sa situation, mouvoir l'alidade pour rencontrer l'astre, ce qui est une incommodité, parce qu'il est bien difficile de ne pas ébranler en même tems & déplacer l'instrument (on évite cette incommodité en se servant d'un pendule). Les niveaux de M. Elton sont de ceux où l'on ne laisse qu'un petit vuide ou bulle, & leur tuyau est représenté droit, & assez court dans la Figure: mais leurs proportions ne sont point marquées dans le discours, non plus que la grosseur de la bulle; c'est pourquoi il n'est pas possible de juger de la quantité des balancemens auxquels la liqueur de ces niveaux doit être sujette. Quoi qu'il en soit, deux Navigateurs, qui sont le Capitaine Hoxton & M. Walton, témoignent avoir fait usage de l'instrument de M. Elton, & en avoir été assez satisfaits, les observations qu'il a fournies étant peu différentes les unes d'avec les autres, & de celles qu'on avoit par le Quartier ordinaire ou autrement. Les épreuves du Capitaine Hoxton sont de l'année 1730, dans un voyage à Maryland. On trouve dans les *Transactions Philos.* de 1733, au n° 429, un journal d'observations faites dans un voyage à la Baye d'Hudson, en 1731, par le Capitaine Middleton, par lequel il paroît que ce Navigateur a employé l'instrument de M. Elton avec utilité, lorsque l'horison étoit couvert. Enfin, les *Transact. Philos.* de 1736 contiennent au n° 442, un journal en-

core plus ample d'observations faites par le même Capitaine Middleton, dans un pareil voyage en 1735, où il s'est encore servi de l'instrument de M. Elton, tantôt seul, & tantôt en concurrence avec d'autres instrumens de nouvelle construction. Un de ces instrumens est de l'invention de M. Hadley : mais on a omis de marquer si cet instrument est celui qui suppose l'horison visible, & qui fait voir l'astre par réflexion, ou si c'est celui dont je vais parler dans un moment. Les deux autres instrumens sont attribués à M. Caleb Smith, & il paroît par l'explication qui termine le journal, qu'un de ces instrumens est propre à prendre hauteur, lorsque l'horison est embrumé, & qu'il demande une mer tranquille : mais je n'ai encore trouvé la description ni de l'un ni de l'autre de ces instrumens.

Voici une Table des observations de latitude, prises par l'instrument de M. Elton, concurremment avec d'autres.

Jours.	Instr. de M. Elton.	Instr. de M. Hadley.	1. Instr. de Smith.	2. Instr. de Smith.	Estime.
Juin 19	61° 54'	61° 49'	61° 44'	61 47
21	61 12	61 5	61 4	61 0
22	61 12	61 0	61 12	61 11
24	61 38	61 36	61 37
29	61 30	61 30	61 20	61 30
Juill. 5	61 44	61 33	61 43	61 39
25	61 14	61 17	61 15
27	59 34	59 36	59 39
Sept. 10	61 46	61 45	61 43	61 58

M. Jean Hadley, Vice-Président de la Société Royale, a enfin proposé pour l'observation de la latitude, un quart-de-cercle auquel est appliqué un niveau à liqueur de forme singulière, dont la description se trouve dans les Trans. Philos. de 1733, n° 430. Ce qu'il y a de particulier à ce niveau, c'est 1° que son tuyau est courbé en

arc-de-cercle, en sorte que la colonne de liqueur qui occupe une partie de ce tuyau, ayant la même courbure, le niveau de ses deux extrémités peut répondre à différents endroits du tuyau : par-là on obtient le même avantage que par l'usage du pendule, je veux dire que l'alidade de l'instrument ayant été placée sur une de ses divisions, y doit demeurer fixe pendant l'opération, & l'Observateur cherche l'astre, & y dirige l'alidade, en gouvernant tout l'instrument ; cependant la liqueur joue, & montre enfin la situation de l'instrument, c'est-à-dire, la quantité qu'il faut ajoûter à celle que marque l'alidade, ou en retrancher.

2°. M. Hadley coupe, pour ainsi dire, le cours de la liqueur dans son tuyau, par une clef à laquelle il ne laisse qu'un petit trou (il fait ce trou d'un diamètre dix fois plus petit que le tuyau ; c'est pourquoi le filet de liqueur qui occupe ce passage, est cent fois plus petit que la colonne de liqueur, & cette colonne ne peut se mouvoir qu'avec une vitesse cent fois moindre que celle du filet : au reste, on n'est pas assujetti à employer précisément ces rapports). De-là suivent deux choses, l'une que la force qui peut produire le mouvement du filet de liqueur qui passe par le trou, étant peu considérable, le mouvement de toute la masse de la liqueur est fort lent. L'autre conséquence est, que quoique cette masse soit hors d'équilibre au commencement de l'opération, une de ses portions étant plus élevée que l'autre, la portion la plus haute descend & souleve la plus basse, sans accélération sensible, de manière que l'inégalité primitive de ces portions, n'entraîne point de balancement réciproque entre elles. *

* Pour reconnoître aisément qu'il ne doit pas y avoir d'accélération dans la descente de la plus haute portion de la liqueur, parce qu'elle passe par un petit trou, il faut comparer cette descente à l'évacuation d'un vaisseau qui n'a qu'une petite

C'est-là une des choses que M. Hadley a eues en vûe, & il remarque qu'elle doit arriver ; mais il va encore plus loin, il paroît prétendre que les secouffes que l'agitation du vaisseau transmettra sur l'instrument, & dont l'Observateur ne pourra le parer, quoiqu'il s'efforce de le tenir continuellement appliqué à l'astre, ne causeront pas non plus de balancement à la liqueur. *Elle traverse lentement*, dit notre Auteur, *la clef du robinet, & ne fait aucunes vibrations sensibles ; car le robinet qui ne la laisse passer que par une petite ouverture, non-seulement en réprime les mouvemens, & en arrête les vibrations* (c'est-à-dire, celles que la descente de la liqueur causeroit sans cela), *mais il la défend encore de l'agitation qu'elle pourroit recevoir dans le tuyau, lorsque l'instrument est ébranlé. Au surplus, ajoute-t-il, je n'ai point remarqué que le robinet empêchât la liqueur de descendre, & de s'arrêter à la partie du tuyau la plus basse.* Mais si les ébranlemens reçus par l'instrument, ébranlemens que M. Hadley suppose être quelquefois considérables, puisque l'alidade peut, selon lui, être tantôt plus haute, & tantôt plus basse que l'astre de plusieurs minutes, &c. Si, dis-je, de tels ébranlemens, si de tels mouvemens ne causoient aucune agitation dans la liqueur, comment une petite différence de poids entre ses deux portions, qui sont de part & d'autre de son point le plus bas, seroit-elle capable de la mettre en mouvement & d'opérer sa descente ? Je pense donc que quand l'instrument de M. Hadley reçoit de certaines secouffes, la liqueur de son tuyau doit souffrir par contre-coup une agitation réelle, nonobstant l'interposition de la clef : cependant j'avoue que cette agitation n'aura pas un effet bien notable (& c'est peut-être ce qu'a

ouverture à son fond, telle qu'en une clepsydre. Or, bien loin que la liqueur qui s'échappe de la clepsydre, s'accélère à mesure que ce vaisseau se vuide, au contraire elle sort de moins en moins vite, &c.



voulu dire le sçavant Auteur), parce que les secouffes transmises à l'instrument se succédant promptement & en sens contraires, l'agitation qui en résulte sur la liqueur, se fait aussi en sens contraires, & ses effets particuliers s'entredétruisent perpétuellement. Plus le passage de la liqueur fera petit, & moins les suites de l'agitation dont nous parlons seront sensibles; c'est ce que j'avoue bien volontiers, mais aussi la descente de la liqueur en deviendra d'autant plus lente. Je crois au reste que ce que je viens d'avancer n'a pas besoin de preuve, & qu'il n'est pas question de faire ici une dissertation géométrique & complete, sur les propriétés ou accidens du mouvement d'une liqueur dans un tuyau: M. Hadley lui-même ne s'est point arrêté à une telle discussion, mais, supposant les principes connus, il se contente d'avancer des faits; il a même négligé de marquer la grandeur du rayon de courbure qu'il a donné à son tuyau, grandeur qui serviroit à déterminer le tems de la descente de la liqueur par un espace donné; il nous dit seulement qu'il faut une demi-minute & plus à la liqueur pour traverser le robinet, suivant que l'ouverture de la clef est plus ou moins grande, à proportion de la cavité du tuyau. Peut-être faudra-t-il une minute entiere à la liqueur pour parvenir à la situation désirée, si on fait le trou de la clef assez petit pour amortir suffisamment les vibrations de la liqueur.

Quant à l'usage de cet instrument, il me semble fort propre à remplir la destination que son Auteur lui a donnée, c'est-à-dire, à faire connoître la hauteur méridionale d'un astre, ou bien la latitude, lorsque l'horison est couvert; car la lenteur avec laquelle la liqueur du niveau parvient à son point de repos sensible, n'est point un inconvénient par rapport à des observations de ce genre, puisque la hauteur d'un astre qui est dans le voisinage du mé-

ridien, ne change pas fort sensiblement pendant quelques minutes, & que c'est une telle circonstance qu'il faut saisir autant qu'on peut, pour les observations de latitude, ainsi que je l'ai remarqué dans ma Piece. Je crois même que l'instrument dont il s'agit, est encore bon pour prendre hauteur, c'est-à-dire, que d'autres instrumens ne sont gueres meilleurs lorsque l'horison est visible, mais imparfaitement. Au reste, j'ignore si cet instrument a été mis à l'épreuve, & si on y a trouvé ou non des inconvéniens. Quoi qu'il en soit, il me semble qu'il est un peu délicat pour le commun des marins, & je vois qu'il exige bien des attentions. Par exemple, le volume de la liqueur ne pouvant pas être déterminé, parce que cette liqueur se raréfie par le chaud, & se condense par le froid, pour ne pas dire qu'elle peut être sujette à s'évaporer, il faut avoir égard à cette variation de volume, & considérer la situation des deux extrémités de la colonne de liqueur, pour faire un bon usage des divisions de l'échelle qui accompagne le tuyau, &c.

Mais si l'on veut transférer l'emploi de l'instrument ou bien du niveau de M. Hadley, aux observations qui sont les plus convenables à la détermination de l'heure, il s'y trouvera un inconvénient non-leger, provenant de la lenteur de la marche de la liqueur. Supposons, par exemple, que ce soit par une observation de la hauteur d'un astre qu'on cherche l'heure, il faut saisir l'astre, comme je l'ai montré, dans le tems où sa hauteur change le plus vite. Supposons donc encore que le Navigateur soit aux environs de la Ligne, & que l'astre soit auprès du premier vertical, cet astre s'élèvera de quinze degrés ou environ en une heure, ou bien d'un quart de degré en une minute. S'il faut donc une minute, je le suppose, à la liqueur pour se mettre de niveau, lorsque l'instrument est dirigé à un

point fixe, & que le tuyau peut être censé fixe; il pourra arriver lorsque l'instrument sera dirigé à l'astre placé comme je l'ai dit, que la liqueur se trouve éloignée de son niveau d'environ un quart de degré, après une minute de tems depuis qu'elle aura commencé à joïer, & ainsi de suite, parce que le tuyau aura été continuellement déplacé. Ce que je dis arrivera effectivement, lorsque le mouvement de la liqueur sera en sens contraire de celui de l'instrument. Ainsi dans ce cas, la liqueur aura un mouvement continu, & la ligne qui passera par ses deux extrémités, fera toujours en arriere du vrai niveau, d'une quantité difficile à estimer. Que si la liqueur se trouve tellement située au commencement de l'opération, que sa tendance à descendre soit en même sens que le mouvement qu'il est nécessaire de donner à tout le corps de l'instrument, pour suivre continuellement l'astre dans son cours en hauteur, alors il est vrai qu'il y aura un instant où la liqueur se trouvera de niveau, mais cet instant ne sçauroit être bien discerné, car la liqueur n'aura qu'un mouvement extrêmement lent, & paroîtra sensiblement arrêtée quelque tems avant & après cet instant. Ce second cas est peut-être moins défavantageux que le précédent, mais posé qu'il le soit, ce seroit toujours une affaire assez délicate pour l'Observateur, que de placer tellement l'alidade avant le commencement de l'opération de viser à l'astre, qu'il se procurât la circonstance qui constitue le cas dont il s'agit, & ne la laissât pas échapper.

Pour revenir maintenant à la question proposée par l'Académie, quel moyen réputerons-nous le plus sûr, pour faire en mer les observations propres à déterminer l'heure? Appliquerons-nous à l'instrument qu'il faudra diriger à un ou à deux astres, un pendule ou un niveau à liqueur? Le pendule est sujet à des oscillations incommo-

des, le niveau à liqueur peut aussi être sujet à de pareilles oscillations. Employerons-nous au contraire le moyen imaginé par M. Hadley, moyen par lequel on supprime, ou pour mieux dire, l'on diminue tant qu'on veut les balancemens de la liqueur d'un niveau ? Ce parti a aussi des inconvéniens relatifs au Problème dont il s'agit, nous venons de le voir. Enfin, prendrons-nous un parti moyen, c'est-à-dire, proposerons-nous l'usage d'un niveau dont la liqueur n'eût pas un mouvement si lent que dans celui de M. Hadley ? car le degré de ce mouvement est en notre disposition, en diversifiant le rapport de l'ouverture par où la liqueur doit passer à la section du tuyau : mais nous n'éviterons pas ainsi tout inconvénient, la liqueur aura des vibrations plus ou moins sensibles. En un mot, s'il y a des inconvéniens dans les deux cas extrêmes & opposés, qui sont celui de l'exemption des oscillations, & celui de leur existence avec promptitude, il n'est pas douteux qu'il n'y ait aussi de l'inconvénient dans un cas moyen entre ces extrêmes. J'estime pour conclusion, qu'on pourroit appliquer tout-à-la-fois à un instrument, & un pendule, & un niveau du genre de celui de M. Hadley : car comme deux Observateurs sont nécessaires dans les observations qui se font la nuit, & lorsque l'horison est invisible, l'un d'eux étant entièrement occupé à viser à l'astre & à le suivre, son second seroit, ce semble, en état de faire attention en même tems, au pendule & au niveau à liqueur, & le résultat de l'opération n'en seroit que plus sûr, en prenant un milieu entre les indications de ces moyens différens. Au reste, je ne peux m'empêcher de remarquer que la justesse des observations convenables à la détermination de l'heure, dépendra toujours beaucoup de l'adresse personnelle, & du génie des Observateurs : car mieux une personne saura suivre un astre,

&

& y appliquer constamment son instrument de la même manière, & moins cet instrument recevra de secousses & causera par conséquent d'agitation irrégulière au pendule, ou à la liqueur du niveau dont il sera armé. D'un autre côté, un homme intelligent fera toujours attention aux différentes causes des erreurs qui sont inévitables dans les observations, & il tâchera de ne s'y exposer que le moins qu'il sera possible, ou bien même il s'en formera une certaine estime, par laquelle il modifiera l'observation pure & simple. Mais quelque perfection qu'eussent des moyens mécaniques propres aux observations qui fournissent l'heure, je crois que si ces moyens sont maniés par des gens grossiers, les déterminations qui en résulteront, manqueront toujours de justesse & de sûreté.

Comme j'adopte l'invention de M. Hadley, je crois qu'il me sera permis de faire ici une remarque touchant la pratique, & même de proposer quelques modifications ou changemens, dont cette invention est susceptible.

1°. Le tuyau employé par M. Hadley, est un tuyau capillaire, n'ayant qu'un dixième de pouce Anglois de diamètre. D'ailleurs la liqueur que M. Hadley y met, est de l'esprit-de-vin, il y a donc lieu de craindre que la liqueur n'ait plus d'adhésion à une branche du tuyau qu'à l'autre, c'est-à-dire, à celle dans laquelle elle descend, qu'à celle où elle monte (ce qui dérangeroit beaucoup son mouvement); car on sçait que la liqueur s'attache mieux, & quitte plus difficilement par conséquent le verre déjà mouillé, qu'elle ne s'attache & ne glisse sur celui qui est sec. Il est donc à propos, avant que de mettre le niveau en expérience, de faire en sorte que ses deux branches soient également humides dans les endroits où la liqueur doit passer, si on continue d'en employer une qui mouille le verre.

2°. Je ne sçai pas pourquoi M. Hadley a proposé l'esprit-de-vin plutôt que le mercure, pour la liqueur de son niveau : il a eu apparemment ses raisons. M. Hadley auroit-il cru qu'il feroit trop difficile de former la clef par le trou de laquelle la liqueur doit passer d'une branche dans l'autre, avec assez de justesse, & de telle matiere que le mercure, ne pût s'échapper hors du tuyau & se perdre ? Si cet inconvénient peut être sauvé, je conseillerois l'usage du mercure : cette liqueur a l'avantage d'être moins dilatable que l'esprit-de-vin, & d'ailleurs comme elle ne s'attache pas au verre, les deux extrémités seroient mieux terminées & mieux discernables : ainsi on ne seroit pas obligé de prendre un tuyau aussi petit que l'a fait M. Hadley pour le corps du niveau, & la clef pourroit recevoir une ouverture un peu moins petite : il doit être difficile de percer un trou qui n'ait qu'un $\frac{1}{100}$ de pouce de diamètre, &c.

3°. Il faut, dans l'usage du niveau de M. Hadley, considérer les deux termes auxquels répond la liqueur ; c'est une petite peine & une double occasion d'erreur. Ne pourroit-on pas éviter cela ? Voici ce que j'imagine dans cette vûe : la liqueur n'est pas si précieuse qu'on ne puisse en sacrifier quelques gouttes, je voudrois donc qu'une des branches du niveau eût moins de longueur que l'autre, & fût terminée par un petit trou par lequel la liqueur sortiroit, tant qu'elle seroit poussée par celle que contiendrait l'autre branche, c'est-à-dire, que la liqueur ne s'élèveroit point dans la branche courte, & descendroit seulement dans la longue. Il est visible que l'instrument peut être toujours disposé pour l'observation, de maniere que la tendance de la liqueur soit vers l'orifice de la branche courte. La mesure de cette branche étant donc fixe & donnée, on auroit seulement à observer l'extrémité de la liqueur dans la longue branche.

4^b. Je suppose encore que l'on peut employer le mercure. Il est peut-être à propos que le mouvement de la liqueur, qui cherche toujours son niveau pendant qu'on suit un astre qui change de hauteur, soit sensible, afin qu'on puisse discerner si ce mouvement est uniforme ou variable, &c. & tirer de-là des inductions. Or, c'est ce qu'on peut procurer sans exposer cette liqueur à des balancemens; c'est, dis-je, ce qu'on peut effectuer, en combinant avec le mercure une autre liqueur beaucoup plus légère, à peu près comme dans les barometres composés. Le tuyau qu'occupera le mercure aura certaine largeur, & sera joint à un tuyau uniforme beaucoup plus étroit, où l'autre liqueur s'étendra; c'est à côté de ce second tuyau, que sera appliquée une échelle qui marquera la situation de l'instrument. Je ne m'arrête point à marquer ce qu'il faudra pratiquer pour bien diviser cette échelle: si, par exemple, on donne 5 lignes de diametre au tuyau destiné à loger le mercure, & une ligne seulement au petit tuyau; la colonne de liqueur légère contenue dans ce tuyau, aura 25 fois plus de vitesse que celle de mercure: mais nonobstant cette différence de vitesse, les deux liqueurs n'auront guere plus de disposition à balancer, à cause de la différence des masses; & pour réprimer d'autant plus le balancement, on pourra donner seulement un tiers de ligne de diametre à l'ouverture par où le mercure passera d'une des branches du niveau dans l'autre. Ainsi le filer du mercure qui coulera par ce trou, sera plus de deux cens fois plus petit que les colonnes de cette liqueur. Cela posé, il y aura, selon mon estime, aussi peu de balancemens que dans le cas de M. Hadley, &c.

5^o. Enfin, comme la lenteur avec laquelle la liqueur parvient au niveau, ou s'en approche, est incommode & nuisible, surtout quand on travaille à découvrir l'heure,

M m m ij

lorsque le passage par où file la liqueur, est aussi petit que nous l'avons fait jusqu'ici, à proportion de la capacité du corps du niveau : je voudrois que l'aire de ce passage pût être diversifiée à volonté, & cela paroît possible, si le corps du niveau a un diametre approchant de celui que j'ai marqué au n^o précédent ; je veux dire qu'on pourroit faire une clef qu'on gouverneroit à discrétion, & cependant avec mesure, par un petit roüage ou une vis, & qui laisseroit à la liqueur un passage plus ou moins étroit. Je n'ai pas besoin de dire qu'on laisseroit plus de liberté de se mouvoir à la liqueur au commencement de l'opération, & lorsqu'on la réputeroit assez éloignée du niveau, mais qu'on restreindroit cette liberté à mesure qu'on l'estimeroit plus voisine de l'état désiré. On pourroit aussi avoir une deuxieme clef, qui seroit faite à l'ordinaire, & serviroit à arrêter entierement la liqueur lorsqu'on le jugeroit à propos.



Fig. 1.

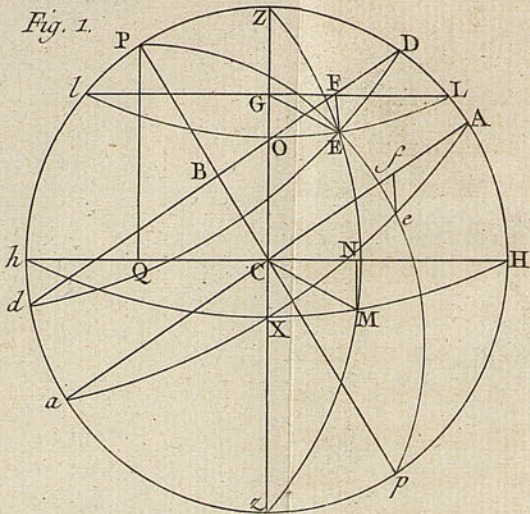


Fig. 2.

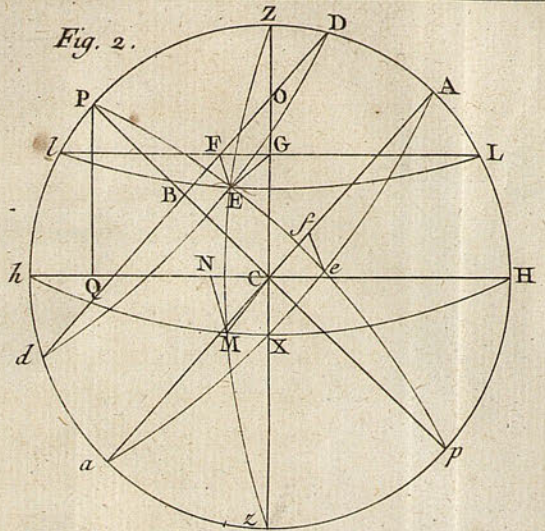


Fig. 3.

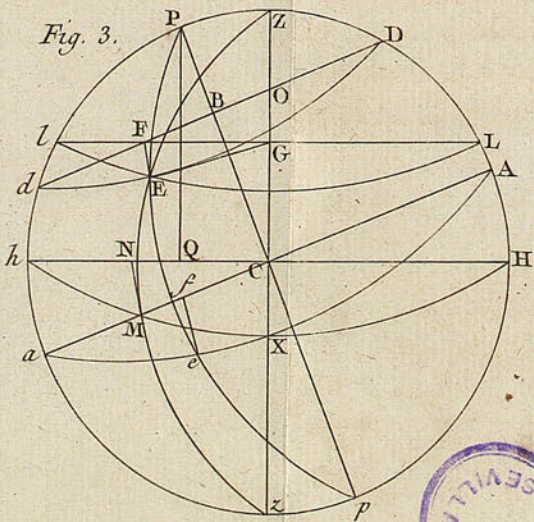


Fig. 4.

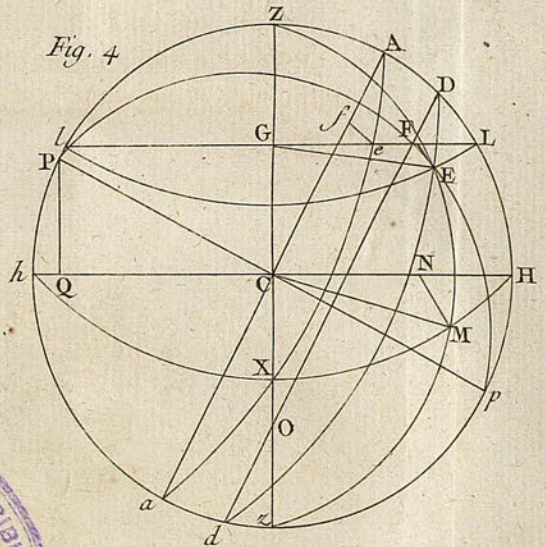


Fig. 5.

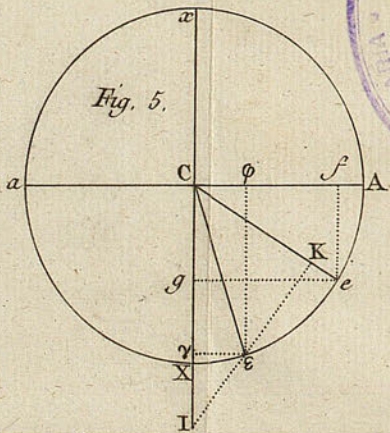


Fig. 6.

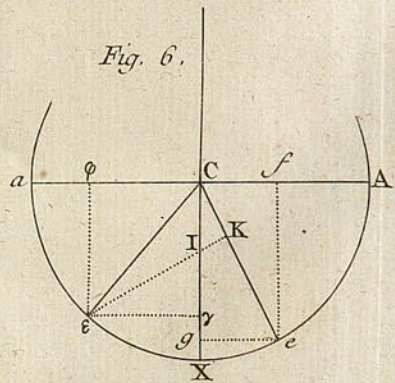


Fig. 7.

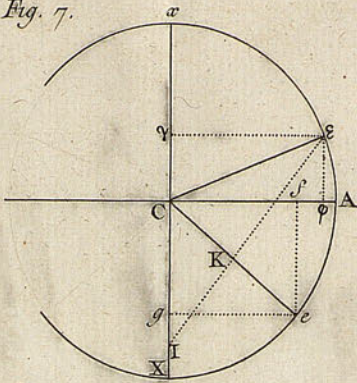


Fig. 8.

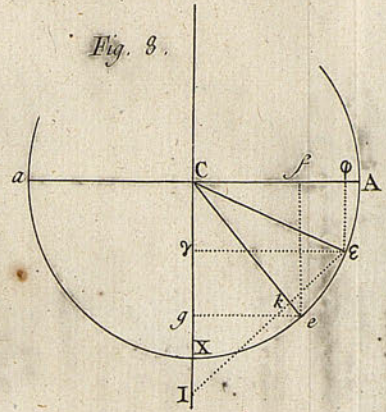


Fig. 9.

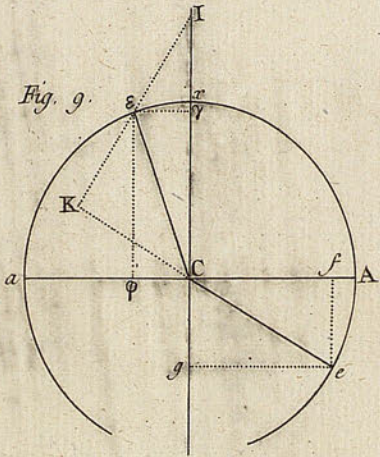


Fig. 10.

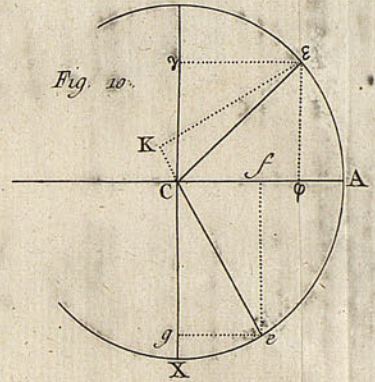


Fig. 11.

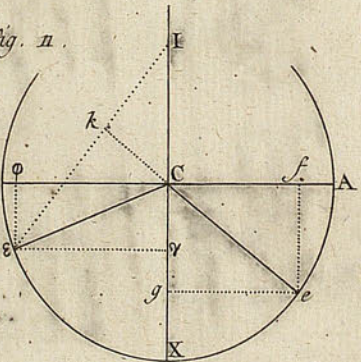
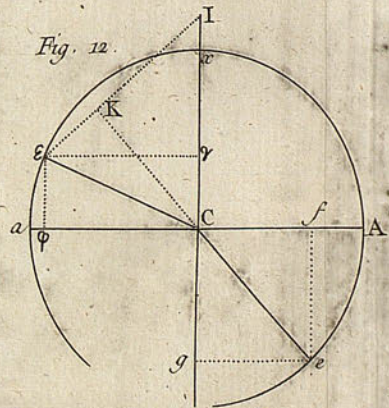


Fig. 12.



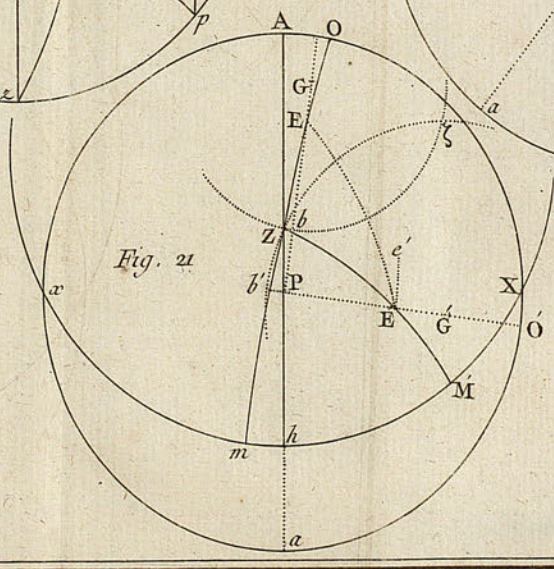
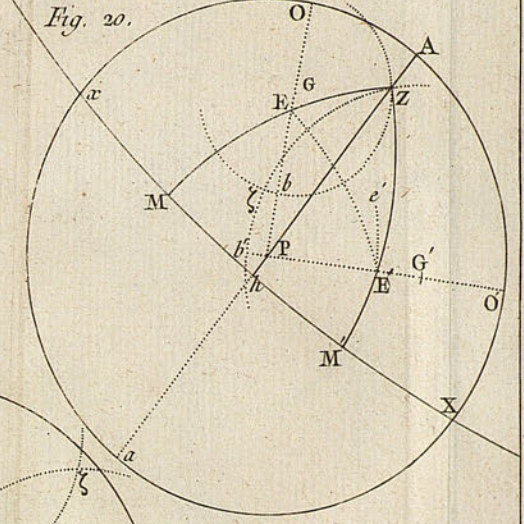
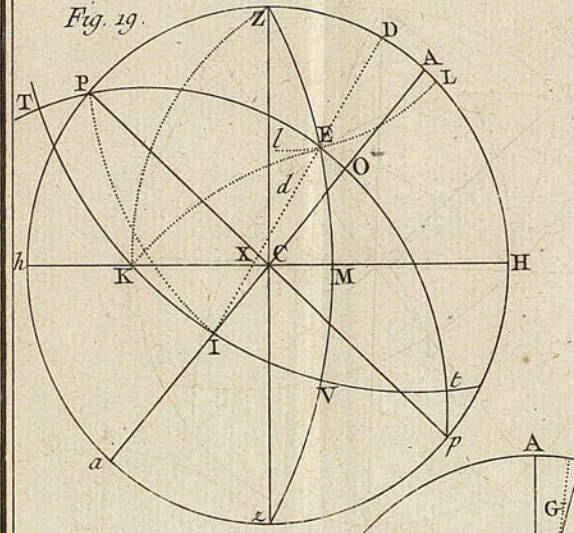
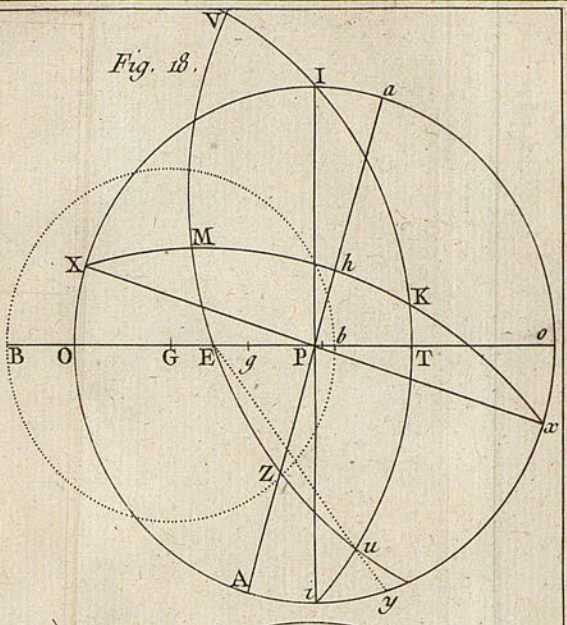
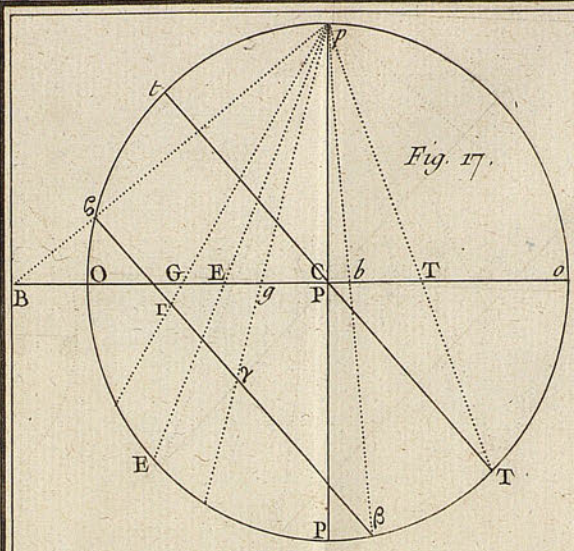


Fig. 22.

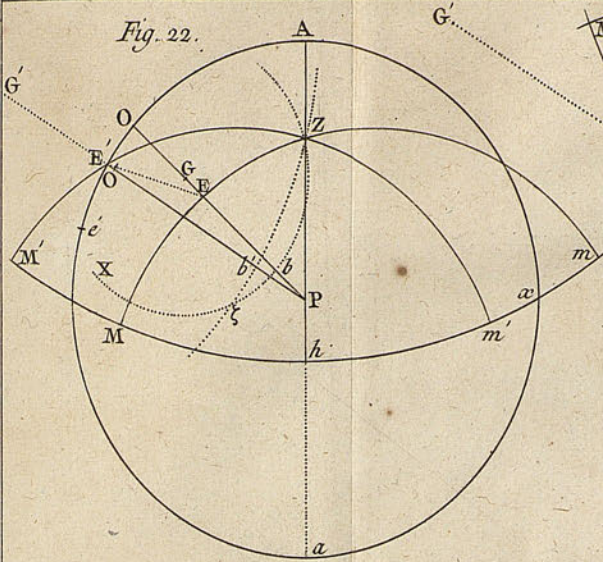


Fig. 23.

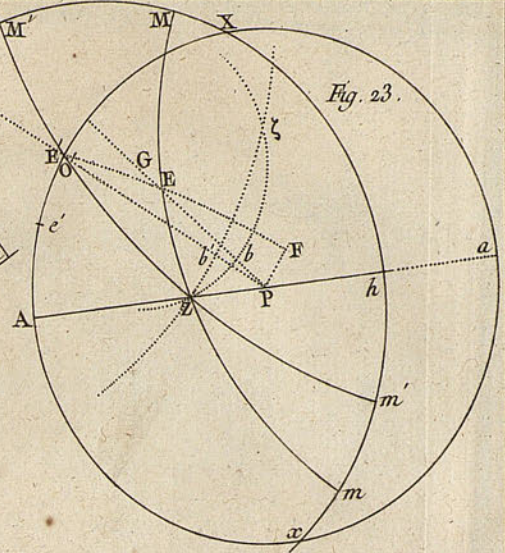


Fig. 24.

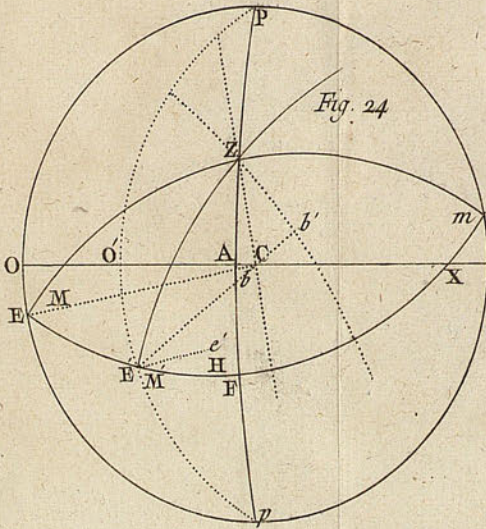


Fig. 25.

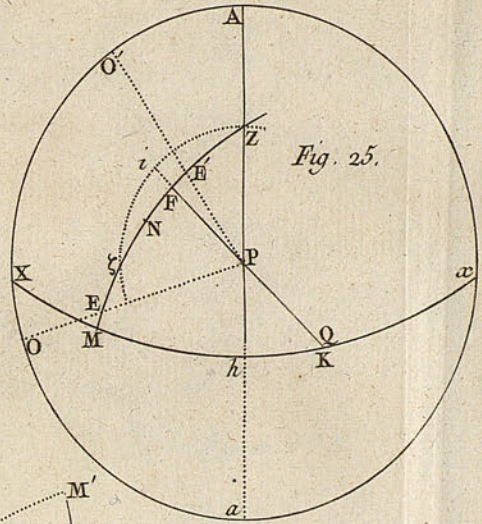


Fig. 26.

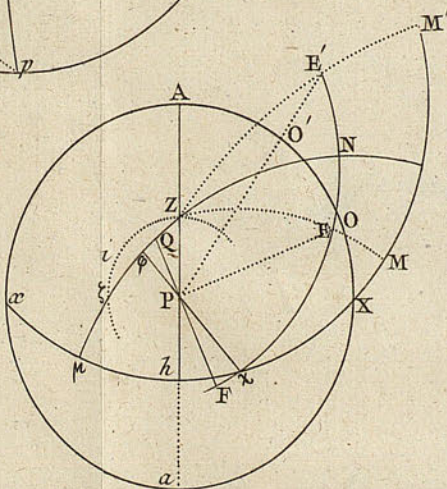


Fig. 27.

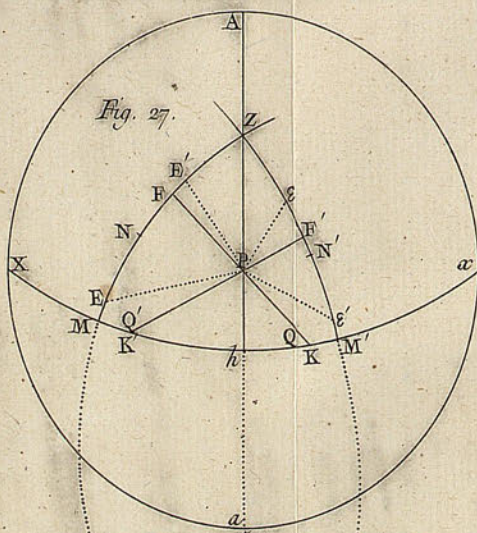


Fig. 28.

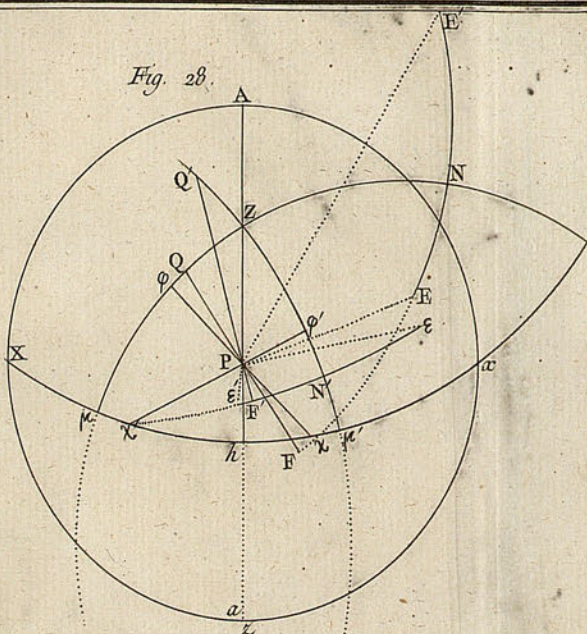


Fig. 29.

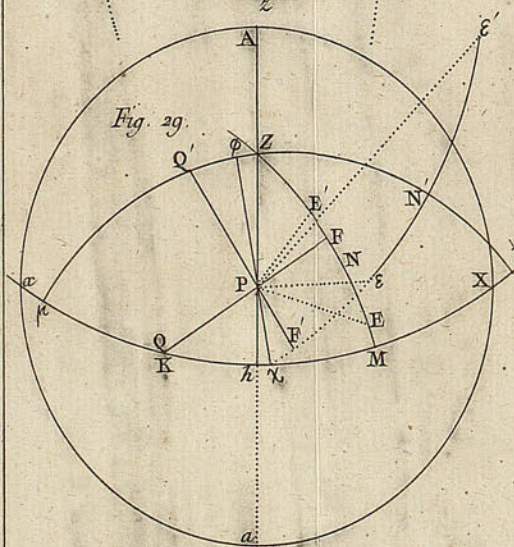


Fig. 30.

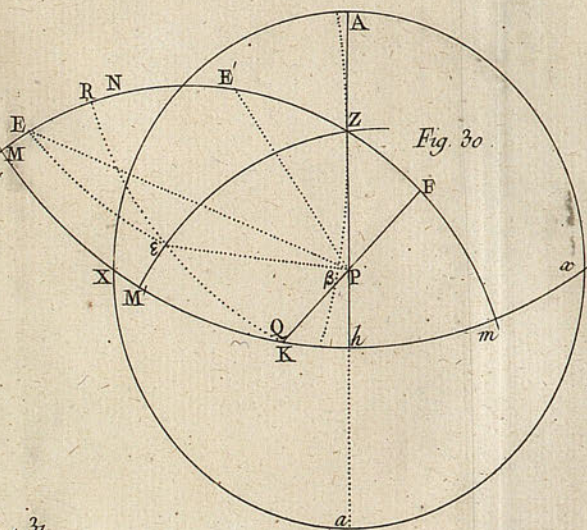
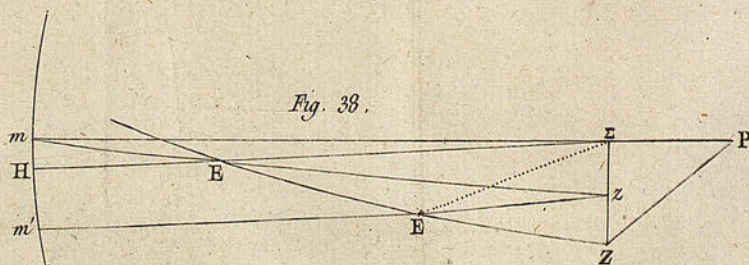
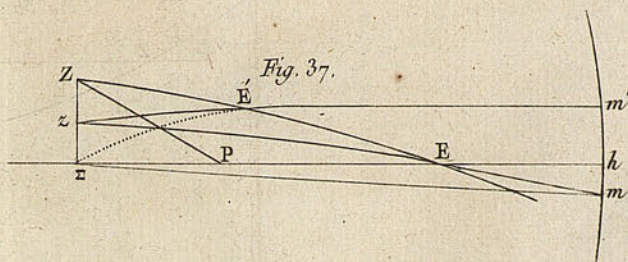
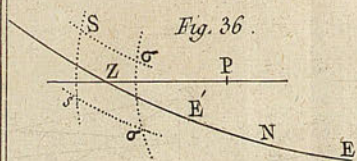
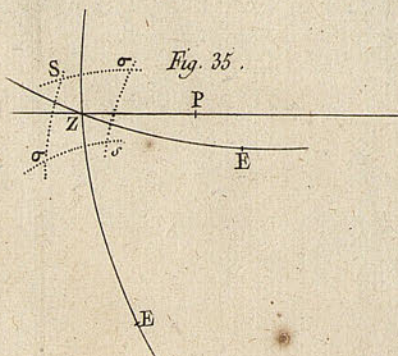
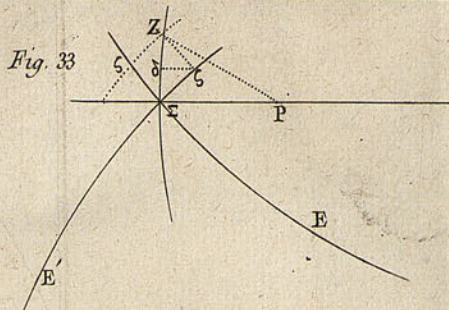
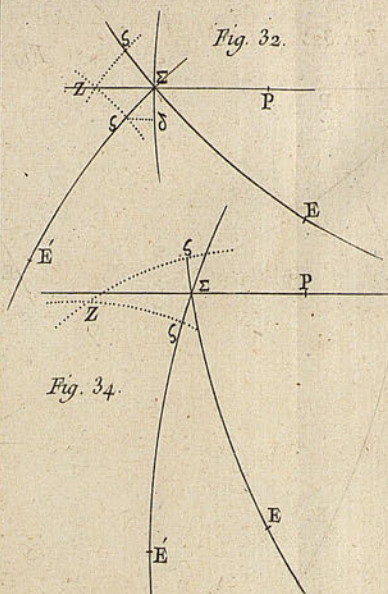
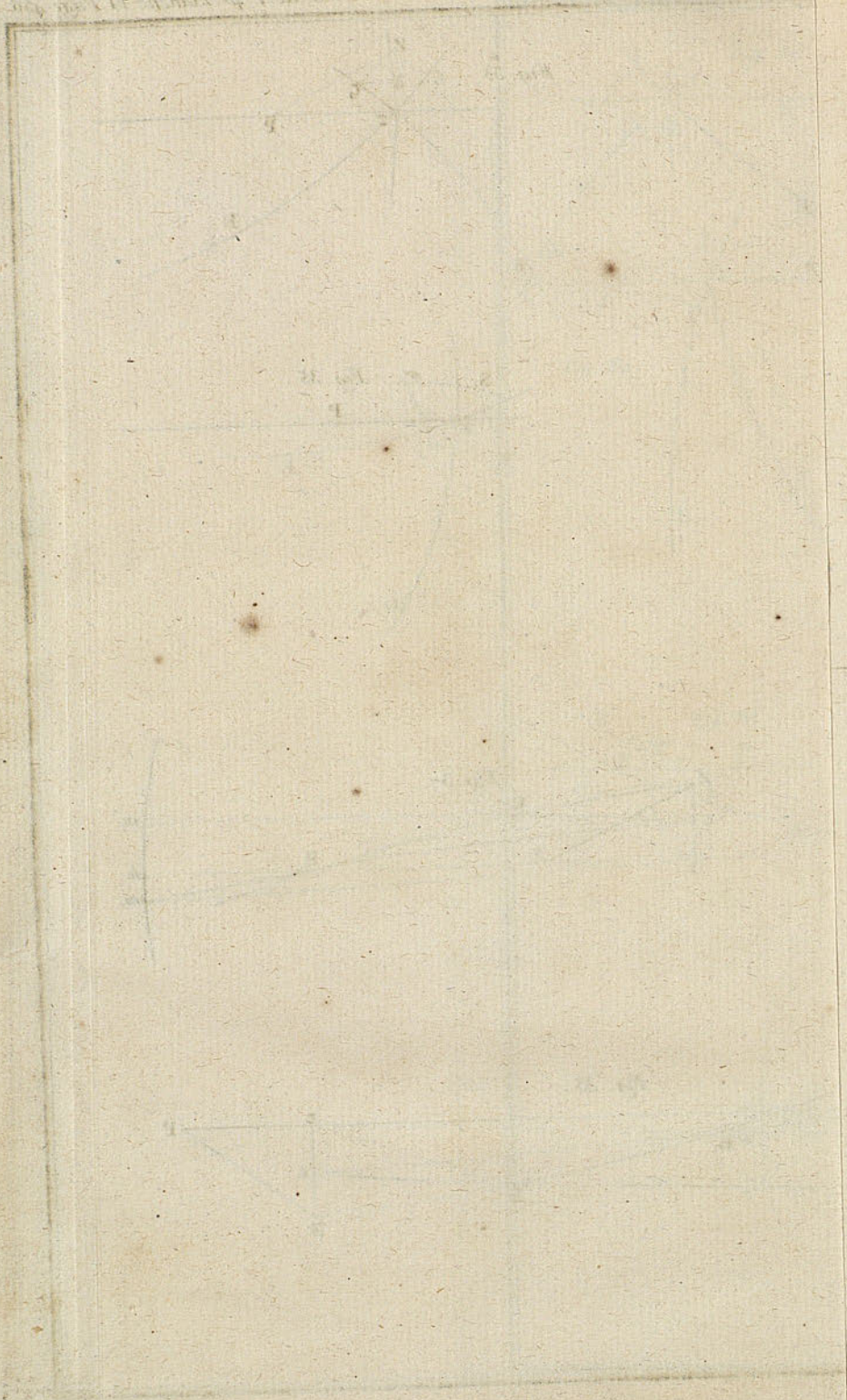


Fig. 31.





From the 1st of March to the 1st of April



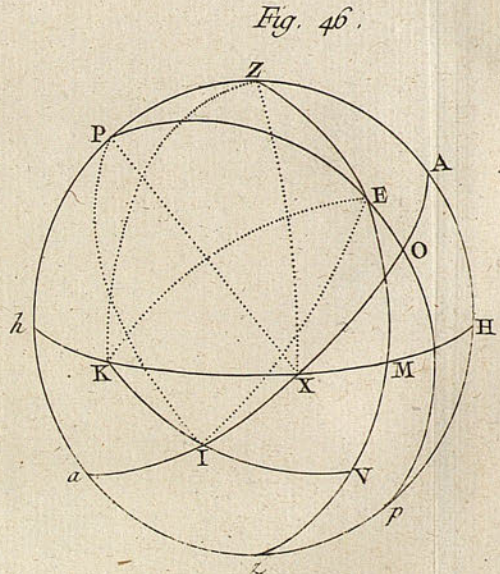
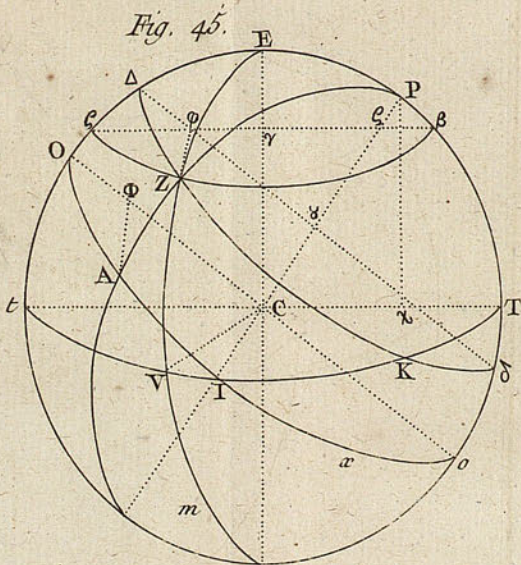
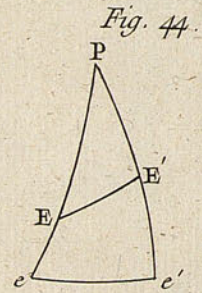
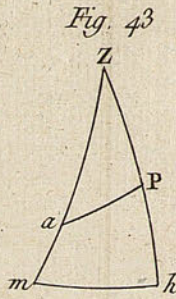
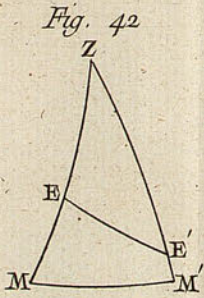
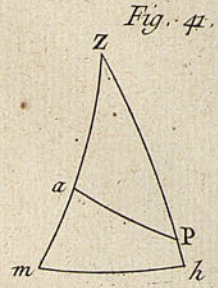
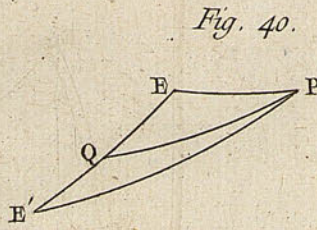
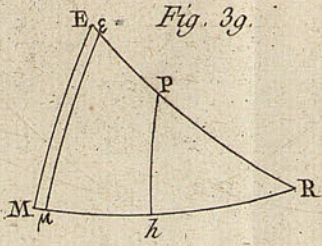


Fig. 47.

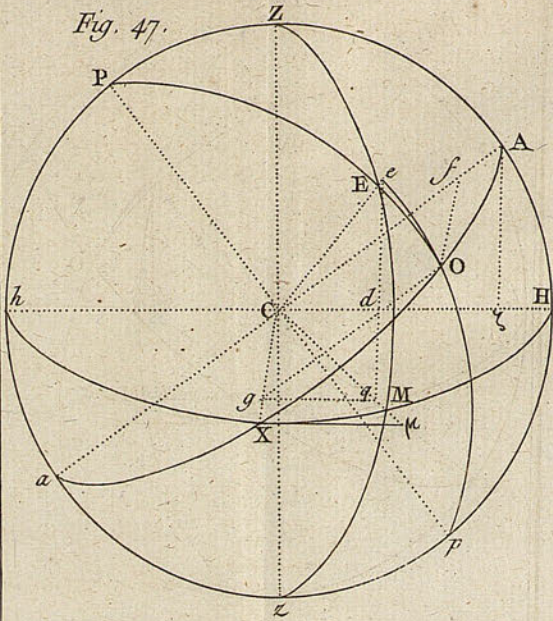


Fig. 48.

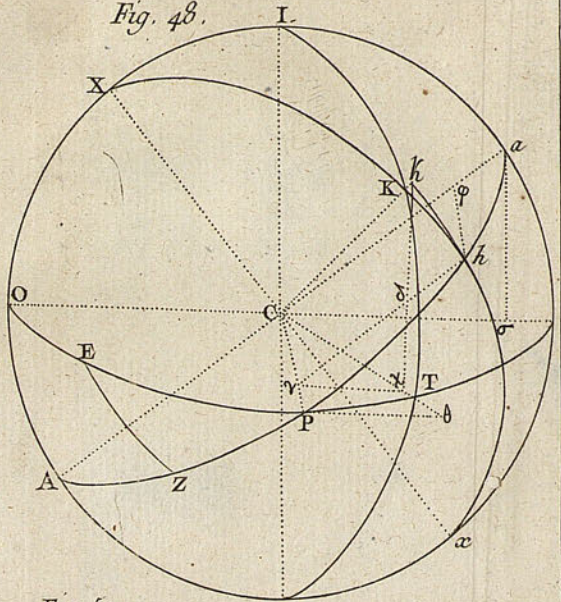


Fig. 49.

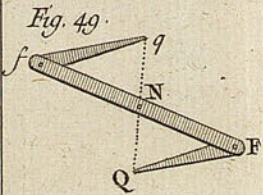


Fig. 50.

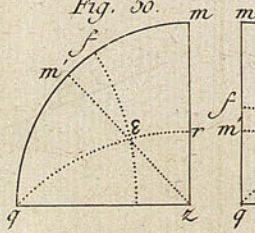


Fig. 51.

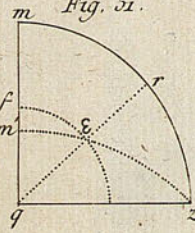


Fig. 52.

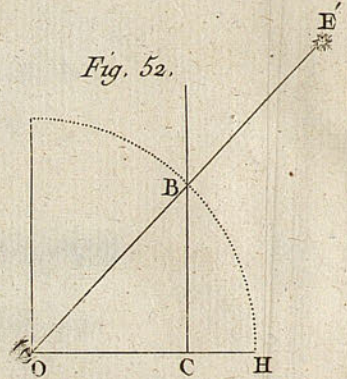


Fig. 53.

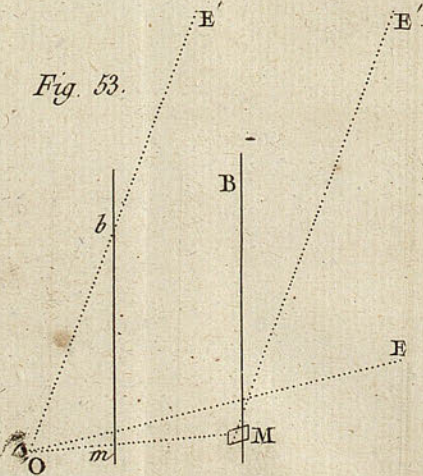


Fig. 54.

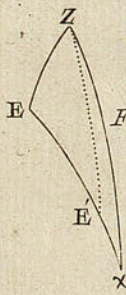
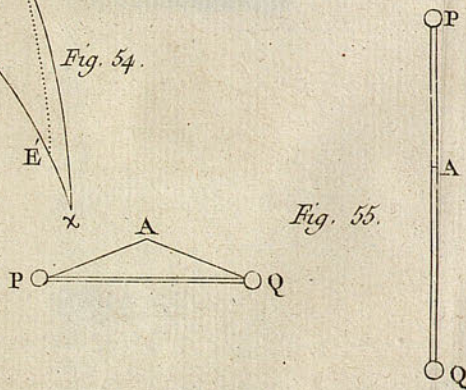


Fig. 55.



MEMOIRE

SUR LE

PROGRAMME

Pour le Prix de 1747.

*La meilleure maniere de trouver l'heure en Mer,
par observation, soit dans le jour, soit dans
les crépuscules, & sur-tout la nuit,
quand on ne voit pas l'horison.*

Semper id melius est quod optimo propinquius est, Arift. lib II. de Cælo.

MEMOIRE

DE

PROGRAMME

Pour le Prix de 1777.

Les auteurs de ce programme ont l'honneur de
présenter à l'Académie, les deux questions
suivantes, et de leur proposer de
les résoudre par l'Académie.

Les auteurs de ce programme ont l'honneur de
présenter à l'Académie, les deux questions
suivantes, et de leur proposer de
les résoudre par l'Académie.



MEMOIRE

SUR

LE PROGRAMME

Pour le Prix de 1747.

La meilleure maniere de trouver l'heure en Mer, par observation, soit dans le jour, soit dans les crépuscules, & sur-tout la nuit, quand on ne voit pas l'horison.

Semper id melius est quod optimo propinquius est... Arist. lib. 2. de Caelo.



L'ACADEMIE Royale dans la même feuille, semble désirer uniquement qu'on fournisse aux Navigateurs les moyens *méchaniques* les plus sûrs, pour faire en mer, malgré l'agitation du vaisseau, les observations dont on peut conclurre l'heure.

C'est pour remplir cet objet, que je me suis uniquement attaché à la recherche des instrumens, & que j'aurai l'honneur d'en proposer deux, dont l'un pourra servir en tout tems, pendant la nuit & le jour, sans aucun recours au Soleil ni aux étoiles, & l'autre pendant tous les momens du jour, où le ciel sera pur, & le Soleil visible.

PREMIERE PARTIE.

AVANT que de décrire ce premier instrument, je supplie mes Juges de me pardonner quelques observations que je vais faire ici, touchant les horloges à *roüage*, uniquement pour leur prouver que c'est avec connoissance de cause, quand je les abandonne pour chercher un moyen qui me paroît plus sûr.

Nos meilleures pendules ne sçauroient être d'aucun usage sur mer, par la principale raison que la fréquente agitation du vaisseau feroit arrêter le pendule. Ce premier inconvénient suffit pour en interdire l'usage sur les bâtimens, sans avoir besoin de parler ici de l'allongement & raccourcissement des métaux; de la différence des vibrations dans un air plus ou moins pesant, des différens degrés de force des ressorts, suivant la différente température de l'air, & de l'*usure* continuelle d'une infinité de pieces très-déliées, qui travaillent toutes avec force, & dont chacune en particulier ne peut pas souffrir la moindre altération, sans que la justesse de la piece s'en ressente.

La montre de poche se ressent moins de l'agitation du vaisseau, ou pour mieux dire, ne ressent que les mouvemens de la personne qui la porte, & dans une montre *excellente*, ces mouvemens ordinaires ne la dérangent pas beaucoup, surtout quand elle est dans sa premiere fraîcheur: mais l'avantage qu'elle a sur les pendules, se trouve bien compensé par la différence du *régulateur*; je parle de son petit balancier, dont les vibrations trop multipliées, ne seront jamais comparables pour la justesse, à la longueur d'un pendule à *secondes*.

L'invention

L'invention admirable du ressort spiral, est d'un grand secours pour entretenir pendant quelque tems la justesse dans ces petites machines: mais étant lui-même sensible aux changemens de l'air, nous sommes obligés de tems en tems, de le *bander* ou *lâcher*, par le moyen du rateau, afin de le remettre dans un état de force proportionné à l'action qu'il doit produire. Ce qu'il y a de fâcheux, c'est qu'on ne peut appercevoir ce dérangement que par comparaison à quelqu'autre piece sûre, ou à l'aspect des astres, & l'on n'a souvent sur mer, ni l'un ni l'autre de ces deux moyens.

Tout ce que je viens de dire ne doit s'entendre que d'une montre excellente à tous égards, & sortant depuis peu de la main de l'ouvrier. Mais en est-il beaucoup de ce nombre? Enfin, je suppose qu'il y en ait une parfaitement juste, il est impossible qu'elle le soit long-tems: les trous du *coq*, de la *potence*, & ensuite ceux des *platinnes* s'agrandissent insensiblement; les pivots prennent du jeu, & l'engrènement s'affoiblit; le peu d'huile qu'on y met seche, & rend les frottemens plus sensibles; les pointes de la roue de rencontre s'émoussent, les palettes du balancier se creusent, & les vibrations deviennent plus courtes; le grand ressort tire plus vivement dans certains tems que dans d'autres, & une infinité d'autres dérangemens que mes Juges connoissent mieux que moi, rendent la montre de poche si incertaine, qu'on ne peut pas raisonnablement se flatter qu'une bonne montre puisse aller quatre jours de suite, sans s'écarter de quelques minutes. Mais si une montre excellente dépend de tant de cas qui peuvent la rendre mauvaise, que fera-ce de celles qui ne sont que médiocres? D'où je conclus que toutes les pieces à *roûage* qu'on a trouvées jusqu'ici, & probablement

toutes celles qu'on imaginera dans la suite , seront insuffisantes pour donner l'heure exacte en pleine mer.

Je crois qu'on pourroit mieux réussir par le moyen du sable , si l'on s'appliquoit véritablement à chercher les défauts des *sabliers* ordinaires pour les corriger. La préférence que les Navigateurs ont toujours accordée aux *sabliers* sur les autres horloges , malgré les défauts de ces premiers , est un préjugé qui m'a fait naître l'idée dont j'ai à rendre compte à Messieurs les Commissaires.

Observations sur les défauts des Sabliers ordinaires.

LE défaut le plus commun des *sabliers* consiste dans leur *inégalité*. Il est rare d'en trouver un , qui , comparé à une bonne pendule , ne fasse pas un écart sensible dans le passage d'une bouteille à l'autre , & souvent la même bouteille ne s'accorde pas avec elle-même. On a coutume d'attribuer cette variation aux changemens d'air , & je veux croire que dans certaines occasions l'air y entre pour quelque chose , mais dans le concours de plusieurs causes qui peuvent produire un même effet , il est aisé de prendre le change , en l'attribuant à l'une plutôt qu'à l'autre , quand on n'use pas de précaution.

Qu'une bouteille soit régulièrement plus courte que l'autre , c'est une marque visible que le *trou* ou *stile* , n'est pas exactement cylindrique dans l'épaisseur de la feuille de métal , ayant un côté plus évasé que l'autre ; mais qu'une même bouteille ne s'accorde pas avec elle-même , je crois à n'en pouvoir douter , que cela vient de l'*inégalité des grains du sable*. Je vais tâcher de me faire entendre.

Quoique tous les grains d'un sable bien criblé , paroiss-

sont égaux à nos yeux, dépouillés des secours de l'art, il est cependant certain, & les microscopes nous en convainquent, qu'il y en a de beaucoup plus gros les uns que les autres.

Imaginons maintenant un de ces gros grains placé sur le bord du trou, de telle façon qu'une petite partie de sa masse soit *en-dedans*, & l'autre plus grande *en-dehors* : ce grain ne passera pas, parce que les deux tiers de sa masse sont appuyés sur la plaque de métal, mais son autre tiers bouchera pendant tout l'écoulement une partie physique de ce trou, & plusieurs autres grains en faisant autant tout autour du trou, il se trouvera un peu resserré, & la bouteille sera plus long-tems à couler : mais si dans une autre occasion, il se trouve sur les bords un moindre nombre de gros grains, le trou sera plus libre, & la bouteille finira plutôt.

Voilà, MM, un défaut qui doit arriver très-souvent, & qu'on attribue à la secheresse ou humidité de l'air. Pour me convaincre de la vérité, j'ai percé dans une plaque de 3 lignes d'épaisseur, deux trous coniques opposés, dont les pointes se rencontrent au milieu de l'épaisseur de la plaque, & y ayant mis du sable d'Allemagne bien criblé, j'ai trouvé une grande justesse dans chaque bouteille en particulier (à cause que tous les gros grains qui entrent dans la base du cone, sont forcés de passer par la pointe, n'ayant plus de superficie platte où pouvoir s'arrêter); mais aussi je n'ai jamais pû parvenir à rendre les deux bouteilles parfaitement égales entre-elles, parce que probablement les deux pointes des deux cones ne sont pas parfaitement unies & égales.

Il arrive aussi que certains petits poils ou *atomes*, qui voltigent dans l'air, s'introduisent dans le sablier à la faveur du sable, à mesure qu'on le met, & que venant quel-

quelquefois à être couchés diamétralement sur le trou, ils separent le *coulage* en deux, ce qui fait retarder considérablement le sablier, & quelquefois arrêter : avec un trou conique, ce défaut ne doit arriver que très-rarement, parce que ceux de ces poils qui descendent horisontalement, venant à toucher les parois du cone par un bout, l'autre bout du poil s'abaisse, & il arrive à la pointe du cone dans une situation verticale, qui lui permet de passer aisément.

EXPERIENCE.

SI vous mettez un, ou plusieurs sabliers des meilleurs, sur une planche horisontale, dont un bout sera appuyé sur une table, & l'autre sur une *roulette dentelée*, que l'on fera tourner avec une manivelle, cette roulette causera un trémoussement à la planche, qui fera arrêter tous les sabliers : en voici la raison physique. A force d'agitation, l'air qui se trouve renfermé parmi les grains de sable dont la bouteille supérieure est pleine, se dégage & gagne le haut de la bouteille, laissant les grains de sable si serrés entre eux, après la séparation de l'air, qu'il se fait au-dessus du bouton une petite *voûte*, & bien-tôt il ne coule plus rien, parce que l'air inférieur ne trouve plus de passage pour traverser le sable qui est dans la bouteille supérieure. Cette expérience que je découvris par hasard, prouve ce que j'ai dit plus haut, que l'air, dans certaines occasions, peut causer du dérangement au sable; car de même qu'un sablier bien *trémoussé* s'arrête totalement, de même un autre moins trémoussé pourra couler plus lentement, sans toutefois s'arrêter, parce qu'il restera encore assez d'interstice parmi le sable supérieur, pour que l'air trouve un petit passage.

Description d'un Sablier de 30 heures, propre à servir sur mer, marquant distinctement les heures & les minutes une à une, & qui ne s'arrête pas dans le tems même qu'on le retourne.

LE Sablier dont je vais avoir l'honneur de vous entretenir, & dont j'ai tout lieu de croire que l'idée est neuve, m'embarasse presque autant à décrire sur le papier, qu'il m'a donné de peine à imaginer & à construire. J'espère cependant me faire entendre, à force de multiplier les figures, en attendant que le modele effectif acheve de présenter à vos yeux ce qui pourra manquer du côté de l'explication. Il est d'un assez grand volume, & fort pesant : mais si avec ces deux secours qui m'étoient nécessaires, je vous offre une Piece qui peut devenir excellente, j'espère que vous me pardonnerez l'un en faveur de l'autre.

Il est composé de fer & de bois. Le corps du sablier est une caisse *AB*, *Fig. 1*, de bois de noyer, carré-longue, de 40 pouces de longueur, 12 pouces de largeur, & 7 pouces d'épaisseur extérieure. Elle est montée sur deux pivots qui sont au centre, lesquels pivots sont supportés à leur tour par une chape de fer *CD*, de 3 pouces de largeur & de 5 lignes d'épaisseur.

Cette chape est suspendue par une boucle *E*, pliante à tout sens, pour obéir à toutes les agitations du vaisseau. Le cadran & la quadrature qui est dessous, sont renfermés dans une boîte de fer extérieure *FG*, arrêtée solidement sur la chape : une aiguille marque les minutes une à une, & les heures, qui marchent en sautoir, paroissent successivement à travers l'ouverture *X*. Le tout est couvert d'une glace, comme aux pendules.

Quand on veut tourner le sablier, on leve un arrêt qui est au haut de la chape, on prend le bas de la caisse avec la main droite, qu'on fait tourner suivant l'arc ponctué 1, 2, 3, 4, & dès que *B* est arrivé en *A*, l'arrêt qui est à ressort, accroche la caisse, & cela suffit pour 24 heures & plus, comme une montre de poche.

La *Fig. 2* représente le profil du sablier, afin de faire remarquer les deux pivots *I, H*, sur lesquels tourne la caisse. J'ai répété les mêmes lettres de la *Fig. 1*, pour qu'on retrouve chaque piece plus aisément. Il y a aussi dix lucarnes qui se répondent, 5 de chaque côté : elles sont garnies d'un morceau de glace, & servent, sans beaucoup de nécessité, les unes pour connoître si le sablier a besoin d'être monté, & les autres pour voir si le sable coule net, & sans embarras, afin d'y remédier sur le champ, supposé que quelque matiere dérangeât le coulage, comme je le dirai plus bas. Voilà, *MM*, pour ce qui regarde l'extérieur de cette piece, l'intérieur n'est pas si facile à développer.

Les pieces intérieures du Sablier.

LA caisse *KLM*, *Fig. 3*, qui forme le corps du sablier, est ici représentée hors de la chape de fer, j'en ai aussi retranché la planche du devant & celle du derrière, pour laisser voir la construction des entonnoirs : j'ai grossi cette figure pour y pouvoir détailler les petites pieces, mais c'est la même marquée *AB* dans la *Fig. 1*, & dans la même situation.... Cette caisse est divisée en trois parties, par deux fonds intermédiaires *NO*, *PQ*; les deux grandes parties *K* & *L*, tiennent la place des deux bouteilles des sabliers ordinaires, & la partie *M* peut être regardée comme le bouton des mêmes sabliers ordinaires.

Je leur donnerai ce nom pour abrégé ma description.

Sur les fonds intermédiaires dont je viens de parler; vous voyez des pieces de bois attachées dessus & dessous, lesquelles forment la *coupe* ou *profil*, de 4 entonnoirs (2 droits, 2 renversés), dont les autres pieces de complément tiennent aux deux autres planches, retranchées de cette troisième figure.

La piece courbée *MR*, qui paroît ici ne porter sur rien, est appuyée & fixe sur un support immobile, que je décrirai dans la *Fig. 6*: il suffit de sçavoir ici, que cette piece est une plaque de fer de 4 pouces de large, qui met à couvert la croix que vous voyez au-dessous, & qui outre cela, soutient un cinquième entonnoir immobile *RS*, qui est le *couloir immédiat* par où tout le sable s'écoule. Je lui donnerai aussi ce nom, pour le distinguer des 4 grands entonnoirs *mobiles* qui suivent le mouvement de la caisse quand elle tourne.

Après avoir montré la division du sablier en trois parties, il est tems d'expliquer comment se fait le passage du sable, & l'effet qu'il produit. Supposons donc que le sablier vient d'être tourné, & que la bouteille *K* est pleine de sable. 1°. Il est naturel que ce sable sorte par la pointe *S* du grand entonnoir *KTSV*, & comme ce sable, en sortant du grand entonnoir, rencontre le *couloir RS*, qui n'est qu'à deux lignes au-dessous, ce sable, dis-je, après avoir rempli le couloir *RS*, fait un petit ras au-dessus (que j'ai marqué par des points), & ce ras engorge le grand entonnoir, & ne lui permet de couler qu'à proportion que le *couloir* délivre le sable par le bas *R*: cela se fait successivement, sans que le sable puisse se répandre ailleurs.

2°. Le sable qui sort du couloir *RS*, rencontre au-dessous un des quatre creusets qui sont attachés sur la *croix*:

tournante. Il y coule pendant une *minute* précisément, après quoi ce creuset, perdant l'équilibre, fait faire un quart de tour à la croix; par ce moyen, le creuset verse le sable qu'il contenoit, & un second creuset se trouve précisément sous le couloir, pour continuer à recevoir le sable. J'expliquerai ailleurs ce qui détermine cette croix à faire précisément & invariablement un quart de tour à chaque minute.

3°. Le sable qui sort du creuset lorsqu'il se renverse, tombe dans le grand entonnoir *XM*, & passe par un tuyau *X* qui se trouve ouvert, parce que le clapet *Y* est renversé par l'effet de son poids & de sa situation, comme la figure le fait voir. La trainée de points qui représentent le sable, aidera à l'explication. C'est de cette façon que tout le sable de la bouteille *K* traverse le bouton *M*, & vient se loger dans la bouteille *L* pendant 28 ou 30 heures, après quoi il faut retourner le sablier, si l'on ne veut pas qu'il s'arrête.

4°. Quand on retourne le sablier, & que la bouteille *L* pleine de sable commence à prendre le dessus, le clapet *Y* se ferme de la même façon que vous voyez l'autre clapet *V*, & celui-ci s'ouvre de la même façon que vous voyez le clapet *Y* dans cette troisième figure.

R E M A R Q U E.

Pendant ce tems-là, le sable qui se trouve dans le couloir *RS*, continue de s'écouler sans perte de tems, & il y en auroit pour fournir plus de 4 *minutes*: la croix tournante fait par conséquent ses fonctions, & la mesure du tems n'est point interrompue tandis qu'on tourne le sablier.

Il faut cependant tourner ce sablier rondement, surtout quand la bouteille pleine commence à prendre le dessus,

dessus, parce que le couloir n'étant pas alors sous le grand entonnoir, le sable sort en pure perte, & retombe en-bas sans toucher les creusets, qui sont à couvert. Il est vrai que le trou des grands entonnoirs n'étant que de 13 lignes de diametre, il ne se répand pas beaucoup de sable dans cet instant, mais il convient de le tourner lestement.

Explication détaillée du Couloir.

Le couloir, *Fig. 4*, que je n'ai pas pû détailler dans la *Fig. 3*, mérite de l'être ici en plus grand volume. Il est composé de 4 pieces, unies par un ressort, lesquelles peuvent être séparées dans le besoin, & réunies avec la même facilité. La premiere partie *MR*, dont j'ai déjà parlé dans la troisieme figure, est une large plaque qui met à couvert la croix tournante, & soutient tout l'assemblage du couloir, sçavoir la gorge 5, 6 qui est fixe; le tamis 1, 2 qui coupe le couloir en deux parties, & enfin le couloir proprement dit 3, 4, où il n'entre point de sable qu'après avoir passé par le tamis 1, 2.

Le tamis 1, 2 de métal, *Fig. 5*, est percé de 350 trous, quatre fois plus petits que le trou du couloir, en sorte que tout ce qui passe par un trou du tamis, ne peut occuper que le *quart* du trou du couloir, & par conséquent le couloir ne peut pas arrêter. Au reste, quand les parties grossieres boucheroient les trois quarts du tamis, il resteroit encore assez de jour pour fournir surabondamment au couloir. Cependant ce tamis qui se met en coulisse, peut être retiré de sa place quand on veut, par une porte fermée à clef, qui se trouve vis-à-vis; on jette les ordures qui peuvent s'y trouver, & on le remet en place sur le champ.

Usage du Tamis ou Crible.

Outre que le tamis sert continuellement à arrêter tout ce qui pourroit embarrasser le couloir, il sert encore pour découvrir en très-peu de tems tout ce qu'il peut y avoir de parties grossieres ou détachées du bois : car on ôte de place le couloir 3, 4, ne laissant que le tamis 1, 2, qui passe & repasse tout le sable en très-peu de tems, & fournit l'occasion de retirer tout ce qu'il peut y avoir de grossier.

Remarque touchant la Porte.

Quelque nouvelle & dangereuse que paroisse une porte à un sablier, laquelle peut, par son ouverture, donner entrée à quelque atome funeste, il faut ici raisonner différemment, & ne point envisager ce sablier sur le pied des sabliers ordinaires. Car 1°, on ne doit pas s'embarrasser de la perte de quelque peu de sable, attendu que la mesure n'en est pas fixe. 2°. Le couloir est ici fort grand, & d'une figure conique, il est d'ailleurs précédé d'un tamis qui arrête les ordures, & par conséquent les atomes ne sont pas à beaucoup près si dangereux que dans les sabliers ordinaires : mais d'un autre côté cette porte est infiniment commode pour retirer toutes les parties grossieres qui pourroient se détacher du bois ou du métal, & même dans un cas extraordinaire, où le couloir seroit engorgé, on peut le retirer, & le remettre sur le champ, sans rien changer de la justesse du sablier.

D'ailleurs, outre que cette porte ne s'ouvrira qu'en cas de besoin, & presque jamais qu'après une certaine épreuve, je suppose qu'on aura pour lors attention de le faire dans un endroit à l'abri du vent & de la poussière,

& qu'elle ne restera ouverte que *deux instans*, l'un pour retirer le tamis, & l'autre pour le remettre.

Explication du Support intérieur.

Ce qu'on a le plus de peine à concevoir dans ce sablier, quand on ne voit pas l'intérieur, c'est une piece *immobile* placée au milieu d'une caisse *mobile*, en sorte que dans le tems que tout le sablier tourne de haut en bas, il y a une piece intérieure dans son milieu qui ne tourne jamais, & au milieu de cette piece *immobile*, il y en a une autre *mobile*, qui est la croix des creufets, le tout sans être sujet au moindre dérangement... Les trois cercles ponctués de la *Fig. 3* peuvent servir à en donner une idée. Le plus petit des trois cercles renferme la croix des creufets, qui est mobile, puisqu'elle tourne d'une minute à l'autre : tout ce qui est renfermé entre le petit & le moyen cercle, est immobile ; enfin tout ce qui est en dehors du plus grand cercle est mobile, & tourne toutes les fois qu'on retourne le sablier : l'espace entre le plus grand & le moyen cercle, est le jeu qu'il y a entre les pieces *mobiles* & celles qui sont *immobiles*.

Pour rendre ceci intelligible autant que je le pourrai, il faut considérer dans la *Fig. 6* la chape de fer *CD*, dont j'ai retranché la caisse ou corps du sablier. Au milieu de cette chape, il y a une autre piece de fer *EFGH*, forgée d'une seule piece, laquelle a deux forts tenons *E, F*, & un espace vuide *GH*, dans lequel vuide se trouve placée la croix des creufets de la *Fig. 3* & 7, que je représente ici de profil dans la *Fig. 6*.

Les deux tenons *E, F* du support *EFGH*, sont ronds aux endroits *E, F*, & quarrés dans l'épaisseur de la chape *CD*, ce qui rend ce support immobile, c'est-à-dire, in-

timement lié avec la chape, & ne faisant pour ainsi dire qu'une même piece.... Ce support *EFGH* ne paroît du tout point quand la caisse du sablier est en place, comme à la *Fig. 2*, parce qu'il est tout intérieur, & cette caisse porte entierement sur les deux tenons *E, F*, qui sont les mêmes de la *Fig. 2. I, H*, & que j'ai dit être ronds, afin que la caisse puisse tourner sans que la chape *CD*, ni le support *EFGH* tournent le moins du monde.

O B S E R V A T I O N.

Quoique le plan du support *EFGH* paroisse ici parallèle au plan de la chape *CD*, il faut cependant se souvenir que je ne l'ai représenté de cette façon que pour me faire entendre; mais le plan du support croise directement celui de la chape: les parties *G, H* sont de niveau, quoiqu'elles paroissent ici l'une au-dessus, l'autre au-dessous; en un mot le plan de la chape est *vertical*, & celui du support *EFGH* est *horizontal*. Voyez-en la coupe en *G, H*, *Fig. 4*, où les côtés *G, H* sont représentés de niveau l'un derriere l'autre.

Communication du dedans au-dehors.

Toute la communication du dedans au-dehors se fait; *Fig. 6*, par un trou rond d'environ 4 lignes de diametre, percé dans le tenon *F* suivant sa longueur, dans lequel trou passe une baguette de fer *KL*, de 3 lignes de diametre. Cette baguette, que j'appellerai *baguette de communication*, sert d'arbre à la croix des creusets, *Fig. 7*: elle a un pivot en *K* & un autre en *L*, sur lesquels elle tourne, emportant les creusets avec elle, comme ne faisant qu'une même piece. Cette baguette est appuyée du côté *K*

sur le tenon *E*, & du côté *L* sur un support extérieur *MN*, que nous décrirons plus bas, en parlant de la roue des minutes.

Il faut encore ajouter, que sur le bout *L* de la baguette en question, il y a une croix d'acier arrêtée solidement sur ladite baguette, en sorte que trois pieces n'en font qu'une, sçavoir 1°. La baguette qui tient depuis *K* jusques à *L*. 2°. La croix des creusets, *Fig. 7*, qui se trouve dans l'intérieur du sablier au vuide *GH*. 3°. La croix d'acier fixée sur l'autre bout de la baguette *L*, qui se trouve dans la quadrature, & par conséquent hors du sablier; l'un ne peut pas tourner sans l'autre, & la croix d'acier représente dans la quadrature toutes les situations des creusets qui sont dans l'intérieur du sablier.

Explication de la Quadrature.

La piece *A*, *Fig. 8*, est cette même croix d'acier dont je viens de parler, qui se trouve intimement unie avec la croix des creusets, par le moyen de la baguette qui leur sert d'arbre commun, en sorte que l'une ne peut pas tourner sans l'autre. Cela supposé, nous pouvons, pour la facilité de l'explication, prendre la croix d'acier *ACK* que nous voyons, pour la croix même des creusets que nous ne voyons pas : chaque bras de cette croix représentera un creuset.

Imaginons-nous maintenant que le sable coule sur le bras *K* (ou ce qui est le même, dans le creuset qui lui répond), il est visible que bien-tôt le poids de ce sable chargeant le bras *K*, ébranlera la croix pour la faire trébucher; mais l'autre bras *C* qui lui est opposé, rencontrant le contre-poids *BCDE*, &c. (mobile au point *B*, & soutenu par la console *N*), toute la croix sera retenue jusqu'à ce que

le fable qui coule sur le bras *K* puisse vaincre la résistance du contre-poids *BCD*, &c. alors le bras *K* trébuchera, & viendra en *L*; les trois autres bras auront tous changé de place; le bras *M* sera sous le couloir, & le bras *L* sous le contre-poids *BCD*, &c. & la croix restera dans la même situation, jusqu'à ce que le fable puisse soulever de nouveau le contre-poids *BCD*, &c. & ainsi de suite; de sorte que le fable & le contre-poids se disputant mutuellement l'équilibre, il y aura un *repos* plus ou moins long, suivant que le contre-poids sera plus ou moins pesant.

Explication du Contre-poids.

Un des principaux avantages de ce sablier, est, sans contredit, de pouvoir être *avancé & reculé*, de tant & si peu que l'on veut, sans toucher au trou du couloir, qui demeure toujours le même; & coule toujours également. Cette facilité vient du contre-poids, qui se rend plus *pesant* ou plus *léger*, comme on veut, par le moyen d'un petit carré qu'on peut tourner avec une clef, à droite, ou à gauche, de la même façon qu'on le pratique dans les montres de poche. En voici la construction.

Il y a une vis *DH* montée sur deux supports *CD*, *GE*, de telle façon qu'elle peut bien tourner en tout sens sur ses deux pivots, *D*, *E*, mais non pas avancer ni reculer, ce qui est cause que l'écroue *F* (assez pesante) avance vers *D*, ou recule vers *E*, à mesure que la vis tourne. Cette vis a une tête *HI* assez large, & divisée en 20 dents, lesquelles engrainent dans une vis sans fin, que je ne sçai pas représenter ici, mais dont le carré perce à travers le cadran, entre les 17 & 18 minutes.... Quand on tourne à droite, l'écroue *F* se retire vers *EG*, & le contre-poids devient plus léger, & plus facile à soulever: il

faut par conséquent moins de sable dans le creuset pour trébucher, & l'aiguille marche plus vite, quoique le sable coule toujours également : & quand on tourne à gauche, l'écroue *F* s'avance vers *CD*, le contre-poids devient plus pesant, il faut plus de sable dans le creuset pour pouvoir lever, & le sablier retarde, quoique le sable coule toujours également.

Il faut remarquer en passant, qu'on peut faire avancer & reculer l'écroue d'un espace *presque infiniment petit* : car comme la tête de la vis *HI* est divisée en 20 dents, & que la vis sans fin n'en fait passer qu'une à chaque tour, il s'ensuit qu'un demi-tour de clef ne fait avancer l'écroue que de la 40^{me} partie d'un filet de la vis, &c.

Explication de la Surprise.

Je l'avouerai ingénument : je m'étois flatté que le contre-poids de la *Fig. 8* seroit suffisant pour retenir les creusets dans la situation convenable pour bien agir ; mais je fus fort étonné, lorsque mon sablier étant presque fini, je reconnus le contraire. Le sable qui s'accumule dans le creuset pendant une minute, le fait trébucher avec tant de force, quand une fois il a soulevé le contre-poids, qu'il faisoit un demi-tour au lieu de ne faire qu'un quart ; il passoit deux bras tout de suite, ou bien il ne restoit pas précisément sous le contre-poids, & pour lors le creuset n'étant pas directement sous le couloir, la machine ne tournoit plus. J'étois trop avancé pour reculer ; il fallut trouver un expédient, & j'en vins à bout : le voici aussi simple que solide.

La piece *ABC*, *Fig. 9*, étant mobile au point *B*, & plus pesante dans sa partie *A* que dans sa partie *C*, se remet d'elle-même dans la situation où elle est actuelle-

ment, sitôt qu'on la laisse à sa liberté. La piece *DEF* représentant *une jambe & un pied*, est mobile au point *E*: elle porte une cheville *F*, qui se trouve engagée dans la fente *FG*, de maniere qu'elle peut couler tout le long, autant que le jeu le demande. Au seul aspect de la figure, on connoît que la piece *ABC* ne peut pas remuer qu'elle ne communique un mouvement contraire à la jambe *DEF*, par la communication de la cheville *F*. Ainsi quand le bras de la croix d'acier part avec force pour trébucher, il rencontre 1°, la partie *C*, qu'il chasse vers *H*, & dans le même tems le pied *D* s'avance vers *I*.... 2°. Le bras ayant achevé de glisser le long de la partie *C*, il rencontre le pied *D* au-dessous, qui s'oppose à son passage, & l'arrête tout court. Mais 3°, dans le même instant la partie *C* qui n'est plus gênée, se remet par son propre poids dans sa premiere situation, & par une suite nécessaire, le pied *D* se retire aussi de-dessous le bras de la croix, & celui-ci trouve le passage libre, comme si rien ne s'y étoit opposé: il ne lui reste que le contre-poids à soulever, & toutes les fois qu'il échape, le pied *D*, que j'appelle *la surprise*, ne manque pas de l'arrêter au premier instant, & de se retirer tout de suite pour laisser le passage libre.

Explication de la Roue des minutes.

J'ai dit plus haut que je ferois voir le support qui soutient le pivot *L* de la *Fig. 6*. Ce support est une traverse de fer *LM*, *Fig. 10*, arrêtée solidement avec deux vis dans la boîte ou quadrature *NOPQ*, distante du fond d'environ 4 lignes, pour laisser le jeu nécessaire à la croix d'acier *KC*.... Le pivot *L* qui est le bout de la *baguette de communication*, porte 4 chevilles, lesquelles engrainent dans la roue *RST* de 60 dents; de sorte que le pivot *L* faisant

faisant son tour en 4 minutes, après 15 tours de ce pivot, la roue des minutes aura fait un tour, & par le moyen du contre-poids dont nous avons parlé à la *Fig. 8*, il est facile de la faire aller aussi juste qu'on voudra. L'arbre *R* de la roue *RST* qui passe au-travers du cadran, porte une aiguille qui marque les minutes, sautant tout-à-coup de l'une à l'autre, à mesure que le creuset trébuche.

PREMIERE OBSERVATION.

Comme on pourroit s'imaginer que le peu de force qu'il faut pour mener cette roue, pourroit cependant en certaines occasions retenir le creuset plus long-tems qu'il ne faut, & causer du dérangement, il est bon de faire remarquer que les chevilles du pivot *L* n'agissent sur les dents *S* de la roue, que lorsque le creuset a déjà trébuché en partie, & qu'il est dans toute la force de *sa chute*, & par conséquent cette roue ne peut porter aucun obstacle à la liberté que doivent avoir les creusets.

II. OBSERVATION.

Outre que cette roue est fort libre, j'ai eu attention de faire une aiguille, laquelle quoique grossiere, ne pese pas plus d'un côté que de l'autre.... Enfin sous la queue de cette aiguille, il y a une cheville, qui, à chaque tour, fait passer une *dent* d'une étoile de 24, laquelle porte les heures, & les laisse voir à travers une ouverture carrée qui est au bas.



*Réflexions sur la justesse qu'on peut se promettre d'un pareil
Sablier, exécuté par un habile Ouvrier.*

Le modele que j'ai fait de ce sablier, suivant toutes ses proportions, & qui sera présenté à l'Académie, ainsi que celui de l'autre instrument, auquel je travaille sans relâche: ce sablier, dis-je, n'est pas exécuté, à beaucoup près, avec toute la justesse dont il est susceptible. 1°. Parce que la premiere exécution d'une nouveauté est toujours fort imparfaite, mais *inventis addere facile est*. 2°. Parce qu'il y a peu de pieces qui n'ayent été retouchées deux ou trois fois, suivant les inconvéniens que je trouvois en chemin; & quand il s'agissoit de pieces principales, j'ai fait servir les mêmes, pour ne pas multiplier la dépense, qui est déjà assez considérable, eû égard à l'incertitude du dédommagement. 3°. Parce qu'à l'exception des pieces de forge, & du boilage, j'ai généralement fait tout le reste par la lime, vis en fer, vis en bois, pieces en fer-blanc, &c. Cette voie m'a paru la plus praticable, soit par la difficulté qu'il y a de se faire bien entendre des ouvriers, soit par la crainte d'exposer trop son secret, soit enfin pour diminuer la dépense; & l'on sent bien que je ne dois pas avoir la dextérité d'un ouvrier qui travaille d'habitude. Par exemple, les deux pivots sur lesquels roule la croix des creufets, ont plus d'une ligne de diametre, tandis qu'un bon ouvrier, en les passant sur le tour (ce que je n'ai pas fait), ne leur auroit pas donné demi-ligne, & qu'ils seroient par-là beaucoup plus libres, & ainsi de tout le reste. Cependant, malgré toutes ces imperfections, ce sablier égale la justesse de nos pendules à ressort.

I. *Réflexion*. Si l'on met dans ce sablier la quantité de sable nécessaire pour couler au-delà de 24 heures, que ce

sable soit d'ailleurs homogène, & passé par le crible des sabliers ordinaires, il est plus que probable qu'il coulera toujours par le couloir d'une manière égale : car 1°. le trou est fort grand, puisqu'il délivre 25 onces par heure poids de marc. 2°. Il est fait en entonnoir, & cela ôte toute idée du séjour de certains gros grains, qui pourroient en boucher une partie. 3°. Le tamis qui est au-dessus, arrête tout ce qui pourroit mettre obstacle à l'uniformité du coulage. 4°. Le passage de l'air ne fait point ici la même résistance que dans les sabliers ordinaires ; car dans ceux-ci, l'air & le sable se disputent mutuellement le passage, & lorsque l'air est plus ou moins épais, il en doit résulter une différence : mais dans le sablier que je propose, l'air n'a rien à démêler, pour ainsi dire, avec le sable, parce qu'il a une libre communication, comme on le verra dans le modèle, & comme on le conçoit à la *Fig. 3*, où le couloir est environné d'air de tout côté. C'est pour cette raison que dans mon sablier, le sable forme un filet uni comme un filet d'eau, tandis que dans les sabliers ordinaires, ce filet est continuellement & visiblement interrompu par le passage de l'air. 5°. Le sable est toujours à une même élévation au-dessus du couloir, lequel est toujours également fourni. 6°. Quand l'humidité colleroit ensemble plusieurs grains de sable, ils resteroient sur le tamis, & le reste couleroit toujours.

II. *Réflexion.* Si le sable coule uniformément, les creusets trébucheront uniformément ; c'est-à-dire, que les 4 ensemble feront leur tour dans une égale durée : car il y a dans mon modèle 2 ou 3 secondes de différence d'un creuset à l'autre (ce qui provient de la mauvaise exécution), mais cela se retrouve dans le tour entier, & cela suffit pour la justesse en général. Une habile main évitera facilement ce défaut dans un autre sablier, en observant

mieux les proportions, que je n'ai pû le faire moi-même.

III. *Réflexion.* Quoique la longue description que je viens de faire, présente une grande quantité de pieces, qui forment en apparence une machine fort composée, il faut faire attention que toutes ces pieces sont fixes, à l'exception de la principale, qui est la piece des creusets; c'est la seule dont les pivots pourront s'user par la suite, mais il faudra bien du tems, car la résistance est peu de chose: à l'égard des pieces qui sont dans la quadrature, outre qu'il y en a peu, on sçait bien que nos horloges à roüage ne manquent gueres par-là, parce que la lenteur du mouvement & la façon *inverse* dont ces pieces agissent, contribuent également à leur durée.... La piece des creusets, qui doit être regardée tout-à-la-fois, comme le *premier & dernier mobile*, n'est pas à beaucoup près si fatiguée que le dernier mobile des pieces à roüage. Ainsi ce sablier une fois bien réglé, doit se soutenir beaucoup plus long-tems qu'une piece à roüage.

IV. *Réflexion.* La propriété qu'a ce sablier, de marquer même pendant le tems qu'on le retourne, est un avantage pour la justesse qui doit faire plaisir, & sa durée pendant un jour entier est encore bien estimable.

V. *Réflexion.* La maniere dont ce sablier marque les minutes, a quelque chose de plus précis que celle d'une pendule ordinaire, par le bruit qui se fait à chaque minute, lequel s'entend très-distinctement, & détermine précisément *la fin de la minute & le commencement de l'autre*, au lieu qu'on est toujours incertain, sur les cadrans ordinaires, du véritable instant où commence & finit chaque minute.

VI. *Réflexion.* Les agitations du vaisseau ne sçauroient causer le moindre dérangement à mon sablier, parce qu'il est fort pesant & bien suspendu: tout balance à la

fois, & rien ne se dérange. C'est ainsi que certaines personnes adroites, mettent un verre plein d'eau dans un cerceau qu'elles tiennent à la main, elles l'agitent peu à peu, le font ensuite tourner entierement sens-dessus-dessous, & l'eau qui est dans le verre ne se répand pas, quoique le verre se trouve en passant dans une situation tout-à-fait renversée. J'ai souvent fait balancer mon sablier par des vibrations de plus de deux pieds, qui duroient plus d'un quart-d'heure, sans que cela ait rien changé à la justesse.

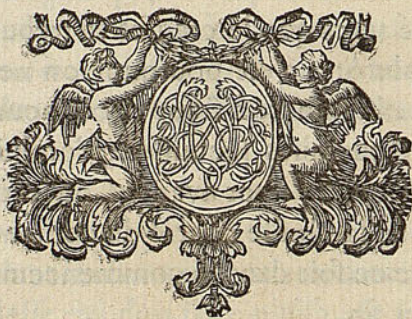
R E M A R Q U E.

Il faut observer en passant, que si l'on retournoit le sablier dans le tems que le creuset va trébucher, on le feroit trébucher plutôt; c'est pourquoi on ne doit le tourner qu'après que la minute a frappé, car pour-lors il n'y a rien à craindre, quelques secousses qu'on lui donne. On en doit faire de même pour avancer ou reculer, quand on tournera avec la clef le quarré du contre-poids, observant toujours que ce soit dans le commencement de la minute, & non sur la fin.

Derniere Reflexion. Quand j'ai fait mon sablier de plus de 24 heures, ç'a été dans le dessein que si je ne méritois pas le Prix, cette Piece pût servir à quelque particulier, & que mon déboursé pût me revenir, & un particulier ne voudroit pas d'un sablier qu'il faudroit tourner deux fois par jour: mais comme dans un vaisseau on a des personnes attentives pour veiller à ces sortes de choses, si l'on réduisoit ce sablier à 13 ou 14 heures, en laissant subsister la même quantité de sable, il couleroit la moitié plus gros; l'aiguille feroit deux tours par heure, chaque minute du cadran deviendroit une demi-minute, & ce sablier seroit totalement à l'abri de toute sorte d'arrêt &

d'inégalité de coulage. Le poids du sable détermineroit plus subitement la chute de chaque creuset, & je pense que la justesse seroit plus assurée : il ne faudroit pour cela qu'un second couloir, qu'on mettroit à la place de l'autre. Si j'ai du tems, j'en ferai l'épreuve.

Si de tels commencemens peuvent mériter l'attention de mes Juges, il y a tout lieu d'espérer que cette Piece fera un jour portée à la perfection qu'on peut désirer pour le service de la marine.



SECONDE PARTIE.

SUIVANT la premiere Partie de ce Mémoire, je viens d'exécuter en grand ce qui ne se fait ordinairement qu'en petit volume : & dans cette seconde Partie, je vais donner les moyens de réduire en petit volume (& sans diminuer les proportions), une chose qui paroît ne pouvoir être exécutée qu'en très-grand volume.

I. P R O B L E M E.

Trouver le moyen de faire un Cadran Solaire équinoëtial & universel, dans un cercle de 29 pouces de diametre, marquant 1°. les heures. 2°. Les minutes une à une. 3°. Les secondes de 5 en 5 très-distinctement, de sorte que l'image du Soleil parcoure réellement & visiblement $2\frac{1}{2}$ pouces par minute, ou $2\frac{1}{2}$ lignes par 5 secondes, ce qui, suivant les proportions ordinaires, ne paroît pouvoir s'exécuter que sur un cercle de 100 pieds de diametre.

Comme cette proposition paroît impossible & chimérique, je crois devoir avertir en passant, que je ne suis pas novice dans la théorie & dans la pratique de toute sorte de cadrans solaires; ainsi l'on peut suspendre son jugement jusqu'aux preuves, & si je ne me fais pas assez bien entendre, il y sera suppléé par le modele que je fais exécuter, & qui partira avec celui du sablier.

D E S C R I P T I O N.

C'est à la réfraction & à la réflexion des rayons du

Soleil, qui sont connues de tout le monde, que je dois l'idée de ce cadran, lequel, à ce que je crois, n'est encore connu de personne; car supposé qu'une pareille idée fût venue à quelqu'un avant moi (ce que j'ignore), il seroit moralement impossible que nous nous fussions entièrement rencontrés dans l'exécution.

La principale piece de ce cadran, est une boîte quar-ré-longue *ABCD*, &c. *Fig. 11*, formant une espece de *chambre obscure*, de 22 pouces de long *AC*; de 12 pouces de large *AB*, & de 8 pouces de hauteur *AG*. Le dedans est tout peint en noir, à l'exception du fond *DCH*, qui est blanc, & le dehors est tout verd, pour la propriété seulement. Il n'y a d'autre ouverture que celle marquée *EF*, d'environ deux pouces de largeur, pour pouvoir observer les minutes & les secondes; car pour les heures on les voit ailleurs.

Pour abrégér l'explication, j'appellerai cette chambre obscure la *chambre* tout court. Le fond d'en bas fera *CHLD*; l'opposé *BAG* fera celui d'en-haut. *ABDC* s'appellera le dessus; le dessous *GHL*, & les côtés seront *GIEH*, & *KFDL*. La chambre est soutenue sur deux pivots *I, K*, placés au milieu des deux côtés; sur lesquels elle peut tourner à volonté du Sud au Nord, & du Nord au Sud.

L'intérieur de la Chambre obscure.

La *Fig. 12* représente la *Chambre* couchée sur une table, n'ayant ni le dessus, ni les côtés, mais seulement le dessous *LMN*, avec les deux fonds, dont *NP* est le fond d'en-bas, & *OM* le fond d'en-haut.... *QR* est une lunette d'approche ou de *longue-vûe*, d'un pied de long. L'objectif *Q* est tourné vers le Soleil-levant *S*, que nous supposons au véritable équinoxe, car ce jour-là, à 6 heures précises,

cises, la chambre doit être dans la situation de la *Fig. 12*; l'oculaire par conséquent de la lunette, est tourné vers le fond d'en-bas *NP*.

1°. Le rayon *RT*, après avoir souffert plusieurs réfractations dans la lunette, rencontre une petite glace de miroir *TN*, de deux pouces de large, & un peu inclinée, pour que le rayon ne retourne pas dans la lunette. 2°. La glace *TN* renvoie ce rayon sur une seconde glace *VY*, attachée au fond d'en-haut, & plus large au double que celle d'en-bas. 3°. Enfin, la glace *VY*, réfléchit ce même rayon sur le fond d'en-bas à l'endroit *Z*, où l'image du Soleil marque, par son mouvement, les minutes & les secondes, comme nous l'expliquerons plus bas.

Il faudroit absolument voir l'effet que produit *cette lunette avec ces deux miroirs* pour pouvoir s'en former une idée. L'image du Soleil, qui n'a gueres que 6 lignes de diametre au point *T*, en a près de 30 au point *VY*, & 5 pouces au point *Z*. Son mouvement de *trépidation* imite celui qu'on voit dans les grandes Eglises, quand les rayons percent à-travers un trou de vitre, & elle parcourt ici $2\frac{1}{2}$ pouces par minute.

La *Fig. 13* est une répétition de la 12, présentée dans un autre sens. Dans la *Fig. 12*, j'ai représenté les choses *en profil*, & dans la 13 je les présente *de face*; & comme le dessous de la chambre étant présenté de face, les deux fonds d'en-haut & d'en-bas seroient vûs en profil, & que je ne pourrois pas désigner les figures qui y sont tracées; j'ai pris le parti d'*applatis* ces deux fonds, pour les mettre dans un même plan avec le dessous de la chambre. Ainsi *MN* est le dessous de la chambre, *NP* est le fond d'en-bas *applati*, & *OM* est le fond d'en-haut aussi *applati*, comme s'il y avoit des charnières aux jointures *M* & *N*.

Reprenons maintenant chaque chose en particulier.

Dans cette *Fig. 13* QR est la lunette arrêtée solidement au-milieu du *dessous* de la chambre, à 4 ou 5 lignes d'élévation parallèle... T est le premier miroir, VY est le second miroir... $R\ 1\ 2\ 3\ Y\ 4\ 5\ 6$, & $R\ 7\ 8\ 9$, $V\ 10\ 11\ 12$, sont deux rayons extrêmes, entre lesquels il faut en imaginer une infinité d'autres qui se succèdent; ou bien, si l'on veut, on peut s'imaginer que le premier & le second sont les mêmes, qui ne diffèrent entre eux que par la position locale, & pour-lors il faudra s'imaginer que depuis AB jusqu'à CP , ils ont passé successivement par tous les points imaginables.

I. *Supposition.* Je suppose que la longueur AP est de 12 pouces & demi, quoiqu'elle ne soit réellement que de 12 pouces. J'expliquerai plus bas ce que devient ce demi-pouce supposé.

II. *Supposition.* Je suppose que l'image du Soleil S parcourt $2\frac{1}{2}$ pouces par minute. Cette supposition est d'autant plus admissible, qu'il ne s'agit que d'*allonger* ou *raccourcir* la chambre, pour avoir cette proportion à souhait.

III. *Supposition.* Je suppose l'espace AP partagé en 5 parties égales de $2\frac{1}{2}$ pouces chacune, qui feront 5 minutes, & chaque partie en 12 autres de $2\frac{1}{2}$ lignes, qui marqueront les secondes de 5 en 5.

IV. *Supposition.* Je suppose que la chambre étant bien placée, l'image du Soleil, qui est d'environ 5 pouces de diamètre, remplira successivement tout l'espace renfermé entre les deux bornes AP , CB ; & que pour peu que cette position de la chambre soit changée, l'image du Soleil franchira l'une ou l'autre des deux bornes, & cette image paroîtra tronquée.

V. *Supposition.* Parmi une infinité de rayons qui peignent l'image du Soleil, je n'en prends qu'un de ceux qui peignent le limbe *antérieur*.

VI. *Supposition.* Je suppose qu'il est précisément 11 heures 55 minutes, & que la chambre étant bien placée, le rayon $R\ 1\ 2\ 3\ Y\ 4\ 5\ 6$ arrive au point 6.

PREMIERE OPERATION.

Suivant cette dernière supposition, à 11 heures 55 minutes, l'image du Soleil étant totalement hors de la chambre, le limbe antérieur commencera à se montrer au point 6, & s'avancant successivement, ce même limbe marquera en passant les secondes de 5 en 5, & les minutes 1 à 1... Il est certain, suivant la deuxième supposition, qu'à midi précis, le limbe antérieur arrivera au point 5 12 5, (l'image du Soleil étant alors toute entière dans la chambre obscure.

PREMIER COROLLAIRE.

Nous venons de voir l'opération de ce cadran pendant 5 minutes d'heure, il n'est plus question que de trouver un moyen sûr de répéter la même opération toutes les fois qu'on voudra, par des *observations suivies ou non suivies*, de 5 minutes chacune, pendant tout le tems que le Soleil sera sur l'horison.

Pour rendre cela praticable, il faut ajouter à la *chambre obscure* $APMQR$, de la 14^e Fig., un cercle BCD , qui représentera l'équateur. Ce cercle sera partagé en 24 parties égales, qui répondront aux 24 heures du jour, chacune de 15 degrés. Il faut faire dans les 24 divisions autant de coches égales, & tracées avec précision... Il faut encore soudiviser ces 24 parties en 12 parties chacune, pour les minutes de 5 en 5, & y faire de semblables coches, avec la même justesse. La petitesse de la figu-

re ne me permet pas de tracer ici toutes ces coches, qui sont au nombre de 288 sur toute la circonférence.

L'espace d'une coche à l'autre tant plein que vuide, vaudra 1 degré 15 minutes, qui est la portion de l'équateur que le Soleil parcourt dans 5 minutes d'heure... Audessus de l'équateur, doit être une piece coudée *EF*, mobile au point *F*, dont le talon *E* remplira exactement le vuide de chaque coche.

Sur le plat de l'équateur, j'ai marqué les 24 heures en chiffres *Romains*, dans un ordre renversé; & de 3 en 3 coches, il y a ces nombres marqués, 15, 30, 45, qui signifient les minutes pour le *quart*, la *demie*, & les *trois quarts* de l'heure. Les 60 ne se marquent pas, parce que le chiffre Romain y supplée: je ne marque pas non plus les chiffres intermédiaires, 5, 10, 20, 25, &c. parce que la chose n'est pas nécessaire.

II. OPERATION.

Pour l'intelligence de ce que j'ai à dire, il faut reprendre la chose où nous l'avons quittée dans la premiere opération. Nous avons vû qu'à 11 heures 55 minutes, le Soleil étoit au point *A*, hors de la chambre, & à midi précis au point *P*, dans la chambre. Je dis au point *A* & au point *P*, parce que j'ai employé dans cette 14^e Fig. les mêmes lettres qui servoient dans la 13^e pour plus grande facilité.

Si, après avoir vû arriver le limbe antérieur du Soleil au point *P* (qui faisoit midi précis), nous faisons tourner le cercle *BCD* de la valeur d'une coche, ou de la 288^e partie du cercle, & que nous mettrions le talon *E* dans cette seconde coche *D*, il arrivera 1^o, que la chambre *APMQR*, qui est attachée sur l'équateur, aura aussi tour-

né de la valeur d'une coche, qui est 1 degré 15 minutes de l'équateur, ou 5 minutes d'heure. 2°. Puisque l'espace *AP* est de 5 minutes d'heure, suivant la troisieme supposition, le cercle de l'équateur ayant *devancé* la marche du Soleil de la valeur de 5 minutes d'heure, le rayon du Soleil aura *reculé* d'autant, & au lieu de se trouver en *P*, où il étoit arrivé, il se retrouvera en *A* comme dans la premiere opération, & continuera sa marche de *A* vers *P* pendant 5 minutes d'heure, de sorte que quand le rayon fera arrivé précisément en *P*, il fera précisément midi & 5 minutes.

III. OPERATION.

Devançons encore la marche du Soleil, en mettant le talon *E* dans une troisieme coche *G*; le rayon se retrouvera encore au point *A*, d'où il marchera vers le point *P* pendant 5 autres minutes, & lorsqu'il y fera arrivé, il fera midi & 10 minutes.... On pourra continuer de devancer la marche du Soleil, de 5 en 5 minutes, en mettant successivement le talon *E* dans les coches *H*, *I*, & ainsi de suite, aussi long-tems qu'on aura envie d'observer le Soleil.

PREMIERE OBSERVATION.

Je suppose toujours que c'est le jour des équinoxes, auquel jour la chambre peut être considérée comme étant dans le plan de l'équateur. Nous parlerons plus bas des moyens de suivre la déclinaison du Soleil.

II. OBSERVATION.

Je ne crois pas qu'il soit besoin de prouver que chaque coche de l'équateur fait revenir le rayon au point A précisément ; car , puisque nous supposons d'un côté que le rayon parcourt l'espace AP dans 5 minutes d'heure , & que de l'autre côté , nous sçavons que le Soleil parcourt 1 degré 15 minutes dans 5 minutes d'heure , il est clair que ces deux espaces *équivalem l'un à l'autre* , & par conséquent , l'on ne peut pas faire avancer l'équateur d'une coche , sans faire rétrograder le Soleil de tout l'espace PA ... Si cependant cela paroïssoit douteux , faute d'explication de ma part , on peut s'en rapporter aux expériences que j'en ai faites , en attendant que le modele le fasse voir clairement.

III. OBSERVATION.

Il n'est pas nécessaire , pour la justesse de l'observation , de changer la coche précisément au moment que le rayon est arrivé en P : on peut le faire à son aise , sans se presser , & sans qu'il puisse en arriver la moindre erreur , parce que le Soleil fait toujours son chemin ; & au lieu que le rayon se seroit trouvé précisément en A , si l'on avoit changé la coche sans aucune perte de tems , le même rayon se trouvera d'autant plus avancé sur la marche de A vers P , que l'on aura mis plus de tems à changer la coche , marquant toujours avec la même justesse sur les divisions des minutes.

Il en seroit de même si l'on changeoit la coche avant que le rayon fût arrivé en P ; il seroit quelque tems sans se montrer en A , après quoi il y paroîtroit au moment

précis qu'il auroit dû y paroître, si l'on avoit changé la coche dans l'instant précis.

IV. OBSERVATION.

C'est pour cette raison que le demi-pouce qui manque à la largeur *AP*, suivant la première supposition, ne cause aucune erreur, parce que ce demi-pouce est censé hors de la chambre; il faut seulement commencer les divisions des 5 minutes au point *P*, donnant à chacune $2\frac{1}{2}$ pouces, & la dernière du côté *A*, se trouvera plus petite d'un demi-pouce, qui sera censé hors de la chambre, & pour la perte du tems qu'on met à changer la coche.

V. OBSERVATION.

C'est à présent qu'on conçoit comment l'image du Soleil peut parcourir un espace de 150 pieds en 12 heures de tems, ou 12 pieds & demi en une heure de tems, dans un cercle qui n'a que 29 pouces de diametre: c'est en répétant souvent sa marche sur le même espace. Deux moyens concourent à cela: l'un est la *réfraction* & *réflexion* des rayons qui grossissent les intervalles de la marche du Soleil, & l'autre est cette manière aisée de *devancer* la marche du Soleil, pour lui présenter 12 fois par heure le même espace à parcourir.

VI. OBSERVATION.

Ce Cadran, qui n'est encore décrit qu'en partie, est d'un usage immanquable sur terre, & chacun peut se donner sur la plus petite terrasse un *Observatoire raccourci*, qui, à cet égard, équivaldra à la méridienne de l'Observatoire même de Paris, ou de S. Sulpice, avec cette différence que la chambre obscure marquera toutes les heures du jour: car si l'on donnoit seulement 3 pieds à la chambre

obscur, ou si l'on y employoit une meilleure lunette, on auroit une image beaucoup plus grande, & qui parcourroit de beaucoup plus grands espaces.

VII. OBSERVATION.

Dans tout ce que je viens de dire jusqu'ici, je suppose un équateur dont les poles soient fixes sur terre, & l'on ne peut me faire d'autre difficulté, que l'inégalité qui pourroit se trouver dans les divisions de cet équateur : mais la chose n'est pas impossible, disons même si difficile, surtout aux habiles ouvriers ; & quand une fois cet équateur sera bien divisé, il ne peut plus arriver de dérangement ; s'il est bon un jour, il sera bon toujours. Nous verrons de quelle façon je compte pouvoir l'employer sur mer.

De la déclinaison du Soleil.

Pour que ce Cadran puisse servir toute l'année, il faut que la *chambre obscure* puisse imiter les deux mouvemens du Soleil. Elle imite son mouvement diurne, en suivant le mouvement de l'équateur à mesure qu'on *change les coches*, & par-là elle tourne, comme cet équateur, sur les poles du monde. Il faut encore qu'elle imite son mouvement annuel, & pour cela il faut qu'elle ait deux autres poles aux deux points de 6 heures, c'est-à-dire, au véritable *levant* & véritable *couchant*.

La Fig. 14 nous servira encore pour expliquer une partie de ce second mouvement. A côté de la chambre *APMQR*, vous voyez deux traverses *KL*, *NO*, qui sont arrêtées avec des vis sur le cercle de l'équateur... Au milieu de ces deux traverses il y a deux autres vis *S*, *T*, qui soutiennent la chambre *APMQR*, & lui servent de poles;

les ; en sorte que cette chambre roulant sur ces deux vis , peut faire un angle avec le plan de l'équateur (tant vers le Sud que vers le Nord), de la même quantité de degrés que la plus grande déclinaison du Soleil.

ADBC, Fig. 15, représente le profil de la chambre obscure : elle est mobile du Nord au Sud, & du Sud au Nord au point *I*, qui est son centre. *CD* représente le plan de l'équateur, que je suppose dans une élévation de 45 degrés... *F*, *E* sont les deux poles de l'équateur ; *F* est le pole Méridional, & *E* le pole Boréal... Sur le haut de la chambre *AD*, est fixé un arc de Méridien *GADH*, de 47 degrés, pour la déclinaison du Soleil vers l'un & l'autre pole. Cet arc, dont le diamètre est d'environ 22 pouces, est divisé en 23 degrés de chaque côté, avec une coche à chaque division.

Voilà de quoi suivre la déclinaison du Soleil degré à degré ; mais comme cette déclinaison n'augmente pas, ni ne diminue pas précisément d'un degré par jour, il faut encore pouvoir partager chaque degré en 60 parties, afin de pouvoir imiter parfaitement la déclinaison du Soleil minute à minute, telle qu'elle est marquée dans les Tables dressées par les Astronomes.

Chaque degré de l'arc *GADH*, n'étant que d'environ $2\frac{1}{4}$ lignes, il seroit impossible de le diviser en 60 parties sensibles : cependant, comme la chambre obscure grossit les objets, & qu'une très-petite partie du méridien produit un changement sensible dans cette chambre, il faut user d'expédient pour rendre cette division sûre & sensible tout-à-la-fois.



Minutes de degrés pour la déclinaison du Soleil.

La Fig. 16 ne diffère de la 15 que par quelques additions qu'il faut expliquer séparément. La première addition est la pièce $NPOQR$, qui sert pour marquer les minutes de la déclinaison du Soleil. Cette pièce est mobile au point P , où elle tient par une vis qui lui sert de centre. Depuis le centre P jusques en O , elle a 15 lignes; & depuis le même centre P jusques à l'arc QR , elle a 18 pouces 9 lignes, sa longueur totale étant d'environ 20 pouces. Il y a au point O une cheville par-dessous, qui entre dans les coches de l'arc $GADH$, & en remplit exactement la largeur... A-travers l'arc QNR , qui ne fait qu'une même pièce avec NPO , à-travers, dis-je, l'arc QNR , on voit une ouverture QR , d'environ 30 lignes de long. Dans cette ouverture est une vis fixe N (servant d'*index*), laquelle, ainsi que la vis P , est arrêtée sur la traverse LM , dont nous parlerons bien-tôt. Le long de l'ouverture QR , sont marquées 30 divisions, un peu inégales sur les extrémités, dont chacune vaut 2 minutes de degré, avec une suite de chiffres qui commencent en R , & finissent en Q .

La deuxième addition consiste dans les deux traverses EF , LM , qui forment une croix, à laquelle répond une autre croix pareille qu'il faut imaginer *cachée* derrière celle-là. Ces deux croix sont à environ 9 pouces de distance l'une de l'autre, ayant entre deux la chambre obscure $ADCB$, à laquelle elles servent de support. La traverse LM est la même que vous voyez en NO , Fig. 14... Cette traverse LM , & celle qui lui répond, soutiennent l'équateur, dont le plan est ici caché sous la même traverse; & la traverse EF , avec celle qui lui répond, servent de po-

les au même équateur. Elles sont liées par les deux bouts, comme vous voyez à la *Fig. 17*, ayant au milieu deux tenons *E, F*, qui servent de poles à l'équateur.... Dans la même *Fig. 17*, le cercle ponctué *LMTS*, représente l'équateur, & l'autre ponctué *EBFC*, représente le méridien.

La troisieme addition est le cercle *LEMF*, *Fig. 16*, qui est le méridien divisé en 360 parties, avec un petit trou de deux en deux divisions, dont je n'ai marqué ici que quelques-unes, par rapport à la petitesse de la figure. Ce méridien (qui n'est pas encore fait) sera composé de deux cercles égaux, arrêtés parallèlement l'un à côté de l'autre, à une distance d'environ 8 degrés, affermis d'ailleurs par des traverses d'espace en espace. Cette précaution m'a paru nécessaire, parce que s'il n'y avoit qu'un cercle pour le méridien, son épaisseur intercepteroit les rayons du Soleil tous les jours précisément à midi, en sorte que l'heure du jour la plus remarquable, seroit celle qu'on ne trouveroit jamais sur ce cadran : mais au moyen de deux méridiens paralleles, distans de 8 degrés, la lunette se trouvera entre deux, & marquera un quart-d'heure *avant*, & un quart-d'heure *après* midi, sans interruption. Les deux méridiens intercepteront les rayons, le premier un peu après 11 heures & demie, & le second un peu avant midi & demi, & tout le reste du jour sera à découvert, comme on peut voir, *Fig. 14*, où les deux méridiens sont ponctuéés en *vx*, *yz*.



Minutes de degrés pour le Méridien.

Pour rendre ce cadran universel, il faut pouvoir le suspendre 1°. par chaque degré du méridien. 2°. Non-seulement par chaque degré, mais encore par chaque minute de degré. Le premier cas est facile, parce que chaque degré ayant un peu plus de 3 lignes de large, on peut percer un trou à chaque division, & par le moyen de ces trous, on le suspendra par le degré que l'on voudra. A l'égard du second, la chose n'est pas si aisée, eu égard à la petitesse de l'instrument. Je crois avoir trouvé deux moyens de le faire; je vais les expliquer séparément, & je me déterminerai dans la suite pour celui qui sera le plus facile à exécuter.

Le premier que j'ai imaginé, consiste dans une piece de fer *ABCDE*, *Fig. 18*. Les deux trous *A*, *B*, sont percés à la distance précise de trois degrés du méridien, & peuvent être changés d'un degré à l'autre, au moyen de deux chevilles qui passeront par les trous *A*, *B*, & par ceux du méridien... *CD* est une vis sans fin, assujettie dans les deux côtés *AD*, *BC*, en sorte qu'elle peut tourner sans avancer ni reculer. Chaque filet de cette vis doit avoir l'épaisseur précise d'un degré du méridien, & l'anse *E* doit avoir un trou *fileté*, & proportionné à la vis *CD*... La tête *C* de la vis *CD*, doit être faite en forme d'*index*, pour marquer les minutes sur un petit cadran; que je suppose tracé sur le côté du support *BC*; de cette façon, la vis *CD* faisant un tour entier, fera avancer ou reculer l'anse *E*, de la valeur d'un degré du méridien, & l'*index* *C* en marquera chaque minute sur le petit cadran dont je viens de parler.

L'autre moyen est une plaque de fer *FGHK*, *Fig. 19*,

de 8 ou 10 pouces de longueur, plus ou moins, à volonté, sur laquelle on marquera les minutes 2 à 2, ou 1 à 1, à proportion de la longueur qu'on donnera à la plaque. Il y aura en bas deux trous *F*, *G*, qui comprendront exactement deux degrés du méridien. Sur cette plaque, on prolongera les divisions des degrés, depuis *F* jusques en *H*; depuis *L* jusques en *I*, & depuis *G* jusques en *K*.... On tirera en suite deux lignes transversales, depuis *F* jusques en *I*, & depuis *L* jusques en *K*... Si l'on partage ces deux lignes en 30 parties égales, où l'on percera autant de trous, chacune vaudra deux minutes; & si on les partage en 60, chacune ne vaudra qu'une minute. L'instrument suspendu par le trou *I*, par exemple, sera dans la même situation que s'il étoit suspendu par le trou *L*, qui est le degré complet; & chaque trou entre-deux, produira une suspension proportionnée au nombre de minutes qui seront écrites à côté.

Usage de cet Instrument sur Terre.

Il faut commencer par les opérations faciles, & nous viendrons en suite aux plus difficiles. Je m'étendrai beaucoup sur cette première application de l'instrument, parce que la plupart des choses serviront pour les explications suivantes.




PREMIER PROBLEME.

Connoissant la hauteur du pole & la déclinaison du Soleil, connoître l'heure qu'il est par Minutes & Secondes.


Supposons que nous sommes à l'élevation de 45 degrés, & au 6 Juin 1746 (deuxieme année après les Bifextes), auquel jour la déclinaison du Soleil est marquée de 22 degrés 40 minutes. Choisissons la 16^e Fig. 1^o. Je mets l'anse *K* au 45^e degré du méridien, car l'instrument étant suspendu par cet endroit, le pole *E* sera élevé de 45 degrés au-dessus de l'horison. 2^o. Je prends sur l'arc *GADH*, la coche du 22^e degré, & j'y mets la cheville *O*, de la piece *OPQNR*. 3^o. Prenant l'arc *QNR* avec la main, je le pousse à gauche, jusqu'à ce que l'extrémité *R* (qui est zéro) touche la vis *N*; & dans cet état, la piece *OPQNR* marquera 22 degrés précisément : & comme la déclinaison du 6 Juin est de 22 degrés 40 minutes, je retire à droite l'arc *QNR*, jusqu'à ce que la vis *N* se trouve vis-à-vis de 40 minutes; après quoi je serre la vis, pour que l'arc ne remue plus. Voilà l'instrument réglé pour marquer pendant tout le jour 6 Juin 1746. 4^o. Que ce soit sur une terrasse, dans une basse-cour, ou à la campagne, il faut avoir un point d'appui pour suspendre l'instrument. 5^o. L'instrument étant suspendu, il faut l'orienter d'une maniere approchante. Je dirai plus bas ce qu'il faudroit faire, si l'on ne sçavoit pas de quel côté est le midi approchant. 6^o. Quittons la Fig. 16 pour prendre la 14. Je suppose que l'équateur *CBD* est à peu près bien pour ce qui regarde les 4 points cardinaux du monde, sans sçavoir toutefois si cette situation de l'instrument décline vers le Levant ou le Couchant. 7^o. Comme on

ne peut pas connoître les petites parties de l'heure, sans connoître l'heure courante, il faut avoir recours au *guide*, dont j'ai différé l'explication jusqu'ici.

Explication du Guide.

Le Soleil parcourt de si grands espaces dans ce petit cadran, que pour peu que l'instrument sorte de sa véritable position, les rayons du Soleil n'entrent plus dans la chambre obscure. Il faudroit souvent tâtonner l'espace de plusieurs minutes, sans pouvoir rencontrer le point de les y introduire. C'est pour cette raison que j'y ai pratiqué un *guide* pour la prompte exécution... Ce *guide* est un petit trou , *Fig. 13*, qui répond au *circuit ponctué Z*, même *Fig.* L'image du Soleil qui passe à-travers ce trou, est bien différente de celle qui passe par la lunette. Comme elle est beaucoup plus petite, elle est aussi beaucoup plus tranquille, & un écart de plusieurs degrés, n'est pas capable de la faire sortir du fond *CBPA*.

Usage du Guide.

L'Equateur *CDB*, *Fig. 14*, étant orienté, comme j'ai dit, d'une maniere approchante, il faut d'une main tenir l'arrêt *EF* élevé, & de l'autre faire tourner l'équateur, jusqu'à ce que l'image  rentre dans le circuit *Z*, *Fig. 13*; & dès-lors la grande image du Soleil paroîtra infailliblement dans la chambre obscure, & marquera la minute courante. Reste à sçavoir à quelle heure appartiendra cette minute, ce que nous connoîtrons par la coche ou se trouvera le talon *E* de l'arrêt *EF*... Chaque heure ayant 12 coches, celle qui sépare une heure d'avec l'autre, est tout-à-la-fois la fin de l'heure précédente, & le

commencement de la suivante ; la deuxième coche vaut 5 minutes, la troisième 10, & la quatrième 15, qui sont marquées, & ainsi de suite.

Une fois que vous sçavez *captiver* la grande image du Soleil dans la chambre obscure, par le moyen du guide *Q*, il ne vous fera pas difficile d'orienter cet instrument de la manière la plus juste : car pour peu que les poles de l'équateur ne soient pas dans la véritable méridienne, cette image sortira des bornes *CB, PA*, ce qui vous donnera occasion de tourner davantage l'instrument, jusqu'à ce que l'image *S, Fig. 13*, marche exactement entre les deux bornes *CB, PA*, sans en sortir.

P R E M I E R E R E F L E X I O N.

Tout ce que je viens de dire jusqu'ici, deviendrait inutile pour un instrument domestique, orienté d'une manière fixe. Il faudroit seulement ajuster la déclinaison du jour, & changer les coches dans le tems de l'observation, ce qui est tout simple : mais comme cet instrument est aussi destiné pour changer souvent de latitude & de situation en toute façon, il a fallu entrer dans un plus grand détail.

I I. R E F L E X I O N.

Ce Cadran est infiniment avantageux sur terre, pour trouver une méridienne sûre & à toute heure du jour ; car comme le Soleil parcourt $12 \frac{1}{2}$ pouces par chaque 5 minutes, si l'on fait seulement trois opérations de suite (ce qui ne comprend qu'un quart-d'heure), l'image du Soleil aura parcouru $37 \frac{1}{2}$ pouces, & pour peu que l'instrument soit déplacé, cette image aura franchi plusieurs fois les bornes qui lui sont prescrites, ce qui aura porté l'Observateur

vateur à le détourner, pour le ranger dans la place convenable.

II. PROBLEME.

Connoissant la déclinaison du Soleil, trouver la latitude d'un lieu donné, par degrés & minutes.

Comme la déclinaison est la même pour toutes les parties du globe terrestre, si nous voulons (le 6 Juin 1746) sçavoir au juste la latitude du pays où nous sommes, il faut ajuster la déclinaison comme il a été dit Probleme I, Articles 2° & 3° ci-dessus; après quoi l'instrument étant suspendu par *quelques degrés plus ou moins que la juste élévation du pôle*, il faut le tourner horifontalement, jusqu'à ce que le *guide* se montre dans la chambre obscure: que si le *guide* ne s'y montroit pas, on verroit aisément si l'élévation peche par *trop*, ou par *moins*, ou bien si l'équateur n'est pas assez tourné pour l'élévation actuelle du Soleil: dans l'un ou l'autre de ces deux cas, ou il faudroit suspendre l'instrument par un degré *moyen*, ou bien changer quelque chose de l'équateur en avant ou en arriere... Quand le *guide* se montrera dans la chambre obscure, on changera la suspension, ou les coches de l'équateur, jusqu'à ce que le même *guide* tombe dans le *circuit Z*, Fig. 13... Enfin, quand le *guide* tombera dans le *circuit Z*, on observera la marche de la grande image du Soleil; & si quand elle arrivera au milieu de l'espace *AP*, Fig. 13, (également éloignée des deux extrémités *A* & *P*) elle remplit exactement les deux bornes *CB*, *PA*, c'est une marque que l'instrument est bien suspendu, & tout est fait. Si au contraire cette image franchit ses bornes d'un côté ou d'autre, on changera la suspension par le moyen de la Fig. 19, & quand on sera parvenu à rendre l'image

complete au milieu de ses deux bornes , on fera sûr d'avoir trouvé la véritable latitude de l'endroit. On prendra le nombre des degrés sur le méridien , & les minutes sur l'angle *HIKFLG*, Fig. 19.

R E M A R Q U E.

Cette maniere de trouver la latitude est d'autant plus agréable , qu'on peut le faire à toute heure du jour : du moins n'est-on pas obligé d'attendre midi précis , où le ciel peut n'être pas pur : d'ailleurs, comme cet instrument produit l'effet d'un cercle de 100 pieds de diametre : on sent bien que les quarts-de-cercles des Astronomes, n'ont pas, à beaucoup près , cette étendue , ni par conséquent cette précision.

Dans ces sortes d'instrumens , en multipliant les divisions , on les rend extrêmement petites , & c'est de l'attention infinie de l'Observateur , que dépend la justesse de l'opération : mais dans celui-ci, les divisions sont grandes , quoique multipliées , & c'est le Soleil par sa marche précipitée , qui en fait tous les frais.

III. R E F L E X I O N.

Cet instrument demande , à la vérité , beaucoup de justesse dans l'exécution , soit pour l'égalité des divisions , soit pour celle du calibre des pieces , afin qu'elles ne pèsent pas plus d'un côté que de l'autre , & que le centre de gravité soit toujours au centre de l'instrument , quelque situation qu'on puisse lui donner : mais aussi, cela supposé , il fera d'une grande commodité pour quantité d'opérations.

Je sens bien que cet instrument doit être exécuté en

laiton, mais quant au modele que j'en ai fait, il ne peut être que de fer, faute d'avoir le métal convenable, & un ouvrier capable de l'exécuter : il seroit même à souhaiter qu'il n'y eût pas d'autres choses à redire ; mais quelque imparfait qu'il puisse être, il servira à éclaircir mon Mémoire, & c'est tout ce que je demande.

III. P R O B L E M E.

Connoissant la Latitude d'un lieu donné, trouver la déclinaison du Soleil, qu'on ignore, pour un jour déterminé.

Cette opération ne differe presque en rien de la précédente ; car ayant suspendu l'instrument suivant la latitude, il faut le faire tourner horisontalement, pour l'orienter d'une maniere approchante : il faut ensuite faire tourner l'équateur, pour chercher l'heure approchante, au moyen du *guide*, & enfin incliner la chambre obscure, jusqu'à ce que l'image du Soleil remplisse exactement ses deux bornes, étant à une égale distance des deux extrémités *A & P*. On connoitra alors la déclinaison du Soleil, sçavoir les degrés sur l'arc *GADH*, & les minutes sur l'arc *QNR*, *Fig. 16*.

IV. R E F L E X I O N.

Cette méthode peut servir sur terre pour corriger les fautes d'impression, qui peuvent quelquefois s'être glissées dans les Tables de déclinaison, ou pour en dresser une soi-même si l'on veut.

IV. PROBLEME.

Connoissant la déclinaison du Soleil, connoître la Latitude de l'endroit où l'on est, par les ascensions droites du Soleil jusqu'à midi.

Il faut 1°. arrêter la chambre obscure parallèlement à l'équateur, dans la même situation où elle doit être le jour des équinoxes. 2°. Il faut suspendre l'instrument par le point du méridien où il est coupé par l'équateur, en sorte que cet équateur d'*incliné* qu'il étoit, devienne *vertical*. 3°. Il faut faire tourner l'instrument horizontalement, jusqu'à ce que le plan de l'équateur soit parallèle aux rayons du Soleil. 4°. Il faut changer les coches, jusqu'à ce que le guide donne dans le circuit *Z*, *Fig. 13*. Alors la grande image y paroîtra aussi, & baissera bien-tôt, si c'est avant midi, ou haussera si c'est après. Mais comme elle travaillera incessamment à franchir ses bornes; il faudra l'y *captiver*, en tournant l'instrument horizontalement du *Levant au Couchant*, à mesure que le Soleil tournera aussi, en sorte que le plan de l'équateur soit toujours parallèle aux rayons du Soleil. 5°. Quand à force de baisser, l'image sera parvenue au point *PC*, *Fig. 13*, il faudra changer une coche, & le Soleil remontera au point *A*. 6°. Quand l'image ne descendra plus, il sera midi, & le cercle de l'équateur tiendra alors la véritable place du méridien, tandis que le plan du méridien sera parallèle au Levant & au couchant. Je dis ceci pour faire comprendre le changement de cet instrument, étant suspendu par l'intersection du méridien & de l'équateur.

Lorsque le Soleil ne montera plus, on remarquera exactement le lieu de l'image dans la chambre obscure;

on regardera aussi la coche où se trouvera l'arrêt *E*, Fig. 14,
& on notera le tout.

R E D U C T I O N.

En comptant un degré 15 minutes pour chaque coche de l'équateur, on aura le véritable nombre des degrés; chaque minute de la chambre obscure vaudra 15 minutes de degré, & chaque 5 secondes vaudront une minute 15 secondes de degré... On fera la somme du tout, laquelle somme par l'addition de la déclinaison méridionale du Soleil, ou par la soustraction de la déclinaison Septentrionale, donnera la latitude exacte du lieu de l'observation.

II. C O R O L L A I R E.

Cette méthode est excellente pour avoir avec exactitude les hauteurs correspondantes du Soleil sur l'horizon, à chaque moment du jour.

III. C O R O L L A I R E.

On peut aussi, par les élévations du Soleil sur l'horizon, connoître l'heure qu'il est, quand on connoît la latitude.

V. P R O B L E M E.

*Sans connoître ni la Latitude, ni la déclinaison du Soleil;
connoître dans le moment si c'est avant ou
après midi.*

Ce Probleme n'est que l'application du précédent; car l'instrument étant rangé & suspendu comme dans le qua-

trieme Probleme, on n'aura pas plutôt présenté la lunette vers le Soleil, que son image *hauffera ou baissera* notablement dans la chambre obscure, & fera connoître sur le champ, si c'est avant ou après midi.

Usage de cet Instrument sur Mer.

Il est certain que les agitations du vaisseau, surtout par un grand vent, feront évanouir une partie de la précision qu'on peut tirer de cet instrument sur terre : mais il en restera toujours beaucoup plus qu'on n'en a eu jusqu'ici. Le vent n'est pas toujours violent, il est souvent médiocre, & quelquefois trop foible. Ainsi il y aura bien des occasions où cet instrument pourra faire plaisir, comme dans certaines isles, où l'on relâche de gré ou de force, &c. Examinons la chose de plus près.

Cet Instrument demande deux conditions essentielles, pour marquer avec exactitude. La premiere est l'*à-plomb*, qu'il prend par sa propre pesanteur, quand rien ne l'en détourne; & la seconde est sa *direction* par rapport à l'axe du monde, direction qu'on lui donne facilement, en *captivant* l'image du Soleil entre les deux bornes si souvent citées.

De l'À-plomb.

Pour ce qui regarde l'*à-plomb*, l'agitation ordinaire du vaisseau ne l'en écartera pas beaucoup; mais les agitations plus violentes, & l'impression du vent sur l'instrument même, le tiendront dans un balancement continuel, qui ne permettra d'observer que d'une maniere imparfaite. Voilà l'objection dans toute sa force; voyons si l'on y peut répondre.

Premierement, le vent ne souffle que par boutade, &

il y a de tems en tems quelque relâche, pendant lequel l'instrument étant à-plomb, pourra donner lieu à un moment d'observation, d'autant plus utile qu'il sera plus décisif.

En second lieu, quand même ces interstices de vent ne suffiroient pas pour que l'instrument reprît son à-plomb, il est aisé de le lui faire prendre. *Une personne attentive, qui employera ses deux mains à propos pour arrêter les balancemens du cadran, & lui redonner son à-plomb, y réussira toutes les fois qu'elle voudra.* Nouvelles secouffes du vent, nouveau secours de l'homme, jusqu'à ce qu'on ait vû ce qu'on vouloit voir. L'à-plomb est la situation la plus naturelle du corps pesant suspendu librement; elle est aussi la plus invariable & la plus régulière, puisqu'elle sert de règle à presque toutes les autres.

D'ailleurs, si les balancemens se faisoient du Sud au Nord (ce qui peut arriver bien souvent), l'à-plomb n'est pas absolument nécessaire pour l'observation; parce que l'image du Soleil se fera voir en passant dans la chambre obscure à chaque *allée & venue*; & comme l'espace qu'elle parcourt est d'un pied de long, en 5 minutes, on verra bien à peu près d'un pouce à l'autre, ou de deux en deux pouces, les progrès qu'elle fera.

Il n'en est pas de même des instrumens ordinaires. Supposons, par exemple, un anneau astronomique, ou un astrolabe de même calibre que ce cadran, de 30 pouces de diametre; le rayon du Soleil ne fera que 3 lignes par degré, c'est-à-dire, en 4 *minutes d'heure*, & pour peu que l'instrument balance, on perdra tout le fruit de l'observation; mais dans celui-ci, le rayon du Soleil fera 120 lignes par degré, ou en 4 *minutes d'heure*, & les balancemens n'empêcheront pas d'entrevoir une différence sensible d'un espace à l'autre.

De la Direction.

Quoiqu'il ne connoisse la mer que pour l'avoir vûe du rivage, je suis bien persuadé que les balancemens du vaisseau ne l'empêchent pas de suivre une ligne assez droite (excepté pendant la tempête), sans quoi on ne pourroit pas naviger. Cela étant, une fois qu'on aura rangé l'instrument dans sa véritable direction, il y restera sans aucun écart; parce que l'anse est faite de façon, que l'instrument, avec toute sorte de liberté, n'a pas celle de tourner *horizontalement* de lui-même; il faut que quelqu'un le tourne, & par conséquent il restera dans la situation respective du vaisseau, sans qu'il soit besoin de le diriger à chaque observation. L'unique attention de l'Observateur fera donc de changer les coches de l'équateur, & de redonner l'*à-plomb* en touchant l'instrument par le bas, pour rompre ses balancemens.

II. REMARQUE.

Il seroit inutile de m'étendre davantage sur les inconvéniens de la mer, & sur les remèdes qu'on peut y apporter. Je voudrois être à même de pouvoir en faire l'épreuve, je n'épargnerois rien pour cela, & peut-être que je trouverois des expédiens suffisans. Après tout, si cette machine paroît à mes Juges pouvoir mériter quelque attention, l'expérience & le tems acheveront le reste. Quant à moi, j'ai souvent exposé au vent le modele que j'avois fait en bois, & dans le plus fort de l'agitation, je l'arrêtois tout-à-coup, & je retrouvois la minute sans erreur, ce que je connoissois par une bonne montre à secondes, que je mettois d'accord avec l'instrument, avant que de l'exposer au vent.

III.

III. REMARQUE.

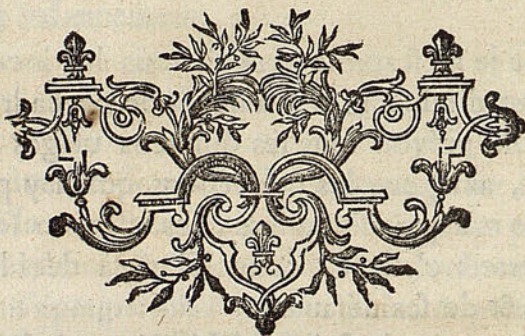
Cet Instrument peut servir pour connoître la déclinaison de l'aiman, dans les différentes régions où un vaisseau peut se trouver. Car tant que l'image du Soleil se tiendra exactement dans ses deux bornes, & surtout pendant plusieurs opérations, on ne peut pas douter que le méridien ne soit parallèle à l'axe du monde.... Disons mieux; cet instrument tiendrait lieu de Bouffole pendant le jour, dans un cas de nécessité; car étant une fois placé relativement au vaisseau, il est impossible que le vaisseau change tant soit peu de direction, qu'aussi-tôt l'image du Soleil ne sorte de ses bornes; & tant qu'il y restera, c'est une preuve que le vaisseau se soutient dans sa direction.

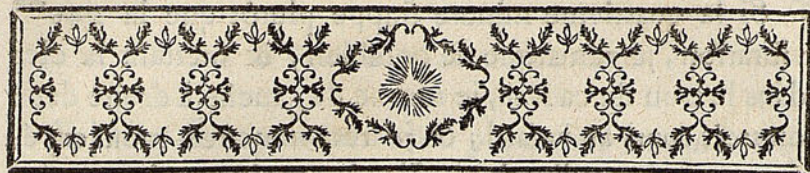
DERNIERE REMARQUE.

Comme je ne sçauois prévoir tous les inconvéniens qui peuvent diminuer les avantages de ce cadran, je ne sçauois aussi prévoir tous les différens usages qu'on en peut tirer, ainsi que les corrections qu'on y peut faire. Cette idée m'a paru singulière; les effets en sont surprenans sur terre: c'est aux connoisseurs à décider de ses avantages & de ses défauts.

Il est bien tems de finir un Mémoire qui n'est déjà que trop long, & qui peut-être, n'en sera pas plus intelligible. Permettez que ce soit en faisant remarquer que ces deux pieces semblent se donner mutuellement la *main*, pour perpétuer la connoissance de l'heure en mer. Si l'une & l'autre pouvoient être un jour exécutées avec toute la justesse dont elles sont susceptibles, elles serviroient peut-être à la connoissance d'une chose non moins importante

que l'heure ; je parle des longitudes sur mer , qu'on ne connoîtra jamais qu'au moyen d'une *horloge* parfaitement juste , & d'un *cadran solaire* excellent , pour pouvoir comparer l'heure du méridien de *départ* (marquée sans cesse par cette horloge) , avec l'heure de tout autre méridien (marquée par le cadran solaire dans le tems de l'observation)... Les découvertes les plus utiles sont presque toujours si peu de chose dans leur naissance , qu'on me pardonnera l'espece de conjecture que je viens de hasarder en faveur de ces deux-là. Je reconnois très-sincèrement que ce ne peut être qu'à force de correction : mais je serois toujours trop flatté , si j'avois fait un premier pas dans cette carrière , laissant la gloire à quelque autre de la fournir jusqu'à la fin.





ADDITIONS

A U

MEMOIRE

QUI A POUR SENTENCE :

Semper id melius est , quod optimo propinquius est.



A précipitation avec laquelle je fus obligé de dresser ce Mémoire, m'ayant fait oublier certaines choses qui méritoient d'y avoir place, j'ai cru devoir les mettre dans ce Supplément.

Méthode pour régler le Sablier.

Le petit bruit que fait à chaque minute la croix d'acier, en frappant sur la jambe *ED*, *Fig. 9*, est d'un secours admirable pour régler ce sablier. Je me fers d'un pendule libre à secondes; je le lâche au moment que la minute frappe, & je compte jusques à 240 vibrations, faisant 4 minutes, ou un tour complet de la croix des creusets. Car, comme j'ai dit, il y a une ou deux secondes de différence d'un creuset à l'autre, mais les tours entiers sont égaux entre eux.

Ttt ij

Si la quatrieme minute frappe plutôt que la 240^{me} vibration, je remarque de combien, & mettant la clef dans le trou du cadran, je tourne de gauche à droite deux ou trois tours au hafard, & je recommence mon expérience de 240 vibrations. Il est certain que le tour des creusets s'achevera quelques secondes plus tard, & continuant de tourner la clef de gauche à droite, j'attrappe en moins de demi-heure une justesse approchante : la même chose pour reculer, mais il faut tourner de droite à gauche.... Je l'observe ensuite pendant quelques heures sur ma pendule, & enfin je le mets sur un cadran solaire, pour voir l'effet de 24 en 24 heures.

Ce même pendule libre me sert de preuve de tems en tems, pour connoître si rien n'embarasse le trou ; car pour peu qu'il y eût d'obstacle, les 4 minutes tiendroient beaucoup plus de 240 vibrations. On pourra s'en servir dans les rades ou autres occasions de repos : on pourroit même avoir un sablier ordinaire de 4 minutes (coulant bien gros pour être plus sûr), & s'en servir en route, pour vérifier la marche du sablier : car comme j'ai dit, le bruit des minutes rend ce sablier beaucoup plus facile à régler que les pendules ordinaires.

Il me semble qu'une cloche de verre fermée par le bas, ou une boîte factice de même matiere, étant suspendue avec la suspension marine, & placée dans l'endroit du vaisseau le plus tranquille, c'est-à-dire, au centre du mouvement ; il me semble, dis-je, qu'une pareille boîte transparente, pourroit contenir un pendule libre qui conserveroit quelque tems ses vibrations, malgré le mouvement du vaisseau, attendu que cette agitation ne changeroit rien à l'air renfermé dans la boîte. C'est une idée que je ne suis pas à portée de vérifier, & que je ne donne que par conjecture.

O B S E R V A T I O N.

J'ai bien du regret de n'avoir pas donné à mon sablier autant de *profondeur* que de *largeur* ; car n'occupant presque que la même place , il auroit contenu la moitié plus de sable , & j'aurois pu le faire couler beaucoup plus gros , puisque plus il coule gros , & plus j'y trouve de justesse.

Bien plus , cela m'auroit fourni le moyen d'avoir deux sabliers dans un seul , avec un peu plus de dépense , & l'un auroit servi de preuve à l'autre. Voici mon idée.

Le gros de la dépense consiste surtout dans les fers & la caisse de bois , & si mon sablier avoit autant de profondeur que de largeur , j'aurois pû mettre un second cadran au côté *H* de la *Fig. 2* , & partageant en deux l'espace *FE* de la *Fig. 6* (qui auroit été plus grand de moitié) , j'y aurois placé une seconde croix de creusets , qui auroit marqué sur le second cadran dont je parle ; & le même entonnoir ayant deux *couloirs* , auroit fourni à tous les deux à la fois.

Il me paroît que cela auroit été très-avantageux sur mer (où l'on peut charger une personne de veiller au sablier) car un sablier tel que le mien , étant une fois bien réglé , ne doit jamais *avancer* , mais il peut *reculer* , quand quelque poil ou autre chose embarrasse le trou. Or les deux cadrans du même sablier étant également bien réglés , le premier qui retarderoit sur l'autre , seroit celui qui feroit faute : on l'ouvreroit pour dégager le trou , & on le remettroit ensuite à la minute , par le moyen de l'autre , qui n'auroit point interrompu sa marche.

De la Suspension.

La suspension de ce sablier paroît suffisante telle qu'elle est, car je le fais balancer par des vibrations de deux pieds (la suspension jusqu'au plancher étant allongée de trois pieds), sans que le pendule libre me fasse voir aucune différence entre cet état d'agitation & l'état de repos. Cependant, quand MM. les Commissaires auront vû le modele, ils jugeront s'il conviendrait d'ajouter à cette suspension, la suspension marine des bouffoles.

De l'Humidité.

Quoique la caisse de mon sablier soit faite de plusieurs pieces de rapport unies les unes aux autres, j'ose cependant avancer que l'humidité n'y pénétrera pas avec plus de facilité que dans les sabliers ordinaires; car outre que les planches de la caisse ont 7 à 8 lignes d'épaisseur, elles sont peintes en huile de plusieurs couches, que l'eau même ne pénétreroit pas aisément; & d'ailleurs, en cas de besoin, on pourroit le revêtir d'une seconde boîte ou *surtout*, qu'on n'ouvreroit que pour tourner le sablier, ce qui le mettroit au-dessus de toute atteinte.

De la qualité du Sable.

Le sable que j'ai employé dans mon sablier, n'est pas tel qu'il devoit être; il n'est pas assez grainé, & entraîne beaucoup de poussiere avec lui. Je l'ai trouvé dans une forêt à une lieue de chez moi, & je suis forcé de m'en servir faute d'autre. Le sable d'Allemagne est infiniment plus propre pour cela, mais il coûte ici 20 sols la livre.

J'ignore si l'on pourroit trouver quelque autre matiere plus dure & aussi fluide que le sable : elle seroit préférable , à cause qu'elle seroit moins sujette à se réduire en poussiere. Cependant le sable d'Allemagne durera long-tems , sans avoir besoin d'être changé.

E X P E R I E N C E.

J'avois mêlé parmi mon sable une certaine quantité de *poudre d'œufs* , pour le rendre plus agréable à la vûe , & quoique plus legere , je comptois que le mélange la rendroit , pour ainsi dire , *homogene* avec le sable. Cependant je m'apperçûs que mon sablier (deux ou trois heures après avoir été tourné) avançoit sensiblement , & reculoit sur la fin. Je jugeai qu'il en étoit d'un sable plus pesant à l'égard d'un plus leger , comme des personnes plus robustes aux personnes plus foibles au sortir d'une presse ; c'est-à-dire , que le sable plus pesant gagnoit le bas avec plus de force , & obligeoit le plus leger à rester à côté , pour ne couler que sur la fin. Je retirai ce sable mêlé , j'y en mis d'autre tiré tout d'un même endroit , & le défaut a disparu : d'où j'infere qu'il faut employer du sable *homogene*.

II. E X P E R I E N C E.

J'ai éprouvé que non-seulement un trou conique fait couler le sable plus uniment , mais encore qu'il en coule beaucoup plus. Car ayant fait un couloir dont le trou étoit plat & mince comme du papier , j'enfonçai une broche dans ce trou plat , & dans un trou conique de 3 lignes d'épaisseur : la broche entroit un peu plus dans le trou plat que dans le trou conique , ce qui prouve que le premier étoit plus grand que le second , & cependant le trou

conique qui étoit un peu plus petit, délivroit la moitié plus de fable.... J'attribue cette différence aux petites colonnes de fable qui pressent pour la sortie. Le trou plat n'en a qu'une seule, & le trou conique en a plusieurs, qui, enfilant la base du cone, pressent de tous côtés pour arriver à la pointe.

Sur le Cadran.

En relisant l'article de mon Mémoire, qui a pour titre *l'intérieur de la Chambre obscure*, j'ai remarqué que dans la *Fig. 12* le rayon du Soleil ne paroît pas faire l'angle de réflexion égal à celui d'incidence. Si je ne me suis pas étendu davantage là-dessus, c'est parce qu'on verra dans le modele, que la position respective des miroirs, corrige ce qui paroît n'être pas en règle : mais comme on pourroit examiner le Mémoire avant l'arrivée du modele, j'ai cru devoir expliquer cet endroit.

Méthode pour placer la Lunette.

Au moyen des expériences que j'ai faites, j'ai trouvé qu'avec la lunette dont je me sers, il me faut 58 pouces de distance, depuis l'oculaire *R* jusques au point *Z*, *Fig. 13*, pour que l'image du Soleil ait cinq pouces, & qu'elle fasse $2\frac{1}{2}$ pouces par minute. C'est pour cela que je fais sortir l'objectif *Q* d'environ 4 pouces hors de la chambre, pour qu'il reste 14 pouces depuis *R* jusques au premier miroir *T*... Depuis celui-là jusques à *VY*, il y en a 22, & 22 depuis *Y* jusques à *Z*; ce sont justement les 58 pouces dont j'ai besoin.

1°. J'ai fait une ouverture ronde au fond d'en-haut, pour recevoir la lunette, laquelle ouverture est également éloignée des deux côtés de la chambre.

2°.

2°. Pour diriger l'oculaire R de façon que le rayon RT arrive naturellement sur la ligne TZ , laquelle partage le fond d'en-bas en deux parties égales, j'arrête le bout de la lunette R autant au milieu que je le puis, au moyen de deux vis, en mesurant avec le compas.

3°. Ayant garni de papier l'espace NCB , j'expose l'objectif au Soleil, & je dirige la chambre de façon que le guide C donne précisément sur Z ; & pour lors je vois si l'image du Soleil est partagée bien également, par la ligne TZ ; & si je trouve de la différence, je pousse insensiblement l'oculaire R jusqu'à ce que la ligne TZ partage bien par le milieu cette image du Soleil, & je fixe la lunette en serrant les deux vis qui la tiennent. Vous trouverez ci-après une autre preuve du *bien-être* de la lunette.

L'horison de la Lunette.

La lunette étant fixée de la façon que je viens de dire, je change *un peu* la situation de la chambre, l'inclinant indifféremment de droite à gauche & en tout sens, pour que l'image du Soleil change de place. Cette image, en changeant de place, rencontre un cercle *invisible*, lequel ne devient *visible*, que par la rencontre de l'image du Soleil... Ce cercle (dont on ne voit jamais qu'une portion à la fois) est d'une très-belle couleur bleu-céleste. On peut le rendre visible successivement dans toutes ses parties, en dirigeant l'image du Soleil tout-autour.

La principale propriété de ce cercle, est de *terminer* précisément l'espace que le Soleil peut éclairer sans changer la *situation* de la chambre: de sorte que l'image du Soleil arrivant sur ce cercle, qu'elle éclaire, elle commence à être tronquée, & cesse entièrement de paroître dès qu'elle a franchi ce cercle, comme elle ne commence de

paroître qu'à mesure qu'elle entre dans l'intérieur de ce cercle. C'est ce qui m'a porté à l'appeller l'*horison*, puisqu'il marque, pour ainsi dire, le lever & le coucher du Soleil... Cet horison est toujours proportionnel à l'image du Soleil; leurs diametres sont environ comme 46 à 14.

Une autre propriété de cet *horison*, est d'indiquer la juste position de la lunette; car si à mesure que le Soleil le rend visible, vous avez attention d'y marquer des points, & que vous le suiviez tout-autour, vous aurez un cercle *ponctué* & parfait, lequel doit être également éloigné des deux côtés de la chambre, ou bien la lunette est mal posée.

Fozer le premier miroir.

Puisque le Soleil ne luit qu'autant qu'il est renfermé dans le cercle de l'*horison*, ce cercle désigne tout-à-la-fois & la grandeur que doit avoir le miroir, & la place où il doit être arrêté.

Ce miroir (quarré-long) est mastiqué sur une plaque de fer, laquelle est montée sur 4 pieds, imitant la figure d'une petite table. Les quatre pieds de cette table qui sont faits en vis, ont chacun *deux écroues*, dont une reste en-dedans de la chambre, & l'autre en-dehors; & la *tole* qui forme le fond de la chambre, se trouve entre les deux écroues, ou pour mieux dire, entre les 8 écroues, 4 dedans, 4 dehors. Ces deux écroues à chaque vis, sont pour pouvoir fixer chaque pied dans l'élévation convenable; elles ferment l'une contre l'autre (la *tole* entre deux).

C'est par le moyen de ces pieds, qu'on donne au petit miroir la situation nécessaire pour renvoyer en haut l'image du Soleil. Pour cela on couvre d'un papier le fond d'en-haut: l'image réfléchie va s'y peindre... Alors il faut de nouveau agiter la chambre, pour que cette *nouvelle*

image découvre encore son *horison* en-haut, comme nous avons dit pour le bas. Il faut ponctuer cet *horison*, & si étant achevé, il se trouve également éloigné des deux côtés de la chambre, c'est une marque que le premier miroir est dans sa *juste position* : sinon il faut lever ou baisser les pieds du petit miroir, jusqu'à ce que l'*horison* d'en-haut soit à une égale distance des deux côtés de la chambre.

Poser le second Miroir.

Le second miroir ne diffère du premier que par sa grandeur. Même nombre de pieds, même nombre d'écroues, & même façon de le placer, c'est-à-dire sur l'*horison* qu'on aura ponctué. Il faut tracer en-bas les deux bornes *CB, PA*, qui formeront le chemin où doit passer l'image du Soleil... Comme on ne peut pas trouver un troisième *horison* en-bas, parce que cet *horison* étant fort grand, se trouve hors de la chambre obscure, il faut avoir une planche bien dégauchie, qu'on mettra sur une ligne méridienne à angles droits. On inclinera cette planche vers le midi, de façon que son plan réponde au *parallele* que décrit le Soleil ce jour-là dans le ciel.

Enfin aux approches de midi, on appliquera la chambre contre cette planche, & l'inclinant peu à peu vers le levant ou vers le couchant, jusqu'à ce que le guide *or* donne sur *Z*, on examinera si l'image du Soleil occupe précisément l'espace qui lui est destiné entre les deux bornes *CB, PA*; & supposé qu'il l'occupe, on examinera si en avançant par le *propre mouvement* du Soleil, cette image ne sortira pas de ses bornes... Si elle se maintient entre ces deux bornes depuis *A* jusques en *P* (la chambre étant toujours appliquée contre la planche en question), c'est une marque que le second miroir est bien placé, ainsi que

tout le reste. Mais si au contraire on voit que l'image du Soleil ne marche pas entre ces deux bornes, on touchera aux pieds du grand miroir du côté qu'on jugera convenable, jusques à ce que l'image du Soleil se maintienne dans ses bornes *CB, PA, Fig. 13.*

Alors vous ferez assuré que la lunette, le premier & le second miroir sont bien disposés, & que la chambre toute entiere est dans sa perfection, & en état d'être mise dans son équateur.

De la matiere des Miroirs.

Je pense qu'il y auroit quelque avantage à se servir de miroirs de métal, soit parce que l'étain des glaces peut s'ôter avec le tems, soit parce qu'elles sont fort fragiles, soit enfin parce qu'au milieu du grand miroir *VY*, on pourroit percer le trou du guide *Ø*, ce qui donneroit le moyen de diminuer la profondeur de la chambre d'environ deux pouces: mais je ne puis pas employer des miroirs de métal, ni même en faire la différence, n'ayant ni matiere ni ouvrier pour cela.

Ces miroirs de metal seroient absolument nécessaires, si les angles que font les rayons dans la *chambre obscure*, étoient plus ouverts qu'ils ne sont, parce qu'alors une glace étamée (sur-tout si elle est bien épaisse) pourroit produire deux images à la fois, une sur l'étain, & l'autre sur la glace: mais ici les angles sont si aigus, que cet inconvénient n'est point à craindre.

De la Suspension.

Quoique les deux suspensions que j'ai proposées dans mon Mémoire, soient l'une & l'autre bien praticables,

j'ai cru devoir en employer une troisieme, qui me paroît plus avantageuse à plusieurs égards... J'ai fait sur les deux circonférences (en-dedans) de mes deux méridiens accolés, des entailles d'un degré à l'autre. J'y mets une anse pliante en tout sens, laquelle peut couler tout-au-tour du méridien (les poles exceptés), & suspend la machine par tel degré que l'on veut. Voilà pour ce qui regarde les degrés.

Quant aux minutes, elles sont marquées au bas de l'instrument, au moyen d'un poids de 12 à 15 livres, qu'on peut augmenter à discrétion. Ce poids, qui est renfermé dans une espece de cage quarrée, que je ne sçauois bien figurer sur le papier, s'accroche par une anse au degré correspondant d'en-bas. Par exemple, si la suspension est en-haut au 50^e degré, le poids sera mis en-bas, pareillement au 50^e degré.

L'anse du poids est traversée par une forte vis *horizontale*, dont la longueur est parallele au plan du méridien. En tournant cette vis, on fait avancer ou reculer le poids de tant & si peu que l'on veut, ce qui chasse insensiblement toute la machine vers le Midi ou vers le Nord, d'autant de minutes qu'on souhaite. Car ce poids, en avançant ainsi, fait mouvoir un *micrometre*, qui marque les minutes sur l'extérieur de la cage.



Raisons de préférer cette dernière Suspension.

La premiere suspension, *Fig. 18*, présente deux grandes difficultés. 1°. Il n'est pas aisé, il paroît même très-difficile, de pouvoir faire des *pas* de vis qui soient exactement de la largeur d'un degré. 2°. Cette vis qui soutiendrait tout le poids de la machine, ne tourneroit qu'avec peine, & s'useroit bien vite.

La seconde suspension, *Fig. 19*, demande une plaque assez longue, pour qu'il y ait un certain espace d'un trou à l'autre, ce qui allonge la machine; & d'ailleurs il y auroit bien de l'embarras, pour changer la cheville d'un trou à l'autre, parce que pendant ce changement, il faudroit soutenir toute la machine par quelque autre moyen.

La troisieme suspension que je propose, est infiniment plus commode. 1°. Parce que l'anse de suspension peut couler d'un pole à l'autre sans démancher. 2°. Le poids qui est en-bas contribue à faire garder l'à-plomb à toute la machine. 3°. La vis qui tourne ne soutient que le poids, & ne souffre pas beaucoup. 4°. Il n'y a point de sujettion pour les *pas* de la vis, parce que les minutes sont marquées d'après les *pas*. 5°. Et c'est ici le principal avantage, ce poids au bas de la machine est capable de *compenser* les inégalités qui pourront se trouver dans l'équilibre de chaque piece en particulier, & plus il sera pesant, & plus ces inégalités deviendront insensibles.

La suspension est faite actuellement, mais le poids ne l'est pas encore, ni ce qui le concerne. Je rendrai compte dans une critique qui accompagnera les modeles, je rendrai compte, dis-je, de la méthode que j'aurai suivie pour tracer les minutes avec justesse.

J'oubliois d'avertir que le poids, quoique mobile, quand il faut le changer de degré, n'a pas pour cela la liberté de balancer en particulier; il est fixe à cet égard, & ne fait, pour ainsi dire, qu'une même piece avec le méridien. Cette précaution me paroît nécessaire pour la mer, afin que le tout soit plutôt arrêté, à mesure qu'on touchera le poids avec la main pour rompre les balance-mens de la machine.

Méthode pour vérifier l'Equateur.

Pour ce qui regarde la construction & l'emplacement de l'équateur, il suffit d'observer, 1°. Si le plan de cet équateur passe également & en même tems par les deux points de 90 degrés du méridien. 2°. Si toutes les parties de sa circonférence passent à une égale distance de ces mêmes points de 90 degrés... Celui que j'ai fait construire peche un peu dans ces deux cas: mais quand j'en ferois construire trente, ils auroient toujours quelque défaut, parce que mon ferrurier n'en sçait pas davantage; & quand il veut corriger un défaut, il en met ordinairement trois ou quatre opposés.

Quant à la division de ce même équateur, qui doit être en 288 parties, elle n'est pas si difficile, quoiqu'elle le soit toujours beaucoup pour gens qui n'ont ni l'habitude, ni les instrumens nécessaires: mais il est à craindre que les défauts de construction n'influent un peu dans les divisions, quoiqu'elles soient justes d'ailleurs.

Pour connoître si ces divisions sont bien égales, on aura un pendule libre, ou une pendule à secondes; & après avoir orienté l'instrument avec soin, on observera le moment précis que le limbe antérieur du Soleil arrivera à la fin de

la *cinquieme minute*. Il faut pour cela deux personnes, l'une pour compter les secondes *tout haut*, & l'autre pour observer.

On changera ensuite une coche sans se presser, & si le limbe antérieur du Soleil arrive à la fin de la cinquieme minute en 300 secondes précisément, c'est signe que la division est juste : on pourra suivre les autres coches de la même façon. Je suppose qu'on est bien assuré de la justesse du pendule libre, & que rien d'étranger ne la dérange. Une bonne pendule seroit plus commode.

Si au contraire on voit une différence en avant ou en arriere, il faudra limer la coche d'un côté, & la *battre* un peu de l'autre pour l'étendre. On pourroit avoir des coches mobiles, qu'on arrêteroit avec des vis : mais cet expédient n'est bon que pour les mauvais ouvriers, les habiles gens y suppléeront par une division exacte.

Après tout, l'inexactitude de ces divisions ne peut pas causer une grande erreur, parce que ce qui peut manquer à une coche, se trouvera sur l'autre ; tout comme la mauvaise exécution de cette piece ne doit pas diminuer le prix de l'*arrangement & de l'invention*.

Emplacement de la Machine pour observer l'heure.

Cette machine n'a pas besoin d'être toute à découvert pour trouver l'heure. Il suffit que l'objectif de la lunette reçoive les rayons du Soleil ; tout le reste peut être à couvert, & du Soleil & du vent : elle peut même être entièrement renfermée dans une chambre, pourvu que le Soleil y entre par une fenêtre ou une porte. On pourra donc sur mer, la placer sous le *gaillard*, ou sous la *dunette*, & par-tout ailleurs où le vent lui sera moins contraire.

Solution

Solution de deux cas où la Machine elle-même peut empêcher la Lunette de recevoir les rayons du Soleil.

Comme le Soleil change continuellement de déclinaison, il arrivera deux fois par an, que l'équateur se trouvera précisément entre le Soleil & la lunette, ce qui rendroit à chaque fois la machine inutile pendant deux ou trois jours.

Pour parer cet inconvénient, il faudra changer la suspension de place, la mettant *un* ou *deux* degrés en avant ou en arrière; & pour corriger ce que ce changement aura produit, on reculera la déclinaison de la *chambre obscure*, d'autant de degrés qu'on aura avancé la suspension; & lorsque le Soleil aura suffisamment changé de déclinaison, pour que l'équateur ne soit plus un obstacle, on remettra les choses à leur place. Voilà pour le premier cas.

Le second est moins considérable, mais il peut arriver plus souvent. Pour rendre mes deux méridiens bien solides, j'ai cru devoir mettre une *entre-toise* de dix en dix degrés, ce qui fait 36 pour tout le tour. Il y en a quatre par conséquent, qui, en certains tems de l'année, pourront intercepter les rayons depuis onze heures & demie jusqu'à midi & demi *seulement*, tout le reste du jour étant libre: car la déclinaison étant de 23 degrés & demi de chaque côté, il y a deux entre-toises de part & d'autre qui seront dans le cas, (la cinquième qui se trouve à l'intersection de l'équateur, ne devant pas être comptée).

Il n'est plus tems que je songe à réparer cette faute sur mon méridien, mais on pourra l'éviter dans un autre, en faisant ces quatre entre-toises différentes des autres,

c'est-à-dire, qu'on les fera en vis, & qu'on leur destinera deux places à chacune, pour pouvoir les changer suivant que le cas l'exigera, en conservant toujours au méridien la solidité qu'il doit avoir.

Cependant on corrigera, *si l'on veut*, cet inconvénient, de la même manière que le premier, en *avançant* la suspension, & *reculant* la déclinaison de pareil nombre de degrés.... Je dis *si l'on veut*, parce que pouvant avoir les heures avant & après midi, on peut se passer de celle-là.

F I N.



Fig. 1^{re}

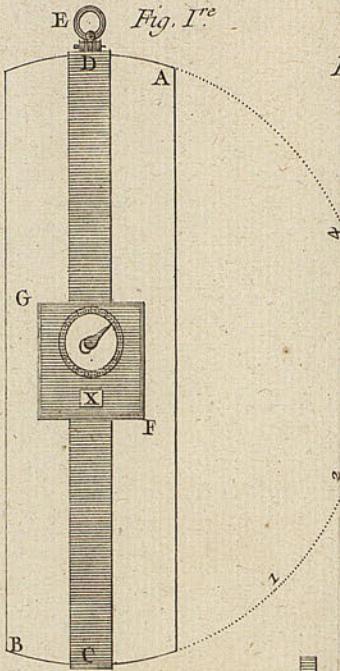


Fig. 2.

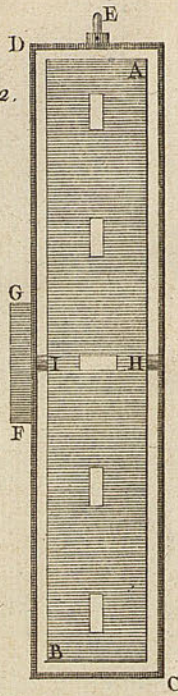


Fig. 6.

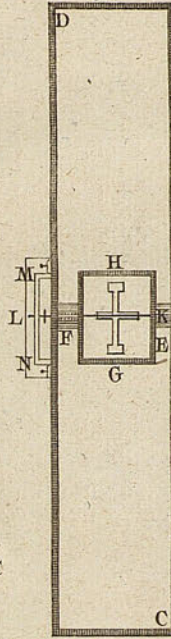


Fig. 3.

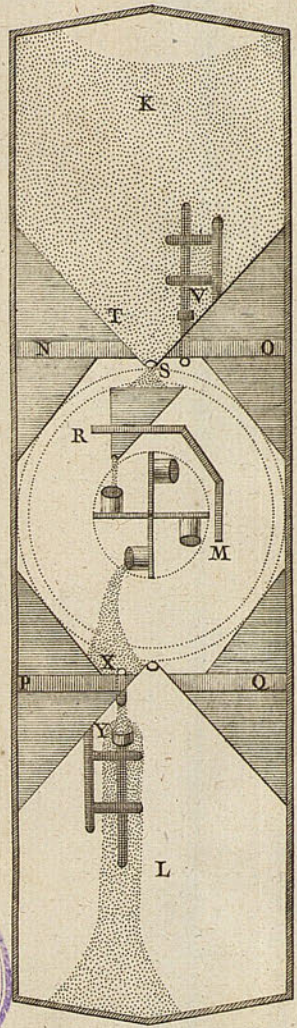


Fig. 7.

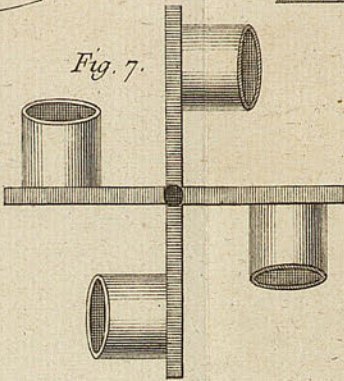


Fig. 5.

Plan du Tamis

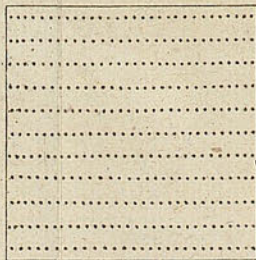


Fig. 4.

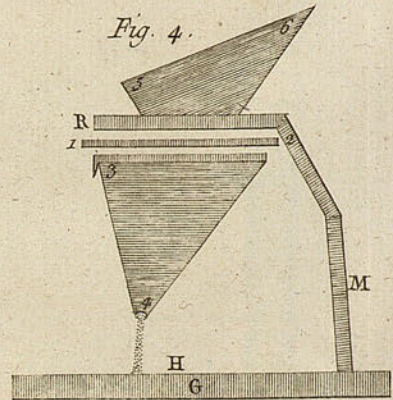


Fig. 8.

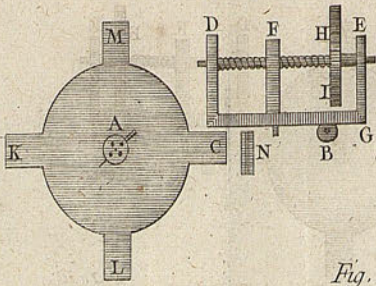


Fig. 10.

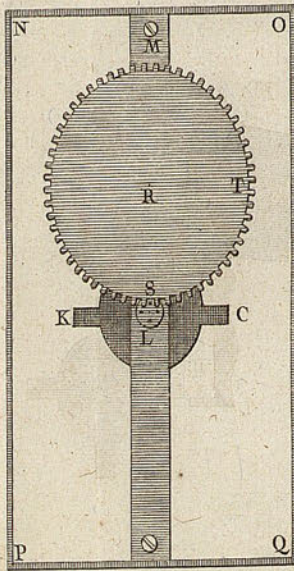


Fig. 9.

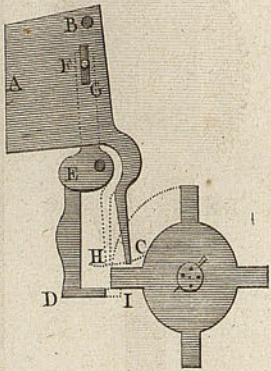


Fig. 11.

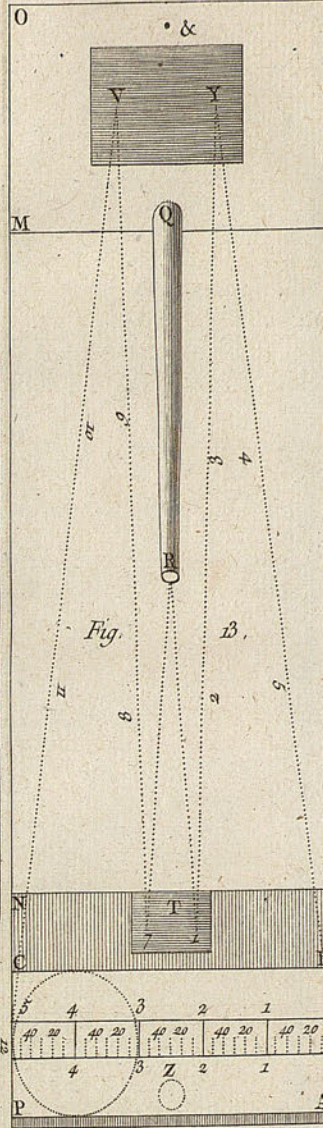
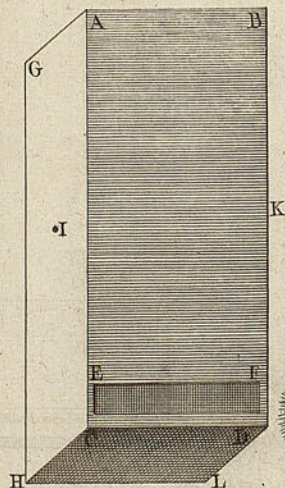
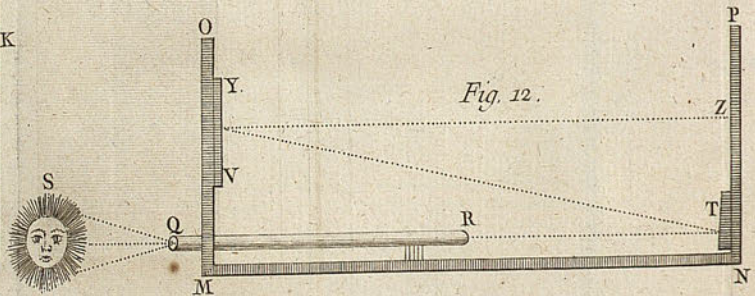


Fig. 12.



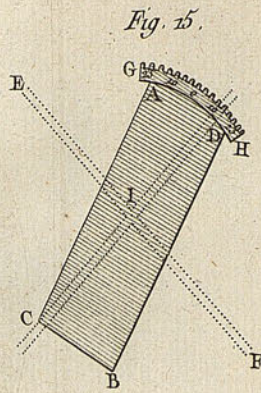
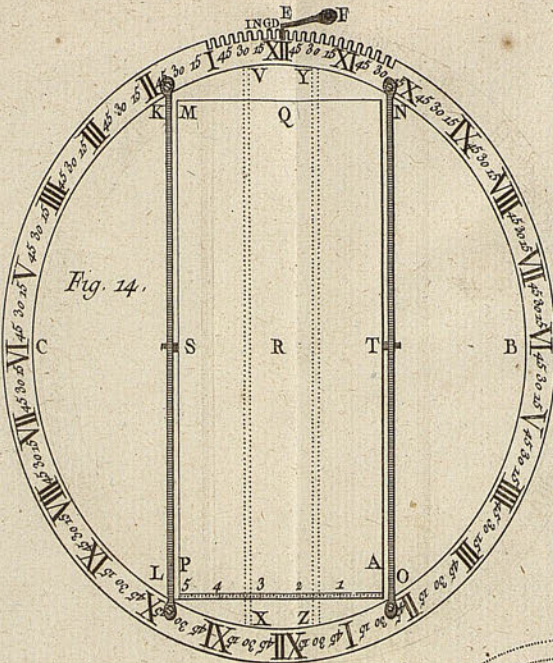


Fig. 17.

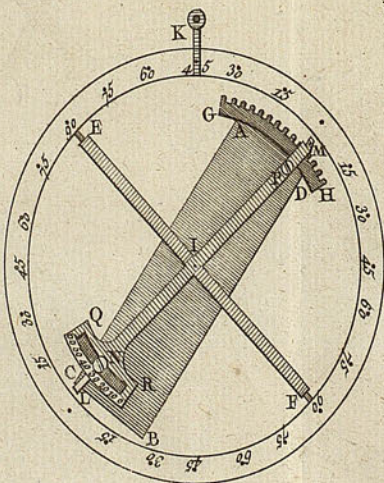
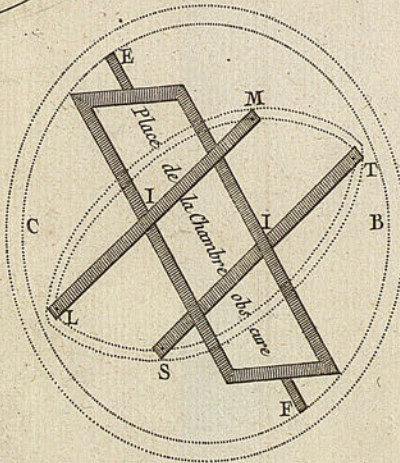
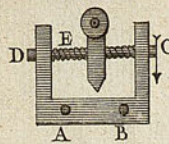


Fig. 18.



H	I	K
60.	60.	60.
55.	55.	55.
50.	50.	50.
45.	45.	45.
40.	40.	40.
35.	35.	35.
30.	30.	30.
25.	25.	25.
20.	20.	20.
15.	15.	15.
10.	10.	10.
5.	5.	5.
F	L	G

P I E C E

QUI A REMPORTÉ

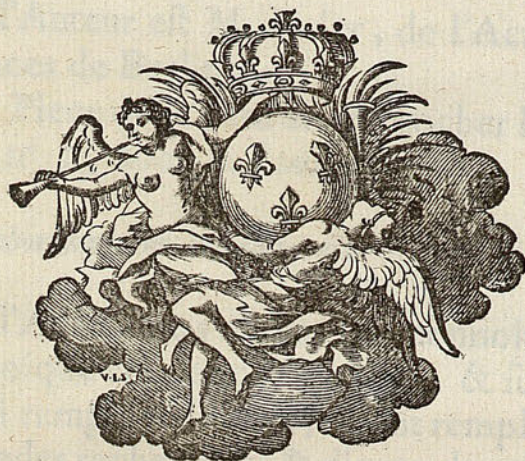
L E P R I X

DE L'ACADÉMIE ROYALE
DES SCIENCES,

EN M. D C C. XLVIII.

*Sur les Inégalités du Mouvement de Saturne & de
Jupiter.*

Selon la fondation faite par feu M. ROUILLE' DE
MESLAY, ancien Conseiller au Parlement.



A P A R I S, rue S. Jacques.

Chez GABR. MARTIN, J. B. COIGNARD,
& H. L. GUERIN, Libraires.

M. D C C. XLIX.

P I E C E

QUI A REMPORTÉ

LE PRIX

DE L'ACADEMIE ROYALE

DES SCIENCES

AN M D C C X L I X

Par les Juges de l'Académie des Sciences & de
Jupiter.

Après la lecture faite par son M. Rouille, de
M. de la Cour, ancien Conseiller au Parlement.

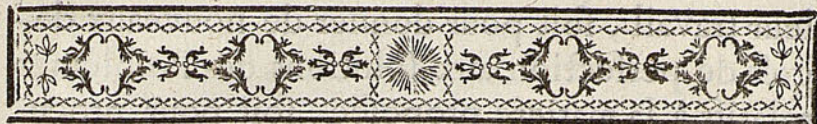


A PARIS, chez S. Jodanis.

chez G. L. MARTIN, J. R. COIGNARD.

& H. L. GUERIN, Libraires.

M. D C C X L I X



AVERTISSEMENT.

L'ACADEMIE avoit proposé pour sujet du Prix de l'année 1748, une *Théorie de Saturne & de Jupiter, par laquelle on puisse expliquer les Inégalités que ces deux Planetes paroissent se causer mutuellement, principalement dans le tems de leur Conjonction.* Elle a adjugé ce Prix à la Piece n° 3, qui a pour devise :

Ponderibus librata suis per inane profundum

Sidera, quò vis alma trahit retrahitque, sequuntur.

dont l'Auteur est M. Euler, de l'Académie des Sciences de Berlin.

La Piece qui a paru en approcher le plus, est celle n° 1, dont la devise est :

Labor improbus omnia vincit.

dont l'Auteur ne s'est pas fait connoître.

Quoique ces deux Ouvrages, & sur-tout celui qui remporte le Prix, soient remplis des plus profondes recherches, & dignes des plus grands éloges, il a paru à l'Académie que les Auteurs auroient pû tirer encore un plus grand parti de

leur travail , soit pour donner de nouveaux degrés de perfection aux solutions des Problèmes relatifs à la matiere proposée , soit pour procurer , au moyen de ces solutions & d'un meilleur choix d'observations , de nouveaux secours à l'Astronomie , ou jetter un plus grand jour sur le mécanisme des corps célestes. Il ne suffit pas d'ailleurs , dans une matiere aussi épineuse , de se rendre seulement intelligible à ses Juges ou à ceux qui ont déjà résolu les mêmes questions ; il faut encore , pour contribuer de tout son pouvoir à l'avancement des Sciences , se mettre à la portée du plus grand nombre de Lecteurs qu'il est possible , en énonçant au moins les principaux raisonnemens , & en indiquant les plus difficiles opérations des calculs.

Ces motifs joints à l'importance & à l'étendue de la matiere , ont engagé l'Académie à proposer le même sujet une seconde fois , pour le Prix de 1750. ; & elle croit devoir exiger des Auteurs qui travailleront désormais pour les Prix , qu'ils entrent dans un détail suffisant sur la démonstration des propositions qui serviront de base à leurs théories.



RECHERCHES
SUR LA QUESTION
DES
INÉGALITÉS DU MOUVEMENT
DE SATURNE
ET DE JUPITER.

*Sujet proposé pour le Prix de l'année 1748,
par l'Académie Royale des Sciences
de Paris.*

*Ponderibus librata suis per inane profundum
Sidera, quò vis alma trahit retrahitque sequuntur.*

Par M. EULER, Professeur Royal de Mathématiques
à Berlin, de l'Académie Impériale de S. Peter-
sbourg, & des Sociétés Royales d'Angleterre &
de Prusse.

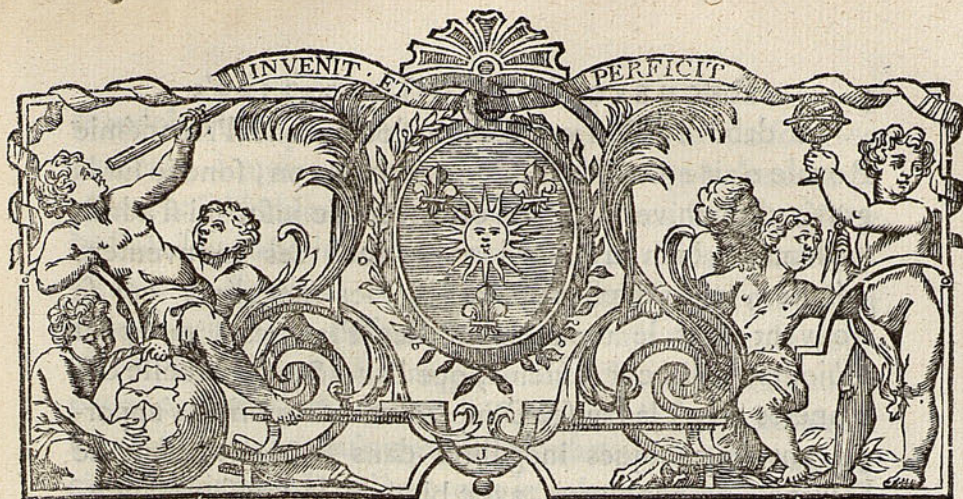
Prix. 1748.

RECHERCHES
SUR LA QUESTION
DES INÉGALITÉS DU MOUVEMENT
DE SATURNE
ET DE JUPITER

par l'Académie Royale des Sciences
de Paris

Par M. L. Euler, Professeur Royal de Mathématiques
à Berlin, de l'Académie Impériale de St. Péters-
bourg, & des Sociétés Royales d'Angleterre &
de Prusse.

Paris 1748.



RECHERCHES
SUR LA QUESTION
DES
INÉGALITÉS DU MOUVEMENT
DE SATURNE
ET DE JUPITER,

*Sujet proposé pour le Prix de l'année 1748, par l'Académie
Royale des Sciences de Paris.*

*Ponderibus librata suis per inane profundum
Sidera, quò vis alma trahit retrahitque sequuntur.*

I.
EXPLICATION DU SUJET.

§.I. **L**'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES
de Paris, propose pour sujet du Prix de
l'année prochaine 1748,

*Une Theorie de Saturne & de Jupiter, par
laquelle on puisse expliquer les inégalités que ces deux Plane-
tes paroissent se causer mutuellement, principalement vers le
tems de leur conjonction.*

A ij

Or d'abord, il n'y a aucun doute, que l'Académie Royale n'ait en vûe la Théorie de Newton, fondée sur la gravitation universelle, qu'on a trouvée jusqu'ici si admirablement bien d'accord avec tous les mouvemens célestes, que quelles que soient les inégalités qui se trouvent dans le mouvement des Planètes, on peut toujours hardiment soutenir, que l'attraction mutuelle des Planètes en est la cause. Donc si les Astronomes s'aperçoivent de quelques inégalités dans le mouvement de Saturne, on conclurra, avec bien de la vraisemblance, qu'elles sont causées par la force dont cette Planète est attirée vers le corps de Jupiter, qui non-seulement s'approche le plus de Saturne, mais surpasse aussi en quantité de matière, & par conséquent en force d'attraction si considérablement toutes les autres Planètes prises ensemble, que l'effet de celles-ci sera comme infiniment petit par rapport à celui de Jupiter. Par la même raison, la force de Saturne sur Jupiter excède tant celle des autres Planètes, que pour déterminer les dérangemens auxquels le mouvement de Saturne & de Jupiter peut être assujéti, on pourra sans faute, négliger les forces des autres Planètes.

§. II. Donc suivant cette Théorie, la cause des inégalités que les Astronomes ont remarquées dans le mouvement de Saturne & de Jupiter, est manifeste; & pour satisfaire à la question proposée, on n'aura qu'à déterminer le mouvement de trois corps qui s'attirent mutuellement en raison composée de celle de leurs masses, & de la raison inverse des quarrés de leurs distances, & mettre ensuite à la place de l'un de ces trois corps le Soleil, & les corps de Saturne & de Jupiter au lieu des deux autres. Par-là, on voit que la question proposée se réduit à la solution d'un Problème purement mécanique: mais il faut aussi avouer que ce Problème est un des plus difficiles de

la mécanique, & dont on ne sçauroit espérer une solution parfaite, à moins qu'on ne fasse des progrès beaucoup plus considérables dans l'Analyse. Cependant, puisque le Soleil surpasse infiniment en grandeur les corps de Jupiter & de Saturne, & que ces Planetes se meuvent dans des orbites qui ne different pas beaucoup du cercle; ces circonstances sont très-propres à nous fournir une solution par approximation, qui ne laissera pas de nous éclaircir sur ce sujet autant qu'on puisse le souhaiter. C'est donc principalement à ce Problème que je m'attacherai, & je me flatte, qu'à l'aide de plusieurs détours Analytiques, j'en viendrai tellement à bout, qu'on ne trouvera rien à désirer au-delà; bien que d'abord les difficultés qu'on y rencontre semblent presque insurmontables. Car pour peu qu'on s'enfonce dans cette recherche, on s'apercevra bientôt qu'elle est beaucoup plus difficile que celle du mouvement de la Lune, qu'on a jugée pourtant jusqu'ici, la plus difficile recherche de l'Astronomie.

§. III. M. Newton, en comparant les tems périodiques des Satellites de Saturne & de Jupiter à leurs distances, a trouvé que si l'on exprime la masse du Soleil par 1, celle de Jupiter sera $= \frac{1}{1067}$, & celle de Saturne $= \frac{1}{3021}$. Donc mettant les signes \odot , ♃ & ♄ pour les masses du Soleil, de Jupiter & de Saturne; comme dans le calcul il n'entre que leur rapport, j'aurai $\odot = 1$, $\text{♃} = \frac{1}{1067}$ & $\text{♄} = \frac{1}{3021}$. Outre ces élémens, il faut introduire dans le calcul les distances moyennes de ces deux Planetes au Soleil, avec les excentricités qu'elles auroient, si leur mouvement suivoit parfaitement les regles de Kepler, sur lesquelles les Tables Astronomiques sont construites. Or, supposant la distance moyenne de la Terre au Soleil $= 100000$, les Tables marquent

	De Jupiter.	De Saturne.
La plus grande distance au Soleil	545176	1008390
La plus petite distance au Soleil.....	495019	899626
Leur somme.....	1040195	1908016
Leur différence.....	50157	108764
Donc la distance moyenne.....	520097½	954008
Et l'excentricité ou la distance des foyers divi-	50157	108764
fée par le grand Axe.....	1040195	1908016
Et partant le Logarithme de l'excentricité...	= 8,6832165	0,7559031

Il est vrai que ces distances seront un peu changées, par l'action mutuelle de ces Planetes, mais avant que je sois en état de déterminer ces corrections, (puisqu'elles seront fort petites) il n'y aura point de danger de me servir, en attendant, de ces nombres.

§. IV. Pour réussir mieux dans la recherche des inégalités dans le mouvement de ces deux Planetes, je supposerai que le mouvement de l'une est tout-à-fait conforme aux regles de Kepler; & je chercherai quels dérangemens doivent résulter de l'action de celle-ci dans le mouvement de l'autre; car on m'accordera aisément, que les dérangemens qui se trouvent dans le mouvement de Jupiter, n'en produisent pas de nouveaux dans le mouvement de Saturne; ou que les inégalités dans le mouvement de Saturne seront les mêmes, soit que Jupiter suive parfaitement les regles de Kepler, ou qu'il soit lui-même troublé par l'action de Saturne. Cela posé, je n'aurai qu'à déterminer le mouvement d'une Planete, qui est sollicitée tant vers le Soleil, que vers une autre Planete, qui décrit autour du Soleil une Ellipse conformément à la Théorie de Kepler. Il est clair aussi, que le même calcul servira à découvrir les inégalités de l'une & de l'autre de ces Planetes; & partant, pour mieux fixer les idées, j'appliquerai le calcul seulement à la recherche des inégalités du mouvement de Saturne, vû qu'elles sont les plus remarquables.

§. V. Les choses qui rendent le calcul le plus embarrassant, sont 1°. La diversité des plans dans lesquels ces deux Planetes se meuvent. 2°. L'excentricité des orbites que ces Planetes décriroient, quand même elles ne se troubleroient pas mutuellement. Comme il seroit trop pénible de surmonter ces difficultés à la fois, je passerai par degré; & je supposerai premierement les deux orbites, tant dans le même plan, que destituées d'excentricité; c'est-à-dire, l'orbite de Jupiter sera circulaire, & celle de Saturne le seroit aussi, s'il n'étoit sollicité que par la seule force du Soleil. Il est clair que cette considération nous fournira une espece d'inégalité dans le mouvement de Saturne, qui sera semblable dans la Lune à celle que les Astronomes nomment *Variation*. En second lieu, laissant les deux orbites dans le même plan, & celle de Jupiter circulaire, j'aurai égard à l'excentricité de Saturne, & je déterminerai les nouvelles inégalités qui en résultent. On fera peut-être surpris, de voir que celles-ci surpassent considérablement celles de la premiere hypothese. En troisieme lieu, je supposerai l'orbite de Jupiter excentrique, telle qu'elle l'est en effet, & cette circonstance fournira encore de nouvelles inégalités, qui même seront les plus considérables. Enfin, je considererai l'inclinaison mutuelle des deux orbites, & je tâcherai d'en déterminer tous les changemens successifs, avec le mouvement de la ligne des nœuds qui en résulte. Par ces recherches, je me flatte de satisfaire pleinement à la question proposée, d'autant plus que la plupart de ceux qui travailleront sur cette matiere, se borneront, selon toute apparence, uniquement à la premiere hypothese, qui ne renferme pourtant que la moins considérable partie des inégalités qui se trouvent dans le mouvement de Saturne.

§. VI. Mais après avoir exactement déterminé par la

théorie toutes ces inégalités, feront-elles, me demandera-t-on, parfaitement d'accord avec les irrégularités que les Astronomes découvrent actuellement dans le mouvement de ces deux Planetes, & principalement de Saturne ? & fera-t-on par-là en état de déterminer pour chaque tems donné le lieu de cette planete, à moins d'une minute près ? C'est sans doute la Principale demande, & ce qui paroît avoir principalement porté l'Académie Royale des Sciences à proposer cette question. Pour moi, je n'ai point douté que les inégalités que la théorie m'a montrées, ne s'accordassent parfaitement avec les observations, pourvû qu'on changeât un peu convenablement à ces nouvelles équations, les élémens des Tables ordinaires : & peut-être que d'autres qui entreprendront cette discussion, ne jugeront pas même nécessaire d'entrer dans cet examen. Aussi ai-je été bien surpris de voir, après avoir examiné un grand nombre d'observations, que les inégalités tirées de la théorie ne sont pas suffisantes pour expliquer toutes les irrégularités dont les observations sont troublées ; & qu'il s'y trouve même des inégalités d'une autre espece, qui sont presque aussi grandes que celles qui viennent de l'action de Saturne. Je crois que cette remarque est de la dernière importance dans l'Astronomie, puisqu'elle nous donne à connoître que les forces que nous concevons dans le ciel, ne sont pas les seules qui agissent sur les Planetes, ou qu'elles ne suivent pas exactement la loi que nous leur adjugeons.

§. VII. Or, bien que j'avoue franchement que je ne suis pas en état d'expliquer parfaitement toutes les irrégularités qui se trouvent dans le mouvement de Saturne, je crois pourtant pouvoir prétendre au Prix que l'Académie propose, & même avec plus de droit que ceux qui ne se sont pas apperçus de cette insuffisance de la Théorie Newtonienne ;

Newtonienne ; & on conviendra aisément , que si cette théorie a besoin de quelque correction , ce doit être une recherche qui demande un beaucoup plus grand nombre d'exactes observations , & encore un plus long tems pour les examiner , & en corriger la théorie. Qu'il me soit permis cependant de découvrir mes pensées sur ce sujet. Ayant comparé fort soigneusement les observations de la Lune avec la théorie , j'ai trouvé que la distance de la Lune à la Terre n'est pas si grande qu'elle devrait être , selon la théorie : d'où il s'ensuit que la gravité de la Lune vers la Terre est un peu moindre , que selon la raison inverse des quarrés des distances : & quelques petites irrégularités dans le mouvement de la Lune , qu'on ne sçauroit expliquer par cette théorie , m'ont encore davantage confirmé dans ce sentiment. Il me semble donc que la proportion Newtonienne selon les quarrés des distances , n'est vraie qu'à peu près dans les forces des corps célestes , & que peut-être elle s'écarte d'autant plus de la vérité que les distances sont grandes. Dans ce cas , il n'y auroit donc pas lieu de s'étonner si le mouvement de Saturne étoit assujetti encore à d'autres inégalités qu'à celles qui sont causées par l'action de Jupiter : & il me paroît fort vraisemblable que l'action même de Jupiter sur le corps de Saturne , s'écarte considérablement de la raison inverse des quarrés des distances.

§. VIII. Si l'on croit que la gravitation universelle a une cause physique ou mécanique , on sera presque forcé d'accorder , qu'elle ne s'étend point à l'infini : & alors il faudra avouer , que les forces des corps célestes décroissent davantage que selon la raison quarrée des distances , puisque cette raison les répandroit à l'infini : mais aussi ceux mêmes qui regardent tant l'attraction que la raison renversée des quarrés des distances , comme une propriété

essentielle de la matiere , ne sçauroient nier cette irrégularité que je viens d'avancer. On attribue cette attraction régulière originairement aux moindres molécules de la matiere ; & on se convaincra aisément par le calcul , que les corps finis , s'ils ne sont pas sphériques , ne s'attirent plus suivant la même raison. Les plus grands Géometres de ce siècle ont démontré évidemment , que la gravité vers un corps sphéroïdique , n'est ni constamment dirigée vers son centre , ni proportionnelle *inverse* aux quarrés des distances. Donc puisque le corps de Jupiter est le plus applati de toutes les Planetes , sa force attractive pourra considérablement différer de la raison établie , & la force du Soleil même pourra s'en écarter un peu. Ensuite, quand même la force du corps attirant seroit exactement conforme à cette raison , la figure du corps attiré y peut apporter quelque irrégularité , en tant que la direction moyenne de toutes les forces qui agissent sur les parties de ce corps , ne passe pas par son centre de gravité , (d'où il doit naître un mouvement de rotation , ou une nutation de son axe) & que la force résultante suit ordinairement une règle tout-à-fait différente , qu'il est difficile d'exprimer par une formule algébrique finie. Il me paroît donc très-probable , que les forces qui reglent le mouvement de Saturne , à cause de sa figure bisarre , diffèrent assez considérablement de la loi générale.



I I.

Préparations aux Recherches suivantes.

§. IX. **N**ONOBSTANT les réflexions que je viens de faire sur l'irrégularité des forces qui agissent sur Saturne, je suivrai dans mes recherches théoriques, exactement le système d'attraction tel qu'il est adopté aujourd'hui par tous les Astronomes; & je supposerai que les forces, tant du Soleil que des Planètes, décroissent précisément dans la raison quarrée des distances, & qu'elles agissent sur le centre de gravité des corps qui en sont sollicités. Car on ne sçauroit s'appercevoir que ces forces ont besoin de quelque correction, qu'en tant que les conclusions qu'on en tire ne seront pas d'accord avec les observations; & pour cet effet, on sera absolument obligé de s'attacher à cette hypothèse, & d'en tirer toutes les inégalités qui doivent troubler le mouvement des corps célestes, pour être en état de les comparer avec les observations. Cette recherche étant donc de la dernière importance, se trouve également enveloppée de tant de difficultés, qu'avant de les surmonter, il sera absolument impossible de porter la théorie de l'Astronomie à un plus haut degré de perfection. Et regardant la question que l'Académie Royale vient de proposer de ce côté-là, il faut avouer que la dernière perfection de l'Astronomie dépend uniquement de son développement; & les Astronomes lui doivent être infiniment redevables, si à cette occasion quelqu'un est assez heureux pour trouver une complète solution de cette question.

§. X. Dans l'Astronomie, il ne s'agit pas tant du
Bij

mouvement absolu des corps célestes, dont ils se meuvent actuellement, que de leur mouvement relatif, tel qu'il paroît à un Spectateur placé sur un certain corps, bien qu'il soit lui-même en mouvement. Or, pour cet effet on choisit le corps, par rapport auquel le mouvement cherché doit paroître le plus régulier, & c'est en conséquence de cette règle, qu'on rapporte le mouvement des Planetes principales, & des Cometes au centre du Soleil, & qu'on cherche leur longitude & latitude héliocentriques : mais le mouvement de la Lune est rapporté au centre de la Terre, & celui des Satellites au centre de leur Planete principale. Suivant cette règle, on doit rapporter le mouvement de Saturne, quoiqu'il soit troublé par l'action de Jupiter, au centre du Soleil, puisque le dérangement qui vient de Jupiter est fort petit. Or, parce que les forces célestes sont réciproques, & que le Soleil éprouve les mêmes forces qu'il exerce sur les Planetes, il est évident que le Soleil n'est pas en repos : donc pour déterminer justement le mouvement des Planetes par rapport au Soleil, il faudra transporter aux Planetes, tant le mouvement du Soleil, que les forces dont il est agité, mais suivant des directions contraires, comme on le fait en cherchant le mouvement de la Lune par rapport à la Terre.

§. XI. Puisqu'on peut négliger dans la recherche présente l'action des petites Planetes de Mars, de la Terre, de Vénus & de Mercure, nous n'aurons que trois corps à considérer, le Soleil, Jupiter & Saturne, desquels trois corps chacun est supposé attirer vers soi les deux autres, en raison réciproque quarrée des distances. Donc suivant cette loi, Saturne est attiré vers le Soleil & vers Jupiter, & de même Jupiter vers le Soleil & Saturne : mais comme le Soleil est aussi attiré vers Jupiter & Saturne, il

faudra transporter ces deux forces suivant des directions contraires, tant sur Jupiter que sur Saturne; & il sera question de déterminer le mouvement de Saturne & de Jupiter, ces Planetes étant sollicitées par les forces que je viens d'indiquer. Bien que ce Problème, considéré généralement, surpasse les forces de l'analyse, & que quelques circonstances qui s'y trouvent heureusement, doivent servir à en tirer une solution par approximation: je commencerai pourtant mes recherches par un Problème encore plus général, qui roulera sur la détermination d'un corps sollicité par des forces quelconques, & suivant des directions quelconques. Je tâcherai de réduire la solution de ce Problème à des formules analytiques, qui me paroissent les plus propres pour en faire l'application au sujet proposé, & desquelles je pourrai aisément tirer les approximations qui conduisent aux inégalités qui se trouvent tant dans le mouvement de Saturne, que dans celui de Jupiter. Car, quoique je ne considère dans ce Problème qu'un seul corps, on voit aisément qu'on pourra ensuite mettre, tant Saturne que Jupiter, en sa place, vû qu'il est supposé être sollicité par des forces quelconques.

§. XII. Soit donc proposé un corps quelconque, *Fig. I.* qui se trouve placé en P , dont on veut déterminer le mouvement, tel qu'il paroîtra à un Spectateur placé au point C , qui est regardé comme fixe. Comme ce mouvement peut ne se pas faire dans un même plan, qu'on choisisse un plan à volonté, qui passe par le point C , pour y rapporter le mouvement en question. Soit ACQ le plan de la Table, ce plan choisi, auquel on abaisse du point P la perpendiculaire PQ , & ayant tiré les droites CQ , CP , il est clair qu'on connoîtra le mouvement du corps P , si à chaque moment donné on peut déterminer tant la direction & la grandeur de la ligne CQ , que l'angle QCP . Or,

pour déterminer la direction de la ligne CQ , je prends sur le plan ACQ une ligne droite fixe CA , qui passe par C , & l'angle ACQ donnera la direction de la droite CQ . Pour me servir des termes usités dans l'Astronomie, l'angle ACQ fera la longitude du corps P , l'angle QCP sa latitude, ou Boreale, ou Méridionale, selon que le corps P sera situé, ou au-dessus ou au-dessous du plan ACQ , & la ligne CQ fera sa distance raccourcie. L'on voit bien que je prends ces termes dans un sens plus général qu'on ne fait ordinairement dans l'Astronomie, où l'on n'applique ces noms qu'au plan de l'écliptique, au lieu qu'ici le plan ACQ peut être tout autre. Donc pour déterminer le mouvement du corps P , il faudra pour chaque moment donné, déterminer 1°. sa longitude, ou l'angle ACQ . 2°. sa latitude, ou l'angle QCP , & 3°. sa distance raccourcie CQ .

§. XIII. Or, pour ce qui regarde la latitude, il faut à chaque instant connoître le plan dans lequel le corps P se meut; ce plan se détermine par le point C , & par la direction du mouvement du corps P . Soit donc la ligne CQ l'intersection de ce plan avec le plan fixe ACQ , laquelle représentera la ligne des nœuds, qui, conjointement avec l'angle de l'inclinaison de ces deux plans, fera connoître l'obliquité du mouvement par rapport au Plan fixe ACQ . Car tant que ni la position de la ligne CQ ni l'angle de l'inclinaison ne changera point, le mouvement du corps se fera dans le même plan, passant par le point C , & dès que le mouvement s'écartera de ce plan, il arrivera d'abord quelque changement, tant dans la position de la ligne des nœuds CQ , que dans l'inclinaison mutuelle. C'est pour cette raison que les Astronomes sont accoutumés de représenter le mouvement de la Lune en latitude, en déterminant pour chaque tems donné, tant la position de la ligne des

nœuds, que l'inclinaison de l'orbite de la Lune au plan de l'écliptique. Je suivrai donc la même méthode, & au lieu de la latitude, je tâcherai de déterminer à chaque moment la position de la ligne des nœuds $C\Omega$ avec l'inclinaison de l'orbite du corps P au plan fixe ACQ ; puis-que ces choses étant connues, il sera aisé de trouver la latitude ou l'angle QCP . On pourroit entreprendre la solution de ce Problème par plusieurs autres méthodes: mais celle que je viens d'indiquer, paroît la plus convenable pour l'usage de l'Astronomie.

§. XIV. Soit donc supposé toujours dans la suite de ce Discours, la longitude ou l'angle $ACQ = \varphi$, la distance raccourcie $CQ = z$; la longitude du nœud ascendant, ou l'angle $AC\Omega = \pi$, l'inclinaison présente de l'orbite du corps P au plan fixe $ACQ = \rho$: & il est clair qu'on connoitra parfaitement le mouvement du corps P , si l'on peut à chaque tems proposé, déterminer la longitude de la ligne $CQ = z$ & les trois angles φ , π , & ρ . Car, faisant la latitude, ou l'angle $QCP = \psi$, on verra aisément, que $\text{tang. } \psi = \text{tang. } \rho \sin. (\varphi - \pi)$, supposant toujours le sinus total $= 1$, ou que cette proportion a lieu: Comme le sinus total est au sinus de l'angle $\varphi - \pi = \Omega CQ$, ainsi la tangente de l'inclinaison ρ sera à la tangente de la latitude cherchée ψ . La plûpart du calcul roulera donc sur les angles, que j'introduirai eux-mêmes dans le calcul, en marquant leurs sinus, cosinus, tangentes, cotangentes, par les caracteres $\sin.$ $\cos.$ tang. & cot. mises devant les lettres qui expriment les angles. Cela abrégera très-considérablement le calcul, sur-tout dans les intégrations & différenciations: or, comme cette maniere d'opérer n'est pas encore reçue généralement, il fera à propos d'avertir que les différentielles des formules $\sin. \varphi : \cos. \varphi : \text{tang. } \varphi : \text{cot. } \varphi$ sont $d\varphi \cos. \varphi : -d\varphi \sin. \varphi : \frac{d\varphi}{\cos. \varphi^2} \& -\frac{d\varphi}{\sin. \varphi^2}$: où il faut aussi

remarquer que $\cos. \varphi^2$ marque le quarré du cosinus de l'angle φ , & $\sin. \varphi^2$ le quarré du sinus de l'angle φ , & non pas le cosinus ou le sinus du quarré de l'angle : ce qui suffira pour l'intelligence des calculs suivans.

§. XV. La détermination de ces quantités z , φ , π & t dépend des forces dont le corps P est sollicité : or, quelles que soient les forces qui agissent sur le corps P , on les pourra toujours réduire à trois directions, dont l'une suivant PQ , est perpendiculaire sur le plan ACQ , & les deux autres parallèles à ce même plan, sçavoir suivant QC & QN normale à QC . Soit donc P la force qui agit sur le corps P suivant la direction parallèle à QC : soit ensuite Q la force qui agit suivant une direction parallèle à QN , & enfin R la force qui tire le corps P suivant la direction PQ . Or il faut remarquer que ces trois forces P , Q , & R signifient ici des forces accélératrices, qui résultent de la division des forces motrices par la masse du corps P , sur lequel elles agissent. L'action d'une telle force se détermine par les principes de la Mécanique, par le moyen de la vitesse du corps : mais puisqu'il n'est pas convenable d'introduire la vitesse dans le calcul, j'y ferai entrer en sa place le tems écoulé, que j'appelle t ; & pour cet effet, si le corps a déjà parcouru l'espace $= s$ suivant sa direction, selon laquelle il est sollicité par la force accélératrice V , en supposant l'élément du tems dt constant, les regles ordinaires nous fourniront cette formule : $dds = \frac{1}{2} V dt^2$. Comme on s'assurera aisément de la vérité de cette formule, il seroit superflu de m'arrêter à l'explication de l'analyse, qui m'a fourni les équations suivantes, par lesquelles les quantités en question z , φ , π & t sont déterminées.

§. XVI. Ces équations, qui renferment la détermination du mouvement du corps P , sollicité par les trois forces

forces mentionnées, P , Q , & R , en supposant l'élément du tems dt constant, seront les quatre suivantes :

$$\text{I. } ddz - z d\varphi^2 = -\frac{1}{2} P dt^2.$$

$$\text{II. } 2 dz d\varphi + z dd\varphi = -\frac{1}{2} Q dt^2.$$

$$\text{III. } d\pi = \frac{dt^2 \sin.(\varphi - \pi)}{2 z d\varphi} \left(P \sin.(\varphi - \pi) + Q \cos.(\varphi - \pi) - \frac{R \cos.\rho}{\sin.\rho} \right).$$

$$\text{IV. } d. l \text{ tang. } \rho = \frac{dt^2 \cos.(\varphi - \pi)}{2 z d\varphi} \left(P \sin.(\varphi - \pi) + Q \cos.(\varphi - \pi) - \frac{R \cos.\rho}{\sin.\rho} \right).$$

Dont les deux premières serviront à déterminer pour chaque tems donné t , les quantités z & φ , qui étant connues, la troisième donnera l'angle π , ou la position de la ligne des nœuds pour ce même tems ; & enfin la quatrième, l'inclinaison ρ de l'orbite du corps P au plan ACQ , où il est à remarquer que $d. l \text{ tang. } \rho$ signifie la différentielle du logarithme de la tangente de l'angle ρ : ou puisque

$d. \text{ tang. } \rho = \frac{d\rho}{\cos.\rho^2}$, on aura, $d. l \text{ tang. } \rho = \frac{d. \text{ tang. } \rho}{\text{tang. } \rho} = \frac{d\rho}{\text{tang. } \rho \cos.\rho^2} = \frac{d\rho}{\sin.\rho \cos.\rho}$ à cause que $\text{tang. } \rho = \frac{\sin.\rho}{\cos.\rho}$. C'est donc uniquement de la résolution de ces quatre équations différentio-différentielles, que dépend la solution du Problème proposé en général.

§. XVII. Pour appliquer cette solution générale à la recherche que j'ai en vûe, supposons Saturne le corps Fig. II. proposé, dont il faut chercher le mouvement, placé en τ . Et que le plan constant ACQ , auquel je rapporterai le mouvement de Saturne, soit celui de l'orbite de Jupiter $A\tau$, puisque je fais ici abstraction des inégalités de Jupiter, sur-tout de celles qui l'obligent de s'écarter de son plan. De plus, que le point fixe de ce plan où je suppose placé le Spectateur, soit le centre du Soleil en \odot . Soit outre cela $\odot AB$ une droite tirée dans ce plan, du Soleil vers un point fixe du

ciel, par exemple, vers le commencement du Belier, d'où l'on estime les longitudes; & soit $\odot \Omega$ la ligne des nœuds de l'orbite de Saturne sur celle de Jupiter. Qu'on abaisse, comme ci-devant, du point h , sur le plan $A \odot Q$ la perpendiculaire $h Q$, & ayant tiré les droites $\odot h$ & $\odot Q$, qu'on nomme la distance raccourcie de Saturne au Soleil $\odot Q = z$, sa longitude ou l'angle $A \odot Q = \varphi$, sa latitude ou l'angle $h \odot Q = \psi$: soit encore la longitude du nœud ou l'angle $A \odot \Omega = \pi$, & l'inclinaison de l'orbite de Saturne sur celle de Jupiter $= i$. Soit outre cela, pour le mouvement de Jupiter, que je suppose connu, sa longitude ou l'angle $A \odot \mathcal{U} = \theta$, & sa distance au Soleil $\odot \mathcal{U} = y$. De-là l'élongation de Saturne & de Jupiter sera exprimée par l'angle $Q \odot \mathcal{U} = \theta - \varphi$, que j'indiquerai pour abrégé par ω ; de sorte que $\omega = \theta - \varphi$. Cela posé, j'aurai la longitude de la droite $\mathcal{U} Q = \sqrt{(zz + yy - 2yz \cos. \omega)}$, & puisque $Q \mathcal{U} = z \tan g. \psi$, il en résultera, que $\mathcal{U} h = \sqrt{(zz + yy - 2yz \cos. \omega + zz \tan g. \psi^2)}$, ou bien $\mathcal{U} h = \sqrt{\left(\frac{zz}{\cos. \psi^2} + yy - 2yz \cos. \omega\right)}$, que je nomme v , de sorte que $v = \sqrt{\left(\frac{zz}{\cos. \psi^2} + yy - 2yz \cos. \omega\right)} = \mathcal{U} h$.

§. XVIII. Soient maintenant les masses, ou les forces absolues du Soleil, de Jupiter & de Saturne exprimées par \odot , \mathcal{U} , & h , que ces corps exercent à la même distance $= 1$. On verra d'abord que Saturne sera immédiatement sollicité par deux forces, dont l'une dirigée vers le Soleil selon $h \odot$ sera $= \frac{\odot}{h^2} = \frac{\odot \cos. \psi^2}{zz}$, à cause que $h \odot = \frac{z}{\cos. \psi}$; & l'autre dirigée vers Jupiter selon $h \mathcal{U}$ sera $= \frac{\mathcal{U}}{h \mathcal{U}^2} = \frac{\mathcal{U}}{vv}$. Mais le Soleil étant lui-même sollicité premierement vers le corps de Jupiter, dans la

direction $\odot \mathcal{U}$ avec une force accélératrice $= \frac{\mathcal{U}}{\odot \mathcal{U}^2}$
 $= \frac{\mathcal{U}}{yy}$, & ensuite vers Saturne dans la direction $\odot \mathfrak{h}$, avec
 une force $= \frac{\mathfrak{h}}{\odot \mathfrak{h}^2} = \frac{\mathfrak{h} \cos. \psi^2}{zz}$, afin que je le puisse consi-
 dérer comme en repos, il faut transporter ces forces dans
 un sens contraire au corps de Saturne. Tirant donc la
 droite QR parallèle à $\mathcal{U} \odot$, le corps de Saturne fera sol-
 licité, outre les deux forces supérieures, encore dans la
 direction QR , par une force $= \frac{\mathcal{U}}{yy}$, & dans la direction
 $\mathcal{U} \odot$ par une force $= \frac{\mathfrak{h} \cos. \psi^2}{zz}$. Et partant Saturne doit
 être considéré comme sollicité par quatre forces, qui se
 réduisent aux trois suivantes.

I. Une force dans la direction $\mathfrak{h} \odot = \frac{(\odot + \mathfrak{h}) \cos. \psi^2}{zz}$.

II. Une force dans la direction $\mathfrak{h} \mathcal{U} = \frac{\mathcal{U}}{vv}$.

III. Une force dans la direction $QR = \frac{\mathcal{U}}{yy}$.

Ce fera donc de ces trois forces que dépendra le mouve-
 ment apparent de Saturne, tel qu'il paroîtra à un Spec-
 tateur placé dans le centre du Soleil.

§. XIX. Décomposons maintenant ces trois forces,
 suivant les directions $\mathfrak{h} Q$, $Q \odot$ & QN , pour avoir les
 valeurs des forces P , Q , R . La première donnera par
 cette résolution pour la direction $\mathfrak{h} Q$, $\frac{(\odot + \mathfrak{h}) \sin. \psi \cos. \psi^2}{zz}$;
 pour la direction $Q \odot$, $\frac{(\odot + \mathfrak{h}) \cos. \psi^3}{zz}$. La seconde don-
 ne pour la direction $\mathfrak{h} Q$, la force $\frac{\mathfrak{h} Q}{\mathcal{U} \mathfrak{h}} \cdot \frac{\mathcal{U}}{vv} = \frac{\mathcal{U} z \tan g. \psi}{v^3}$,
 & pour la direction $Q \mathcal{U} = \frac{Q \mathcal{U}}{\mathcal{U} \mathfrak{h}} \cdot \frac{\mathcal{U}}{vv}$, laquelle se réduit
 encore en ces deux-ci :

pour la direction $Q \odot$, $\frac{Q \odot}{\mathcal{U} \mathfrak{h}} \cdot \frac{\mathcal{U}}{vv} = \frac{\mathcal{U} z}{v^3}$; pour la direc-
 tion QR , $\frac{-\odot \mathcal{U}}{\mathcal{U} \mathfrak{h}} \cdot \frac{\mathcal{U}}{vv} = \frac{-\mathcal{U} y}{v^3}$. Celle-ci jointe à la

troisième, donnera pour la direction QR , la force $= \frac{\mathcal{L}}{yy} - \frac{\mathcal{L}y}{v^3}$; qui, à cause de l'angle $\odot QR = Q \odot \mathcal{L} = \omega$, donnera enfin,

pour la direction $Q \odot$, $\frac{\mathcal{L} \cos. \omega}{yy} - \frac{\mathcal{L}y \cos. \omega}{v^3}$; & pour QN , $\frac{\mathcal{L} \sin. \omega}{yy} - \frac{\mathcal{L}y \sin. \omega}{v^3}$.

Par conséquent les forces P, Q, R , dont j'ai besoin dans le calcul, seront:

$$P = \frac{(\odot + h) \cos. \psi^3}{zz} + \frac{\mathcal{L}z}{v^3} + \frac{\mathcal{L} \cos. \omega}{yy} + \frac{\mathcal{L}y \cos. \omega}{v^3}$$

$$Q = \frac{\mathcal{L} \sin. \omega}{yy} - \frac{\mathcal{L}y \sin. \omega}{v^3}$$

$$R = \frac{(\odot + h) \sin. \psi \cos. \psi^2}{zz} + \frac{\mathcal{L}z \text{ tang. } \psi}{v^3}$$

§. XX. Ces valeurs étant remises dans les équations différentio-différentielles précédentes, le mouvement de Saturne, à cause que $\omega = \theta - \varphi$, fera déterminé par les quatre équations suivantes.

$$I. d\dot{z}z - z d\dot{\varphi}^2 = -\frac{1}{2} dt^2 \left(\frac{(\odot + h) \cos. \psi^3}{zz} + \frac{\mathcal{L}z}{v^3} + \frac{\mathcal{L} \cos. \omega}{yy} - \frac{\mathcal{L}y \cos. \omega}{v^3} \right)$$

$$II. 2dz\dot{\varphi} + z d\dot{\varphi} = -\frac{1}{2} dt^2 \left(\frac{\mathcal{L} \sin. \omega}{yy} - \frac{\mathcal{L}y \sin. \omega}{v^3} \right)$$

$$III. d\pi = \frac{dt^2 \sin. (\varphi - \pi)}{2z d\varphi} \left(\frac{\mathcal{L} \sin. (\theta - \pi)}{yy} - \frac{\mathcal{L}y \sin. (\theta - \pi)}{v^3} \right)$$

$$IV. d l \text{ tang. } \rho = \frac{dt^2 \cos. (\varphi - \pi)}{2z d\varphi} \left(\frac{\mathcal{L} \sin. (\theta - \pi)}{yy} - \frac{\mathcal{L}y \sin. (\theta - \pi)}{v^3} \right).$$

Or, pour rendre ces équations plus propres pour l'usage de l'Astronomie, au lieu du tems dt , j'introduirai l'anomalie moyenne de Jupiter, (que j'appelle ζ), puisqu'elle est proportionnelle au tems, & en peut servir de mesure. Mais supposant la distance moyenne de Jupiter au Soleil $= a$, & exprimant son mouvement par des expressions semblables, sans pourtant avoir égard aux dérangemens causés par Saturne, on trouvera qu'il faut mettre $\frac{dt^2}{2} = \frac{a^3 d\zeta^2}{\odot}$. Soit ensuite $\frac{\mathcal{L}}{\odot} = n = \frac{1}{1067}$ & $\frac{h}{\odot} = r = \frac{1}{3021}$, & les

équations trouvées se changeront en celles-ci :

$$\text{I. } ddx - zd\varphi^2 = -a^3 d\zeta^2 \left(\frac{(1+\gamma)\cos.\psi^3}{zx} + \frac{nz}{v^3} + \frac{n\cos.\omega}{yy} - \frac{ny\cos.\omega}{v^3} \right)$$

$$\text{II. } 2dzd\varphi + zd\varphi^2 = -na^3 d\zeta^2 \sin.\omega \left(\frac{1}{yy} - \frac{y}{v^3} \right)$$

$$\text{III. } d\pi = \frac{na^3 d\zeta^2 \sin.(\varphi-\pi) \sin.(\vartheta-\pi)}{zd\varphi} \left(\frac{1}{yy} - \frac{y}{v^3} \right)$$

$$\text{IV. } d.\text{tang. } \rho = \frac{na^3 d\zeta^2 \cos.(\varphi-\pi) \sin.(\vartheta-\pi)}{zd\varphi} \left(\frac{1}{yy} - \frac{y}{v^3} \right)$$

où l'élément de l'anomalie moyenne de Jupiter $d\zeta$, est à présent supposé constant.



III.

Recherches du Mouvement de Saturne, dans l'hypothese que les deux orbites soient dans le même plan, & l'une & l'autre destituées d'excentricité.

§. XXI. **D**E'S que nous supposons que le mouvement de Saturne se fait dans le plan de l'orbite de Jupiter, non-seulement l'angle ψ deviendra $= 0$, & partant $\cos. \psi = 1$, mais aussi les deux dernières équations s'en iront du calcul, de sorte que dans ce cas, le mouvement de Saturne sera exprimé par ces deux équations :

$$\text{I. } ddz - zd\varphi^2 = -a^3 d\zeta^2 \left(\frac{1+\nu}{zz} + \frac{nz}{v^3} + \frac{n \cos. \omega}{yy} - \frac{ny \cos. \omega}{v^3} \right).$$

$$\text{II. } 2dzd\varphi + zdd\varphi = -na^3 d\zeta^2 \sin. \omega \left(\frac{1}{yy} - \frac{y}{v^3} \right),$$

& la valeur de la lettre v fera $v = \sqrt{(yy + zz - 2yz \cos. \omega)}$. Mais puisque je suppose outre cela l'orbite de Jupiter circulaire, sa distance au Soleil sera constamment $y = a$, & son mouvement uniforme, & égal au mouvement de son anomalie moyenne, ce qui donne $d\omega = d\zeta$, & partant $d\omega = -d\varphi + d\zeta$ à cause de $\omega = 0 - \varphi$: & $v = \sqrt{(aa - 2az \cos. \omega + zz)}$. Par conséquent, dans cette seconde hypothese, les équations trouvées se changeront en :

$$\text{I. } ddz - zd\varphi^2 = -a^3 d\zeta^2 \left(\frac{1+\nu}{zz} + \frac{nz}{v^3} + \frac{n \cos. \omega}{aa} - \frac{na \cos. \omega}{v^3} \right).$$

$$\text{II. } 2dzd\varphi + zdd\varphi = -na^3 d\zeta^2 \sin. \omega \left(\frac{1}{aa} - \frac{a}{v^3} \right).$$

La troisieme hypothese demande que l'orbite de Saturne n'ait point d'excentricité, ou que son mouvement se fasse

uniformément dans un cercle , en mettant à part l'action de Jupiter ; de sorte que le défaut d'uniformité ne venant que de cette action , fera par conséquent fort petit , & s'évanouïroit tout-à-fait , si la force de Jupiter ou la lettre n étoit $= 0$.

§. XXII. Si la lettre f marque la distance moyenne de Saturne au Soleil , sa véritable distance z n'en différera que fort peu , & l'excès ou le défaut dépendra de la valeur de n . Je mettrai donc $z = f(1 + nr)$, où nr sera une fraction extrêmement petite , dont on pourra sûrement négliger les puissances dans le calcul ; & l'on voit bien que la valeur de r dépendra uniquement de l'angle ω , sous lequel Saturne paroît éloigné de Jupiter étant vû du Soleil. De plus , l'uniformité du mouvement de Saturne ne sera troublée que presque insensiblement ; & la raison de $d\phi$ à $d\zeta$ sera presque constante. Donc si nous faisons $d\phi = m d\zeta + n dx$, le terme $n dx$ sera extrêmement petit , par rapport au terme $m d\zeta$, & dépendra aussi uniquement de l'angle ω . Or , dans les termes des équations trouvées , qui sont extrêmement petits d'eux-mêmes , ou qui sont multipliés par $n = \frac{1}{1067}$, on pourra hardiment rejeter ces petites quantités nr ou $n dx$, & faire $d\phi = m d\zeta$ & $d\omega = (1 - m) d\zeta$. Ayant donc $dd\phi = n ddx$; $d\phi^2 = m^2 d\zeta^2 + 2 m n d\zeta dx$ (omettant le quarré de n) $z = f(1 + nr)$, $dz = n f dr$ & $ddz = n f ddr$, les équations précédentes se changeront en :

$$\text{I. } n f ddr - m^2 f d\zeta^2 - 2 m n f d\zeta dx - m^2 n f r d\zeta^2 = \frac{-(1+v)a^3 d\zeta^2}{ff(1+nr)^2} - \frac{n a^3 f d\zeta^2}{v^3} - n a d\zeta^2 \cos. \omega + \frac{n a^4 d\zeta^2 \cos. \omega}{v^3}$$

$$\text{II. } 2 m n f d\zeta dr + n f ddx = -n a d\zeta^2 \sin. \omega + \frac{n a^4 d\zeta^2 \sin. \omega}{v^3}.$$

Et comme v ne se trouve que dans les termes qui sont extrêmement petits , ou multipliés par n , on y pourra

supposer $z = f$, & on aura $v = \sqrt{(aa + ff - 2af \cos. \omega)}$.

§. XXIII. Mettons pour $\frac{I}{(1+nr)^2}$ la valeur approchée $1 - 2nr$, & supposons $f = \lambda a$, de sorte que $v = a \sqrt{(1 + \lambda\lambda - 2\lambda \cos. \omega)}$, & nos équations prendront les formes suivantes :

$$\text{I. } m^2 d\zeta + 2mn dx + m^2 nr d\zeta - \frac{n ddr}{d\zeta} = \frac{(1+v) d\zeta}{\lambda^3} - \frac{2n(1+v) r d\zeta}{\lambda^3} + \frac{n d\zeta \cos. \omega}{\lambda} + \frac{n d\zeta (\lambda - \cos. \omega)}{\lambda(1 + \lambda\lambda - 2\lambda \cos. \omega)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\text{II. } 2m dr + \frac{ddx}{d\zeta} = \frac{-d\zeta \sin. \omega}{\lambda} + \frac{d\zeta \sin. \omega}{\lambda(1 + \lambda\lambda - 2\lambda \cos. \omega)^{\frac{3}{2}}}.$$

Soit maintenant pour abréger davantage, $\frac{2\lambda}{1 + \lambda\lambda} = g$, & $\lambda(1 + \lambda\lambda)^{\frac{3}{2}} = h$, & nous aurons :

$$\text{I. } m^2 d\zeta + 2mn dx + m^2 nr d\zeta - \frac{n ddr}{d\zeta} = \frac{(1+v) d\zeta}{\lambda^3} - \frac{2nr d\zeta}{\lambda^3} + \frac{n d\zeta \cos. \omega}{\lambda} + \frac{n d\zeta (\lambda - \cos. \omega)}{h(1 - g \cos. \omega)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\text{II. } 2m dr + \frac{ddx}{d\zeta} = \frac{-d\zeta \sin. \omega}{\lambda} + \frac{d\zeta \sin. \omega}{h(1 - g \cos. \omega)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour profiter de ces équations, la plus grande difficulté se rencontre dans la formule irrationnelle $(1 - g \cos. \omega)^{\frac{3}{2}}$, laquelle ne se peut résoudre dans une suite convergente, vû que la valeur de g est environ $= \frac{4}{5}$. Cette circonstance m'a fait croire d'abord, qu'il faudroit absolument garder dans le calcul cette formule irrationnelle, ce qui rendroit la solution presque impraticable, vû qu'on seroit obligé de trouver les valeurs intégrales par la mesure des aires des lignes courbes; ce qui donneroit une approximation fort pénible, & pas trop sûre.

§. XXIV. Il est vrai que la dernière équation, à cause de $d\omega = (1 - m) d\zeta$, peut être intégrée sans qu'on ait besoin de résoudre la formule irrationnelle $(1 - g \cos. \omega)^{\frac{3}{2}}$; mais cette intégration ne servira guere dans la première équation,

équation, à moins qu'on ne veuille recourir au calcul des aires des lignes courbes, méthode qui, quoiqu'elle soit praticable dans l'hypothèse présente, ne seroit d'aucun usage, quand on aura égard à l'excentricité de l'une ou de l'autre orbite. Cette circonstance m'oblige de faire une digression au sujet de la formule $(1 - g \cos. \omega)^{-\frac{1}{2}}$, que j'envisagerai sous une forme un peu plus générale, sçavoir, $(1 - g \cos. \omega)^{-\mu}$, dont la résolution, suivant les regles ordinaires, est :

$$(1 - g \cos. \omega)^{-\mu} = 1 + \frac{\mu}{1} g \cos. \omega + \frac{\mu(\mu+1)}{1 \cdot 2} g^2 \cos^2. \omega + \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} g^3 \cos^3. \omega + \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} g^4 \cos^4. \omega + \text{etc.}$$

mais cette suite n'est pas propre à mon dessein, tant parce qu'elle n'est pas assez convergente, que parce qu'elle renferme des puissances du $\cos. \omega$. Quant à ce dernier inconvénient, on y pourra remédier en réduisant les puissances du cosinus de l'angle ω , à des cosinus des angles multiples, selon les regles suivantes, fondées sur celles de la Trigonométrie :

$$\begin{aligned} \cos. \omega &= \cos. \omega \\ 2 \cos. \omega^2 &= \cos. 2\omega + \frac{1}{2} \\ 4 \cos. \omega^3 &= \cos. 3\omega + \frac{3}{2} \cos. \omega \\ 8 \cos. \omega^4 &= \cos. 4\omega + \frac{4}{2} \cos. 2\omega + \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \\ 16 \cos. \omega^5 &= \cos. 5\omega + \frac{5}{2} \cos. 3\omega + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cos. \omega \\ 32 \cos. \omega^6 &= \cos. 6\omega + \frac{6}{2} \cos. 4\omega + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cos. 2\omega + \frac{1}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ 64 \cos. \omega^7 &= \cos. 7\omega + \frac{7}{2} \cos. 5\omega + \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} \cos. 3\omega + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos. \omega \\ &\quad \text{etc.} \end{aligned}$$

où la loi de la progression est manifeste, si l'on remarque seulement que les termes absolus ou constans, sont tous multipliés par $\frac{1}{2}$.

§. XXV. Ayant fait ces substitutions, comme l'expression devient trop compliquée, supposons qu'on trouve :

$$(1 - g \cos \omega)^{-\mu} = A + B \cos \omega + C \cos 2\omega + D \cos 3\omega + E \cos 4\omega + F \cos 5\omega + G \cos 6\omega + H \cos 7\omega + \&c.$$

& on parviendra aux valeurs suivantes des lettres $A, B, C, D, E, \&c.$

$$A \dots \dots \dots = 1 + \frac{2}{4} \cdot \frac{\mu(\mu+1)}{1 \cdot 2} g^2 + \frac{4 \cdot 3}{4 \cdot 8} \cdot \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} g^4 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 8 \cdot 12} \cdot \frac{\mu(\mu+1) \dots (\mu+5)}{1 \cdot 2 \dots 6} g^6 + \&c.$$

$$B = \frac{\mu}{1} g \left(1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2 \cdot 3} g^2 + \frac{5 \cdot 4}{4 \cdot 8} \cdot \frac{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)(\mu+4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} g^4 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 8 \cdot 12} \cdot \frac{(\mu+1)(\mu+2) \dots (\mu+6)}{2 \cdot 3 \dots 7} g^6 + \&c. \right)$$

$$C \dots \dots \dots = \frac{\mu(\mu+1)}{1 \cdot 2} \frac{g^2}{2} \left(1 + \frac{4}{4} \cdot \frac{(\mu+2)(\mu+3)}{3 \cdot 4} g^2 + \frac{6 \cdot 5}{4 \cdot 8} \cdot \frac{(\mu+2)(\mu+3)(\mu+4)(\mu+5)}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} g^4 + \&c. \right)$$

$$D \dots \dots \dots = \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{g^3}{4} \left(1 + \frac{5}{4} \cdot \frac{(\mu+3)(\mu+4)}{4 \cdot 5} g^2 + \frac{7 \cdot 6}{4 \cdot 8} \cdot \frac{(\mu+3)(\mu+4)(\mu+5)(\mu+6)}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} g^4 + \&c. \right).$$

Sachant donc les valeurs des lettres $A, B, C, D, E, \&c.$ on aura une autre serie infinie, pour l'expression $(1 - g \cos \omega)^{-\mu}$, qui sera non-seulement plus commode pour le calcul que la précédente, mais qui bien qu'elle ne soit pas trop convergente non plus, produira pourtant, par les intégrations qui sont à faire, des series infinies extremement convergentes; de sorte qu'en se servant de cette serie, on n'aura plus lieu de se plaindre de la formule $(1 - g \cos \omega)^{-\frac{1}{2}}$. Or, c'étoit justement l'obstacle qui sembloit rendre la recherche du mouvement de Sa-

turne beaucoup plus difficile que celle de la Lune, puisque pour la Lune, la valeur de la lettre g devenant extrêmement petite, l'irrationalité de la formule $(1 - g \cos. \omega)^{-\frac{1}{2}}$, n'y cause aucun embarras. Ce sera donc à l'aide de cette réduction, que je pourrai espérer un aussi heureux succès dans la recherche présente, que dans celle de la Lune.

§. XXVI. La détermination des lettres A, B, C, D, E , &c. semble le plus embarrasser l'exécution du calcul, puisque chacune dépend de la sommation d'une série infinie, dont on ne sçauroit donner la somme que par approximation : mais il regne un certain rapport parmi ces lettres, par le moyen duquel on pourra facilement trouver leurs valeurs, pourvu que celles des deux premières A & B soient déjà connues. On découvrira ce rapport par la considération qui suit :

Soit $s = A + B \cos. \omega + C \cos. 2 \omega + D \cos. 3 \omega + E \cos. 4 \omega + F \cos. 5 \omega + G \cos. 6 \omega + \&c.$ de sorte que $s = (1 - g \cos. \omega)^{-\mu}$;

de-là on aura $l s = -\mu l (1 - g \cos. \omega)$ & $\frac{ds}{s} = \frac{-\mu g d \omega \sin. \omega}{1 - g \cos. \omega}$;

& partant, $\frac{ds}{d \omega} (1 - g \cos. \omega) + \mu g s \sin. \omega = 0$. Or, puisque $\sin. n \omega \times \cos. \omega = \frac{1}{2} \sin. (n + 1) \omega + \frac{1}{2} \sin. (n - 1) \omega$; & $\cos. n \omega \times \sin. \omega = \frac{1}{2} \sin. (n + 1) \omega - \frac{1}{2} \sin. (n - 1) \omega$, on aura, en mettant pour s la série $A + B \cos. \omega + C \cos. 2 \omega + \&c.$

$\frac{ds}{d \omega} = -B \sin. \omega - 2 C \sin. 2 \omega - 3 D \sin. 3 \omega - 4 E \sin. 4 \omega - 5 F \sin. 5 \omega - \&c.$

$\frac{-g ds}{d \omega} \cos. \omega = +\frac{1}{2} g B \sin. 2 \omega + \frac{1}{2} g C \sin. 3 \omega + \frac{1}{2} g D \sin. 4 \omega + \frac{1}{2} g E \sin. 5 \omega + \&c.$

$+ \frac{1}{2} g C \sin. \omega + \frac{1}{2} g D \sin. 2 \omega + \frac{1}{2} g E \sin. 3 \omega + \frac{1}{2} g F \sin. 4 \omega + \frac{1}{2} g G \sin. 5 \omega + \&c.$

$\mu g s \sin. \omega = +\mu g A \sin. \omega + \frac{1}{2} \mu g B \sin. 2 \omega + \frac{1}{2} \mu g C \sin. 3 \omega + \frac{1}{2} \mu g D \sin. 4 \omega + \frac{1}{2} \mu g E \sin. 5 \omega + \&c.$

$- \frac{1}{2} \mu g C \sin. \omega - \frac{1}{2} \mu g D \sin. 2 \omega - \frac{1}{2} \mu g E \sin. 3 \omega - \frac{1}{2} \mu g F \sin. 4 \omega - \frac{1}{2} \mu g G \sin. 5 \omega - \&c.$

De-là on tirera , en faisant évanouir chaque terme à part , les déterminations suivantes :

$$C..... = \frac{2B - 2\mu gA}{(2-\mu)g}, D = \frac{4C - (\mu+1)gB}{(3-\mu)g}, E = \frac{6D - (\mu+2)gC}{(4-\mu)g}, \\ F = \frac{8E - (\mu+3)D}{(5-\mu)g}, G = \frac{10F - (\mu+4)E}{(6-\mu)g}, \text{ \&c.}$$

§. XXVII. Toute la difficulté se réduit donc à la détermination des valeurs des deux lettres A & B , qui seront exprimées par les séries suivantes :

$$A..... = 1 + \frac{\mu(\mu+1)}{2.2} g^2 + \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}{2.2.4.4} g^4 \\ + \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)(\mu+4)(\mu+5)}{2.2.4.4.6.6} g^6 + \text{\&c.}$$

$$\frac{1}{2}B.... = \frac{\mu g}{2} + \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{2.2.4} g^3 + \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)(\mu+4)}{2.2.4.4.6} g^5 \\ + \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)(\mu+4)(\mu+5)(\mu+6)}{2.2.4.4.6.6.8} g^7 + \text{\&c.}$$

Si l'on regarde ici les quantités A , B , & g comme variables, les valeurs de A & B seront aussi exprimées par ces deux équations différentielles :

$$2dA = gdB + \mu Bdg \quad \& \quad Bdg + gdB = 2ggdA + 2\mu gAdg;$$

& si l'on fait $A=Bx$, on parviendra à cette équation :

$$2g(1-gg)dx - 2x dg + 4\mu gxxdg + (1-\mu)gdg = 0$$

ou, supposant $x = \frac{1}{y}$, à celle-ci :

$$2g(1-gg)dy + 2yydg - (1-\mu)gyydg - 4\mu gddg = 0$$

mais après plusieurs essais , je n'ai pû tirer aucun secours de cette équation, pour trouver les valeurs des lettres A & B . On fera donc obligé de chercher les sommes de ces suites , par des méthodes d'approximation ; on en trouvera plusieurs propres à ce dessein , dans le Traité de M. Stirling & ailleurs.

§. XXVIII. La plus sûre méthode pour trouver, tant la valeur de A que celle de $\frac{1}{2}B$, c'est d'ajouter actuelle-

ment un certain nombre de termes, par exemple, 10 depuis le commencement, & soit cette somme $= M$; le terme qui suit après ceux qu'on a ajoutés, soit $= O$, & les suivans auront cette forme : $OPg^2 + OPQg^4 + OPQRg^6 + OPQRSg^8 + \&c.$ de sorte qu'on aura,

$$A \text{ ou } \frac{1}{2}B = M + O(I + Pg^2 + PQg^4 + PQRg^6 + PQRSg^8 + \&c.)$$

Il s'agit donc de trouver, par une approximation convenable, la somme de cette suite, $1 + Pg^2 + PQg^4 + PQRg^6 + \&c.$ Or, comme les facteurs $P, Q, R, S,$ &c. approchent continuellement de l'unité, on pourra regarder cette suite comme récurrente, ou comme résultante de l'évolution d'une certaine fraction. Soit donc

$$\frac{1 + \alpha g^2 + \epsilon g^4}{1 - \gamma g^2 - \delta g^4} \text{ cette fraction, ou soit :}$$

$$\frac{1 + \alpha g^2 + \epsilon g^4}{1 - \gamma g^2 - \delta g^4} = 1 + Pg^2 + PQg^4 + PQRg^6 + PQRSg^8 + \&c.$$

$$\& \text{ on aura : } 0 = \begin{array}{cccc} 1 + & Pg^2 + & PQg^4 + & PQRg^6 + PQRSg^8 + \&c. \\ -\gamma & -\gamma P & -\gamma PQ & -\gamma PQR \\ & -\delta & -\delta P & -\delta PQ \end{array}$$

$$\text{d'où l'on tire } \gamma = \frac{R(Q-S)}{(Q-R)}; \delta = Q(R-\gamma); \alpha = B - \gamma \& \epsilon = PQ - \gamma P - \delta;$$

$$\& \text{ partant, } A \text{ ou } \frac{1}{2}B = M + \frac{1 + \alpha g^2 + \epsilon g^4}{1 - \gamma g^2 - \delta g^4} O. \text{ De la même}$$

manière, on pourra aisément former plusieurs autres expressions semblables : mais puisqu'on sçait que les coefficients des puissances de g deviennent égaux à l'infini, on pourra d'abord faire $\gamma + \delta = 1$, d'où l'on tirera,

$$\gamma = R + \frac{R-1}{Q-1}; \delta = 1 - \gamma; \alpha = P - \gamma \& \epsilon = PQ - \gamma P - \delta.$$

§. XXIX. Mais outre cela, j'ai trouvé une méthode toute particuliere, pour exprimer à peu près ces sommes; elle est fondée sur la division d'un angle droit, en autant de parties qu'on voudra, car les sinus de ces parties fournissent une propriété, qui a un grand rapport avec les

suivies, qui donnent les valeurs de A & de $\frac{1}{2} B$. Soit pris q pour désigner l'angle droit, & je dis que les expressions suivantes approcheront de plus en plus de ces valeurs.

$$I. A = \left\{ +\frac{1}{2} (1 - g \sin. \frac{1}{2} q)^{-\mu} \right\} \& \frac{1}{2} B = \left\{ +\frac{1}{2} \sin. \frac{1}{2} q (1 - g \sin. \frac{1}{2} q)^{-\mu} \right\}$$

$$II. A = \left\{ +\frac{1}{4} (1 - g \sin. \frac{1}{4} q)^{-\mu} + \frac{1}{4} (1 - g \sin. \frac{3}{4} q)^{-\mu} \right\}$$

$$\frac{1}{2} B = \left\{ +\frac{1}{4} \sin. \frac{1}{4} q (1 - g \sin. \frac{1}{4} q)^{-\mu} + \frac{1}{4} \sin. \frac{3}{4} q (1 - g \sin. \frac{3}{4} q)^{-\mu} \right\}$$

$$III. A = \frac{1}{6} \left\{ + (1 - g \sin. \frac{1}{6} q)^{-\mu} + (1 - g \sin. \frac{5}{6} q)^{-\mu} + (1 - g \sin. \frac{1}{2} q)^{-\mu} \right\}$$

$$\frac{1}{2} B = \frac{1}{6} \left\{ + \sin. \frac{1}{6} q (1 - g \sin. \frac{1}{6} q)^{-\mu} + \sin. \frac{5}{6} q (1 - g \sin. \frac{5}{6} q)^{-\mu} + \sin. \frac{1}{2} q (1 - g \sin. \frac{1}{2} q)^{-\mu} \right\}.$$

La loi de ces expressions est si claire, qu'on les pourra aisément continuer aussi loin qu'on voudra. J'ai divisé l'angle droit en dix parties, & j'ai trouvé que les expressions qui en résultent approchent tant de la vérité, que l'erreur n'est plus d'aucune conséquence.

§. XXX. Ayant, par quelqueune de ces méthodes, déterminé assez exactement les valeurs de A & B , on trouvera aisément les valeurs des autres coefficients C, D, E , &c. par le moyen des rapports donnés ci-dessus.

$$C = \frac{2B - 2\mu g A}{(2 - \mu)g}; D = \frac{4C - (\mu + 1)gB}{(3 - \mu)g}; E = \frac{6D - (\mu + 2)gC}{(4 - \mu)g};$$

$$F = \frac{8E - (\mu + 3)gD}{(5 - \mu)g}, \&c.$$

& alors on aura :

$$(1 - g \cos. \omega)^{-\mu} = A + B \cos. \omega + C \cos. 2\omega + D \cos. 3\omega + E \cos. 4\omega + F \cos. 5\omega + G \cos. 6\omega + \&c.$$

Qu'on fasse maintenant $\mu = \frac{3}{2}$, & on aura une suite infinie pour la formule irrationnelle $(1 - g \cos. \omega)^{-\frac{3}{2}}$, laquelle ne sera pas trop convergente, je l'avoue; mais pour sui-

vant le calcul, les intégrations la rendront de plus en plus convergente, de sorte que le résultat ou les expressions finies pour r & x , seront réduites à des séries si convergentes, qu'il suffira d'en prendre deux ou trois termes seulement, pour avoir leurs sommes assez exactes. Comme c'est donc à cette résolution que je suis redevable des découvertes suivantes, j'ai cru devoir faire cette digression analytique, pour mettre mes Juges plus au fait de ce qui suit.

§. XXXI. Je reviens aux équations différentio-différentielles du §. XXIII, où je mets au lieu de $\frac{1}{(1-g \cos. \omega)^{\frac{1}{2}}}$,

ou de $(1-g \cos. \omega)^{-\frac{3}{2}}$, la série trouvée $A + B \cos. \omega + C \cos. 2 \omega + D \cos. 3 \omega + \&c.$ Et puisque $d\zeta$ est à peu près $= \frac{d\omega}{1-m}$, je mettrai cette valeur $\frac{d\omega}{1-m}$ pour $d\zeta$ dans les petits termes de ces équations, qui sont justement ceux qui sont affectés de la formule $(1-g \cos. \omega)^{-\frac{3}{2}}$. Cela fait, ces équations se changeront en

$$\text{I. } mmd\zeta^2 + 2mndx + mmnr d\zeta - \frac{n ddr}{d\zeta} = \frac{(1+\nu) d\zeta}{\lambda^3} - \frac{2nr d\zeta}{\lambda^3} + \frac{n d\omega \cos. \omega}{\lambda(1-m)} \\ + \frac{n d\omega}{h(1-m)} (\lambda - \cos. \omega) (A + B \cos. \omega + C \cos. 2 \omega + D \cos. 3 \omega \\ + E \cos. 4 \omega + F \cos. 5 \omega + \&c.)$$

$$\text{II. } 2 mdr + \frac{ddx}{d\zeta} = \frac{-d\omega \sin. \omega}{\lambda(1-m)} + \frac{d\omega \sin. \omega}{h(1-m)} (A + B \cos. \omega + C \cos. 2 \omega \\ + D \cos. 3 \omega + E \cos. 4 \omega + \&c.)$$

Je commencerai par l'intégration de cette seconde équation, & multipliant chaque terme de la série par $\sin. \omega$, à cause de $\cos. n \omega \times \sin. \omega = \frac{1}{2} \sin. (n+1) \omega - \frac{1}{2} \sin. (n-1) \omega$; cette équation se changera en la suivante :

$$\text{II. } \dots\dots\dots 2 mdr + \frac{ddx}{d\zeta} = \frac{-d\omega \sin. \omega}{\lambda(1-m)} \\ + \frac{d\omega}{2h(1-m)} \left(-C \sin. \omega + B \sin. 2 \omega - D \sin. 3 \omega + E \sin. 4 \omega - F \sin. 5 \omega + \&c. \right)$$

§. XXXII. Maintenant, puisque $\int d\omega \sin. \omega = -\cos. \omega$,
& généralement $\int d\omega \sin. n\omega = -\frac{1}{n} \cos. n\omega$, après avoir
sommé chaque terme, l'équation intégrale sera,

$$2mr + \frac{dx}{d\zeta} = \frac{\cos. \omega}{\lambda(1-m)} - \frac{1}{2h(1-m)} \left((2A-C) \cos. \omega + \frac{1}{2}(B-D) \cos. 2\omega \right. \\ \left. + \frac{1}{3}(C-E) \cos. 3\omega + \frac{1}{4}(D-F) \cos. 4\omega + \mathcal{C}c. \right)$$

d'où il paroît déjà que la série infinie, à laquelle nous a
conduits cette premiere intégration, est beaucoup plus
convergente que les précédentes; & on ne doutera plus
que les intégrations suivantes n'augmentent encore fort
considérablement cette convergence. Au reste, on ne
fera pas surpris, que dans cette intégration je n'aie pas
ajouté de constante, puisque j'ai déjà remarqué, que tant
la valeur de r que celle de x , doit uniquement dépendre
de l'angle ω , & que ni l'une ni l'autre ne peut renfermer
une partie absolument constante. Car si r contenoit une
telle partie, elle devoit être comprise dans la lettre f , &
celle de dx dans la lettre m .

§. XXXIII. Nous aurons donc pour $\frac{dx}{d\zeta}$, cette expres-
sion finie :

$$\frac{dx}{d\zeta} = -2mr + \frac{\cos. \omega}{\lambda(1-m)} - \frac{(2A-C) \cos. \omega}{2h(1-m)} - \frac{(B-D) \cos. 2\omega}{4h(1-m)} - \frac{(C-E) \cos. 3\omega}{6h(1-m)} \\ - \frac{(D-F) \cos. 4\omega}{8h(1-m)} - \mathcal{C}c.$$

qui étant substituée dans la premiere équation différentio-
différentielle, donnera :

$$mnd\zeta - 3mmnr d\zeta + \frac{2mnd\zeta \cos. \omega}{\lambda(1-m)} - \frac{mnd\zeta}{h(1-m)} \left((A-C) \cos. \omega + \frac{1}{2}(B-D) \cos. 2\omega \right. \\ \left. + \frac{1}{3}(C-E) \cos. 3\omega + \mathcal{C}c. \right) \\ - \frac{n ddr}{d\zeta} - \frac{(1+v) d\zeta}{\lambda^3} + \frac{2nrd\zeta}{\lambda^3} - \frac{nd\omega \cos. \omega}{\lambda(1-m)} - \frac{nd\omega(\lambda - \cos. \omega)}{h(1-m)} \left(A+B \cos. \omega \right. \\ \left. + C \cos. 2\omega + D \cos. 3\omega + \mathcal{C}c. \right) = 0.$$

Multiplions la dernière série par $\lambda - \cos. \omega$, & à cause que
 $\cos.$

$\cos. n \omega \times \cos. \omega = \frac{1}{2} \cos. (n+1) \omega + \frac{1}{2} \cos. (n-1) \omega$, nous aurons :

$$\begin{aligned} 0 = m m d \zeta - 3 m m n r d \zeta + \frac{2 m n d \zeta \cos. \omega}{\lambda (1-m)} - \frac{m n d \zeta}{h (1-m)} \left((2A-C) \cos. \omega \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (B-D) \cos. 2\omega + \frac{1}{2} (C-E) \cos. 3\omega + \text{etc.} \right) \\ - \frac{n d d r}{d \zeta} - \frac{(1+v) d \zeta}{\lambda^3} + \frac{2 n r d \zeta}{\lambda^3} - \frac{n d \omega \cos. \omega}{\lambda (1-m)} \\ - \frac{n d \omega}{h (1-m)} \left(-\frac{\lambda A + \lambda B \cos. \omega + \lambda C \cos. 2\omega + \lambda D \cos. 3\omega + \text{etc.}}{\frac{1}{2} B - \frac{1}{2} C - \frac{1}{2} D - \frac{1}{2} E} \right) \end{aligned}$$

Or, puisque r renferme nécessairement l'angle ω , il faut que tous les termes de cette équation, qui ne contiennent pas l'angle ω , soient séparément $= 0$. Faisons donc $m m d \zeta$

$-\frac{(1+v) d \zeta}{\lambda^3} - \frac{n (2 \lambda A - B) d \omega}{2 h (1-m)} = 0$. Mais comme ce dernier terme est extrêmement petit, il sera permis d'y remettre $d \zeta$ au lieu de $\frac{d \omega}{1-m}$, ce qui donnera,

$$m m = \frac{1+v}{\lambda^3} + \frac{n (2 \lambda A - B)}{2 h},$$

laquelle équation contient le rapport entre le mouvement moyen de Saturne & sa distance moyenne. Par-là nous voyons que $m m$ fera à peu près $= \frac{1+v}{\lambda^3}$, ou $m m = \frac{(1+v)}{f^3} a^3$, à cause que $f = \lambda a$, & partant $\lambda = \sqrt[3]{\frac{1+v}{m m}}$.

Cette équation servira à déterminer la distance moyenne de Saturne au Soleil, puisque son mouvement moyen, où la lettre m est assez exactement connue par les observations : nous aurons donc exactement $\frac{1}{\lambda} = \frac{a}{f}$
 $= \sqrt[3]{\left(\frac{m m}{1+v} - \frac{n (2 \lambda A - B)}{2 h (1+v)} \right)}$.

§. XXXIV. Omettons donc dans l'équation ces termes constants, que j'ai faits séparément $= 0$, & il ne restera que des termes forts petits, qui sont tous multipliés

par n ; de sorte qu'on pourra mettre par-tout $\frac{d\omega}{1-m}$ à la place de $d\zeta$; ce qui donnera :

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{-(1-m) ddr}{d\omega} - \frac{m m r d\omega}{1-m} + \frac{2 m d\omega \cos. \omega}{\lambda (1-m)^2} - \frac{d\omega \cos. \omega}{\lambda (1-m)} \\ & - \frac{m d\omega}{h (1-m)^2} \left((2 A - C) \cos. \omega + \frac{1}{2} (B - D) \cos. 2\omega + \frac{1}{3} (C - E) \cos. 3\omega + \mathcal{C}c. \right) \\ & - \frac{d\omega}{2h (1-m)} \left((2 \lambda B - 2 A - C) \cos. \omega + (2 \lambda C - B - D) \cos. 2\omega \right. \\ & \quad \left. + (2 \lambda D - C - E) \cos. 3\omega + \mathcal{C}c. \right) \end{aligned}$$

où je ferai pour abrégier $\frac{m}{1-m} = \mu$, ce qui donnera, en changeant les signes,

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{m m ddr}{\mu d\omega} + \mu m m r d\omega - \frac{2 \mu \mu d\omega \cos. \omega}{\lambda} + \frac{\mu d\omega \cos. \omega}{\lambda} \\ & + \frac{\mu \mu d\omega}{h} \left((2 A - C) \cos. \omega + \frac{1}{2} (B - D) \cos. 2\omega + \frac{1}{3} (C - E) \cos. 3\omega + \mathcal{C}c. \right) \\ & + \frac{\mu d\omega}{2h} \left((2 \lambda B - 2 A - C) \cos. \omega + (2 \lambda C - B - D) \cos. 2\omega \right. \\ & \quad \left. + (2 \lambda D - C - E) \cos. 3\omega + \mathcal{C}c. \right) \end{aligned}$$

où il n'y a plus que deux variables r & ω , l'élément $d\omega$ étant supposé constant ; & comme c'est une équation différentio-différentielle, qui ne contient que ddr & r , on parviendra aisément à son intégration.

§. XXXV. Pour mettre cette équation sous une forme plus abrégée, je ferai les substitutions suivantes, qui ne regardent que les quantités constantes & connues.

$$A = \frac{\mu (2 A - C)}{h} + \frac{2 \lambda B - 2 A - C}{2 h} - \frac{2 \mu + 1}{\lambda}.$$

$$B = \frac{\mu (B - D)}{2 h} + \frac{2 \lambda C - B - D}{2 h}.$$

$$C = \frac{\mu (C - E)}{3 h} + \frac{2 \lambda D - C - E}{2 h}.$$

$$D = \frac{\mu (D - F)}{4 h} + \frac{2 \lambda E - D - F}{2 h}.$$

$\mathcal{C}c.$

Ces valeurs donneront à l'équation proposée, cette forme :

$$o = \frac{mm ddr}{\mu \mu d \omega^2} + mmr + A \cos. \omega + B \cos. 2\omega + C \cos. 3\omega + D \cos. 4\omega + \&c.$$

qu'on pourroit aisément intégrer à la rigueur : mais pour notre dessein, il sera plus convenable de se servir d'une approximation, qu'on pourra pousser aussi loin qu'on voudra.

§. XXXVI. Pour cet effet, comme il est aisé de prévoir que la valeur de r sera exprimée par une semblable série de $A \cos. \omega + B \cos. 2\omega + C \cos. 3\omega + \&c.$ je suppose

$$r = A' \cos. \omega + B' \cos. 2\omega + C' \cos. 3\omega + D' \cos. 4\omega + E' \cos. 5\omega + \&c.$$

& j'ai

$$\frac{dr}{d\omega} = -A' \sin. \omega - 2B' \sin. 2\omega - 3C' \sin. 3\omega - 4D' \sin. 4\omega - 5E' \sin. 5\omega - \&c.$$

& de plus :

$$\frac{ddr}{d\omega^2} = -A' \cos. \omega - 4B' \cos. 2\omega - 9C' \cos. 3\omega - 16D' \cos. 4\omega - 25E' \cos. 5\omega - \&c.$$

Ces valeurs étant substituées dans l'équation, donneront :

$$o = \frac{mm}{\mu \mu} A' - \frac{4mm}{\mu \mu} B' - \frac{9mm}{\mu \mu} C' - \frac{16mm}{\mu \mu} D' - \frac{25mm}{\mu \mu} E' + A + B + C + D + E,$$

d'où l'on tire :

$$A' = \frac{\mu \mu A}{mm(1-\mu \mu)} ; B' = \frac{\mu \mu B}{m^2(4-\mu \mu)} ; C' = \frac{\mu \mu C}{m^2(9-\mu \mu)} ; D' = \frac{\mu \mu D}{m^2(16-\mu \mu)} , \&c.$$

ainsi la valeur de la lettre r est trouvée, & partant celle de la distance de Saturne au Soleil, qui est $z = f(1 + nr)$; & il est manifeste que cette série $r = A' \cos. \omega + B' \cos. 2\omega + C' \cos. 3\omega + \&c.$ doit être extrêmement convergente ; & qu'elle montre aisément, de combien doit être dérangée la distance moyenne de Saturne au Soleil f , par l'action de Jupiter, à chaque aspect de ces deux Planetes rapporté au Soleil.

§. XXXVII. L'équation intégrale, trouvée au §. XXXII.

étant multipliée par $d\zeta = \frac{d\omega}{1-m}$, à cause de $\frac{m}{1-m} = \mu$,
 prendra cette forme :

$$2\mu r d\omega + dx = \frac{\mu^2 d\omega \cos \omega}{\lambda m^2} - \frac{\mu^2 d\omega}{2h m^2} \left((2A-C) \cos \omega + \frac{1}{2}(B-D) \cos 2\omega + \frac{1}{3}(C-E) \cos 3\omega + \frac{1}{4}(D-F) \cos 4\omega + \dots \right)$$

d'où en substituant pour r sa valeur la valeur trouvée, on aura :

$$dx = \left. \begin{aligned} & -\frac{2\mu A'}{2mmh} \\ & -\frac{\mu^2(2A-C)}{2mmh} \\ & + \frac{\mu\mu}{\lambda mm} \end{aligned} \right\} d\omega \cos \omega \quad \left. \begin{aligned} & -\frac{2\mu B'}{4mmh} \\ & -\frac{\mu\mu(B-D)}{4mmh} \end{aligned} \right\} d\omega \cos 2\omega \quad \left. \begin{aligned} & -\frac{2\mu C'}{6mmh} \\ & -\frac{\mu\mu(C-E)}{6mmh} \end{aligned} \right\} d\omega \cos 3\omega \\ & \left. \begin{aligned} & -\frac{2\mu D'}{8mmh} \\ & -\frac{\mu\mu(D-F)}{8mmh} \end{aligned} \right\} d\omega \cos 4\omega - \dots$$

Chaque terme de cette équation étant intégrable, on en tirera :

$$x = \left. \begin{aligned} & -\frac{2\mu A'}{2mmh} \\ & -\frac{\mu\mu(2A-C)}{2mmh} \\ & + \frac{\mu\mu}{\lambda mm} \end{aligned} \right\} \sin \omega \quad \left. \begin{aligned} & -\frac{1}{2}\mu B' \\ & -\frac{\mu^2(B-D)}{8mmh} \end{aligned} \right\} \sin 2\omega \quad \left. \begin{aligned} & -\frac{2}{3}\mu C' \\ & -\frac{\mu^2(C-E)}{18mmh} \end{aligned} \right\} \sin 3\omega \\ & \left. \begin{aligned} & -\frac{2}{4}\mu D' \\ & -\frac{\mu^2(D-F)}{32mmh} \end{aligned} \right\} \sin 4\omega \quad \left. \begin{aligned} & -\frac{2}{5}\mu E' \\ & -\frac{\mu^2(E-G)}{50mmh} \end{aligned} \right\} \sin 5\omega - \dots$$

ce qui donnera la véritable longitude de Saturne $\phi = z + m\zeta + n\pi$: la constante z doit être dépendante du point d'où l'on compte la longitude, la partie $z + m\zeta$ exprime pour chaque tems la longitude moyenne, & la particule $n\pi$ la variation causée par l'action de Jupiter dans la longitude de Saturne.

§. XXXVIII. Pour appliquer ces formules au mouve-

ment de Saturne , on n'a qu'à les évaluer en nombres ,
 ayant premièrement $n = \frac{1}{1067}$, nous aurons en fractions
 décimales $n = 0,0009372$, ensuite m étant à 1 comme
 le mouvement moyen de Saturne à celui de Jupiter , nous
 trouverons par les Tables Astronomiques $m = 0,40253$,
 & puisque λ est à peu près $= \sqrt[3]{\frac{1}{mm}}$, nous aurons
 $\lambda = 1,83429$, car nous n'avons pas besoin d'une plus
 grande précision , vû que cette lettre λ n'entre que dans
 les plus petits termes. Nous aurons ensuite $\mu = \frac{m}{1-m}$
 $= 0,673724$, & $h = \lambda (1 + \lambda \lambda)^{\frac{1}{2}} = 16,72585$, & g
 $= \frac{2\lambda}{1 + \lambda \lambda} = 0,8405$. Et supposant $(1 - g \cos. \omega)^{-\frac{1}{2}} = A$
 $+ B \cos. \omega + C \cos. 2\omega + D \cos. 3\omega + E \cos. 4\omega + F \cos. 5\omega$
 $+ \&c.$ on trouvera par les méthodes indiquées ci-dessus :

$$A = 3,21789 ; B = 4,70357 ; C = 3,07731 ; D = 1,92413 ; E = 1,18601 ; F = 0,75144 , \&c.$$

De-là les autres quantités seront :

$$A = 0,17732 ; B = 0,19534 ; C = 0,10896 ; D = 0,06189 ; E = 0,03612 ; \&c. \text{ Et enfin :}$$

$$A' = 0,90960 ; B' = 0,15431 ; C' = 0,03572 ; D' = 0,01115 ; E' = 0,00412 , \&c.$$

De - là la distance de Saturne au Soleil , pour chaque
 angle ω , qu'on trouve en soustrayant la longitude de Sa-
 turne de celle de Jupiter , sera :

$$\frac{z}{f} = 1 + 0,0008542 \cos. \omega + 0,0001449 \cos. 2\omega + 0,0000335 \cos. 3\omega + 0,0000105 \cos. 4\omega + \&c.$$

Donc pour les conjonctions de h & J où $\omega = 0$, on aura $\frac{z}{f} = 1,0010466$,

Pour les oppositions de h & J où $\omega = 180^\circ$ on aura $\frac{z}{f} = 0,9992652$:

Et pour les quadratures où $\omega = 90^\circ$ ou 270° , on aura $\frac{z}{f} = 0,9998656$:

§. XXXIX. Employant les mêmes valeurs numéri-
 ques , on trouve la longitude de Saturne :

$$\varphi = \Sigma + m \zeta + 0,0000191 \sin. \omega - 0,0001523 \sin. 2\omega - 0,0000316 \sin. 3\omega - 0,0000093 \sin. 4\omega - \&c.$$

Ici on suppose le sinus total = 1, & comme les sinus sont exprimés en partie du rayon, il les faudra convertir en arcs, ou angles, ce qui se fera en ôtant 4,6855749 du logarithme de chaque sinus, le nombre qui convient au logarithme restant, désignant l'arc qui est égal à ce sinus, exprimé en minutes & secondes. Cela posé, la longitude de Saturne sera

$$\varphi = \text{Long. moyenne} + 4'' \sin. \omega - 32'' \sin. 2\omega - 7'' \sin. 3\omega - 2'' \sin. 4\omega - \text{\&c.}$$

d'où l'on voit que ce dérangement dans le mouvement de Saturne, comme il ne surpasse que très-rarement une demi-minute, doit être presque imperceptible. Et comme le dérangement observé est plusieurs fois plus grand que 10', il est évident qu'on ne le sçauroit expliquer par cet effet de l'action de Jupiter. On reconnoîtra par la même raison, la nécessité des recherches suivantes, où j'introduirai dans le calcul, non-seulement l'excentricité de l'orbite de Saturne, mais encore celle de Jupiter : circonstances qui rendent le calcul beaucoup plus difficile, & qui le rendroient même insurmontable, si je n'avois pas trouvé moyen de convertir si convenablement la formule irrationnelle $(1 - g \cos. \omega)^{-\frac{3}{2}}$ en suite infinie.

§. XL. J'avois cru d'abord qu'on pouvoit négliger les forces réciproques, qui agissent sur le Soleil, par cette seule raison que les dérangemens deviendroient plus grands, ce qui me paroissoit plus convenable. En effet, effaçant dans le calcul tous les termes qui viennent de cette force réciproque, on trouvera au lieu du premier terme $+ 4'' \sin. \omega$, qui est dans l'expression de la longitude, celui-ci considérablement plus grand $- 546'' \sin. \omega$, qui donneroit près des quadratures une inégalité de plus de 9' 10": mais ayant comparé cette hypothèse, si peu vraisemblable en elle-même, avec les observations, je l'ai trouvée insoutenable : ce que j'ai cru devoir faire

remarquer, au cas que quelqu'un voulût profiter de cette convenance apparente, pour rendre son système probable.

IV.

Recherches du Mouvement de Saturne, dans l'hypothese que les deux orbites soient dans le même plan, l'orbite de Jupiter circulaire, & celle de Saturne excentrique.

§. XLI. **L**ES deux premières conditions donnent par le §. XXI. ces deux équations :

$$\text{I. } d d z - z d \varphi^2 = -a^3 d \zeta^2 \left(\frac{1+\nu}{zz} + \frac{nz}{v^3} + \frac{n \cos. \omega}{aa} - \frac{n a \cos. \omega}{v^3} \right).$$

$$\text{II. } z d z d \varphi + z d d \varphi = -n a^3 d \zeta^2 \sin. \omega \left(\frac{1}{aa} - \frac{a}{v^3} \right),$$

où toutes les lettres retiennent les mêmes significations que dans les articles précédents : or, puisque $y = a$, nous aurons $v = \sqrt{(aa + zz - 2az \cos. \omega)}$. Ces équations se réduiront donc à celles-ci :

$$\text{I. } d d z - z d \varphi^2 + \frac{(1+\nu)a^3 d \zeta^2}{zz} + \frac{na^3 z d \zeta^2}{v^3} - \frac{na^4 d \zeta^2 \cos. \omega}{v^3} + na d \zeta^2 \cos. \omega = 0.$$

$$\text{II. } z d z d \varphi + z d d \varphi - \frac{n a^4 d \zeta^2 \sin. \omega}{v^3} + na d \zeta^2 \sin. \omega = 0.$$

dans lesquelles on se souviendra, que l'élément $d \zeta$ du mouvement moyen de Jupiter, est supposé constant, & que $\omega = \zeta - \varphi$.

Il faut donc introduire dans le calcul l'excentricité de l'orbite de Saturne, ou la nature de l'ellipse qu'il décriroit, s'il n'étoit sollicité que par la force du Soleil, pour

connoître les dérangemens que l'action de Jupiter doit causer dans l'orbite, aussi-bien que dans le mouvement de Saturne.

§. XLII. Soit pour cet effet, l'anomalie moyenne $= p$, dont le mouvement est uniforme, & est en rapport constant avec le mouvement moyen de Jupiter, ce que j'exprime par l'équation $dp = m d\zeta$. Soit ensuite la distance moyenne de Saturne au Soleil $= f$, & l'excentricité de l'orbite ou la distance des foyers divisée par le grand axe $= k$. De plus, soit l'anomalie nommée excentrique $= q$, qui est un angle que l'on tire de l'anomalie moyenne p , par le moyen de cette égalité $p = q + k \sin. q$; d'où l'on tire $dp = dq (1 + k \cos. q)$. Cela posé, si le mouvement de Saturne n'étoit pas dérangé par l'action de Jupiter, & qu'il suivît parfaitement les regles de Kepler, on auroit ces deux équations:

$$z = f(1 + k \cos. q) \quad \& \quad d\varphi = \frac{dq \sqrt{(1 - kk)}}{1 + k \cos. q},$$

à l'aide desquelles on pourroit aisément, pour chaque anomalie excentrique q , déterminer tant la distance de Saturne au Soleil z , que sa longitude φ . Or, pour chaque tems proposé, on connoît l'anomalie moyenne p , par laquelle il ne sera pas difficile, en employant l'excentricité connue k , de déterminer l'anomalie excentrique q , au moyen de l'équation $p = q + k \sin. q$.

§. XLIII. Mais à cause de l'action de Jupiter, on n'aura pas exactement ni $z = f(1 + k \cos. q)$ ni $d\varphi = \frac{dq \sqrt{(1 - kk)}}{1 + k \cos. q}$; pour connoître ce qu'il s'en faut, je supposerai que

$$z = f(1 + k \cos. q + nr) \quad \& \quad d\varphi = \frac{a dq \sqrt{(1 - kk)}}{1 + k \cos. q} + n dx,$$

où a peut ne pas être $= 1$, à cause du mouvement de l'aphélie, causé par l'action de Jupiter. Au reste il est à

remarquer

remarquer, que la quantité r , qui vient de cette action, ne peut contenir ni un terme constant, ni un terme de cette forme $\epsilon \cos. q$, puisque dans le premier cas on n'aurait qu'à changer la lettre f , & dans le second cas la lettre k . De même dans dx , il n'y aura point de terme ϵdq , vu qu'un tel terme devroit être compris dans ϵ . Il faut bien avoir égard à ces circonstances, pour être en état de déterminer les constantes que les intégrations suivantes renferment.

§. XLIV. Nous aurons donc $d\zeta = \frac{dp}{m} = \frac{dq}{m}$
 $(1+k \cos. q)$. Et puisque $d\varphi = \frac{\alpha dq \sqrt{(1-kk)}}{1+k \cos. q} + n dx$, à cause de $d\omega = d\zeta - d\varphi$, il viendra :

$$d\omega = \frac{dq}{m} (1+k \cos. q) - \frac{\alpha dq \sqrt{(1-kk)}}{1+k \cos. q} - n dx.$$

Mais comme l'angle ω n'entre que dans les plus petits termes de nos équations, qui sont multipliés par n , on pourra négliger le terme $n dx$, de même que les puissances de k , & on aura assez exactement $\frac{\alpha dq \sqrt{(1-kk)}}{1+k \cos. q} = \alpha dq (1-k \cos. q)$ d'où l'on tirera :

$$d\omega = dq \left(\frac{1}{m} - \alpha + \left(\frac{1}{m} + \alpha \right) k \cos. q \right).$$

Par la même raison, au lieu de z , nous pourrions mettre dans les petits termes $f(1+k \cos. q)$, & comme la quantité v n'affecte que ces petits termes, nous aurons $v = \sqrt{(aa + ff(1+k \cos. q)^2 - 2af(1+k \cos. q) \cos. \omega)}$: rejetant aussi le terme multiplié par kk , on aura :

$$v = \sqrt{(aa + ff - 2af \cos. \omega + 2kff \cos. q - 2ka f \cos. q \cos. \omega)}.$$

§. XLV. Supposons, comme dans l'article précédent, $f = \lambda a$, & divisons les équations différentio-différentielles par $f d\zeta$, pour les délivrer de la considération de quelque différentielle constante : nous aurons, en

observant les mêmes regles dans les petits termes :

$$I. d. \frac{dz}{fd\xi} - \frac{zd\varphi^2}{fd\xi} + \frac{(1+v)ff d\xi}{\lambda^3 z z} + \frac{na^3 d\xi(\lambda + \lambda k \cos q - \cos \omega)}{\lambda v^3} + \frac{n}{\lambda} d\xi \cos \omega = 0.$$

$$II. \frac{z}{f} d. \frac{d\varphi}{d\xi} + \frac{z dz d\varphi}{fd\xi} - \frac{na^3 d\xi \sin \omega}{\lambda v^3} + \frac{n}{\lambda} d\xi \sin \omega = 0.$$

Mais ayant trouvé $d\xi = \frac{dq}{m} (1 + k \cos q)$, puisque $z = f(1 + k \cos q + nr)$ & $dz = f(-k dq \sin q + n dr)$, mettons ces valeurs au lieu de $d\xi$, z , & dz , & nous aurons :

$$I. d. \left(\frac{-k dq \sin q + n dr}{d q (1 + k \cos q)} \right) - \frac{(1+k \cos q + nr) d\varphi^2}{d q (1 + k \cos q)} + \frac{(1+v) d q (1 + k \cos q)}{\lambda^3 m^2 (1 + k \cos q + nr)^2} + \frac{na^3 dq (1 + k \cos q) (\lambda + \lambda k \cos q - \cos \omega)}{\lambda m^2 v^3} + \frac{nd q (1 + k \cos q) \cos \omega}{\lambda m^2} = 0.$$

$$II. (1 + k \cos q + nr) d. \left(\frac{d\varphi}{d q (1 + k \cos q)} \right) - \frac{z d\varphi (k dq \sin q - n dr)}{d q (1 + k \cos q)} - \frac{na^3 dq (1 + k \cos q) \sin \omega}{\lambda m^2 v^3} + \frac{nd q (1 + k \cos q) \sin \omega}{\lambda m^2} = 0.$$

§. XLVI. Puisque nous ne cherchons que les inégalités qui viennent de l'action de Jupiter, nous pourrons hardiment négliger les termes qui renferment le quarré, & les plus hautes puissances de l'excentricité k . Dans ce dessein, il sera permis de supposer $d\varphi = a dq - u k dq \cos q + n dx$, & $d\varphi^2 = a^2 dq^2 - 2 a^2 k dq^2 \cos q + 2 a n dq dx - 2 a n k dq dx \cos q$: & par la même raison $\frac{1}{1 + k \cos q} = 1 - k \cos q$, & $\frac{1}{(1 + k \cos q + nr)^2} = 1 - 2 k \cos q - 2 nr + 6 n k r \cos q$. Ces substitutions faites, si dans les différentiations à faire, nous supposons maintenant l'élément dq constant, nous parviendrons à ces équations :

$$I. \dots - a^2 dq + 2 a^2 k dq \cos q - k dq \cos q + \frac{(1+v) dq}{\lambda^3 m^2} - \frac{k dq \cos q}{\lambda^3 m^2} + \frac{nd q \cos \omega}{\lambda m^2} (1 + k \cos q) + \frac{na^3 dq (\lambda + 2 \lambda k \cos q - \cos \omega - k \cos q \cos \omega)}{\lambda m^2 v^3} + \frac{n dr}{dq} - \frac{n k dr \cos q}{dq} + n k dr \sin q - a^2 nr dq + 3 a^2 n k r dq \cos q - \frac{2 nr dq}{\lambda^3 m^2} + \frac{a n k r dq \cos q}{\lambda^3 m^2} - 2 a n dx + 2 a n k dx \cos q = 0.$$

$$\text{II. } \frac{d q \sin. \omega}{\lambda m^2} (1 + k \cos. q) - \frac{a^3 d q \sin. \omega}{\lambda m^2 v^3} (1 + k \cos. q) + 2 a dr - 4 a k dr \cos. q \\ + 2 a k r d q \sin. q + \frac{d d x}{d q} - k d x \sin. q = 0.$$

§. XLVII. Développons maintenant avec plus de soin la valeur de v , à cause de $f = \lambda a$, nous aurons $v = a \sqrt{(1 + \lambda \lambda - 2 \lambda \cos. \omega + 2 \lambda k (\lambda - \cos. \omega) \cos. q)}$, & faisant, comme auparavant, $g = \frac{2 \lambda}{1 + \lambda \lambda}$, v fera $= (1 + \lambda \lambda)^{\frac{1}{2}} a \sqrt{(1 - g \cos. \omega + k g (\lambda - \cos. \omega) \cos. q)}$. Faisant donc de plus $h = \lambda (1 + \lambda \lambda)^{\frac{1}{2}}$, nous trouverons :

$$\frac{a^3}{\lambda v^3} = \frac{1}{h} (1 - g \cos. \omega + k g (\lambda - \cos. \omega) \cos. q)^{-\frac{3}{2}},$$

& puisque $k g (\lambda - \cos. \omega) \cos. q$ est fort petit par rapport à $1 - g \cos. \omega$, nous aurons assez exactement :

$$\frac{a^3}{\lambda v^3} = \frac{1}{h (1 - g \cos. \omega)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3 k g (\lambda - \cos. \omega) \cos. q}{2 h (1 - g \cos. \omega)^{\frac{5}{2}}}.$$

Or, ayant supposé plus haut :

$$(1 - g \cos. \omega)^{-\frac{3}{2}} = A + B \cos. \omega + C \cos. 2 \omega + D \cos. 3 \omega + E \cos. 4 \omega + \&c.$$

Nous pourrions supposer pareillement,

$$(1 - g \cos. \omega)^{-\frac{5}{2}} = P + Q \cos. \omega + R \cos. 2 \omega + S \cos. 3 \omega + T \cos. 4 \omega + \&c.$$

& de la même manière qu'on a trouvé les valeurs des lettres A, B, C, D, E , &c. on trouvera celles de P, Q, R, S , &c. & partant nous aurons :

$$\frac{a^3}{\lambda v^3} = \frac{1}{h} (A + B \cos. \omega + C \cos. 2 \omega + D \cos. 3 \omega + E \cos. 4 \omega + \&c.) \\ - \frac{3 k g \cos. q}{2 h} (\lambda - \cos. \omega) (P + Q \cos. \omega + R \cos. 2 \omega + S \cos. 3 \omega + T \cos. 4 \omega + \&c.)$$

§. XLVIII. Multiplions actuellement cette dernière série par $\lambda - \cos. \omega$, & faisons $\frac{3}{2} g (\lambda - \cos. \omega) (P + Q \cos. \omega + R \cos. 2 \omega + S \cos. 3 \omega + \&c.) = P^0 + Q^0 \cos. \omega + R^0 \cos. 2 \omega + S^0 \cos. 3 \omega + \&c.$ où P^0, Q^0 , &c. ne marquent pas des

44 RECHERCHES DES INEGALITE'S
puissances, mais de nouveaux caracteres : on trouvera

$$\begin{aligned} P^o &= \frac{3}{2} \lambda g P - \frac{3}{4} g Q \\ Q^o &= \frac{3}{2} \lambda g Q - \frac{3}{2} g P - \frac{3}{4} g R \\ R^o &= \frac{3}{2} \lambda g R - \frac{3}{4} g Q - \frac{3}{4} g S \\ S^o &= \frac{3}{2} \lambda g S - \frac{3}{4} g R - \frac{3}{4} g T \end{aligned}$$

Et par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{\lambda v^3} &= \frac{1}{h} (A + B \cos. \omega + C \cos. 2 \omega + D \cos. 3 \omega + E \cos. 4 \omega + \dots) \\ &\quad - \frac{k \cos. q}{h} (P^o + Q^o \cos. \omega + R^o \cos. 2 \omega + S^o \cos. 3 \omega + \dots) \end{aligned}$$

Cette expression se trouve, dans la premiere équation, multipliée par $\frac{n}{m^2} dq (\lambda + 2 \lambda k \cos. q - \cos. \omega - k \cos. \omega \cos. q)$, & partant elle renfermera des termes constans, des termes qui ne sont affectés que par $\cos. q$, & des termes qui dépendent des deux angles ω & q ; & puisque r ne contient ni des termes constans, ni de cette forme $\cos. q$, il est à propos de considérer ces termes à part : négligeant donc les autres termes, ainsi que ceux qui sont multipliés par k , on verra que

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{v^3} (\lambda + 2 \lambda k \cos. q - \cos. \omega - k \cos. \omega \cos. q) &= \frac{1}{h} (\lambda A + 2 \lambda k A \cos. q - \frac{1}{2} B - \frac{1}{2} B k \cos. q) \\ &\quad - \frac{k}{h} (\lambda P^o \cos. q - \frac{1}{2} Q^o \cos. q). \end{aligned}$$

§. XLIX. Cela posé, avant que d'entreprendre l'intégration de la premiere équation, considérons la seconde, qui, étant multipliée par $1 + k \cos. q$, devient intégrable : nous aurons, en rejetant les termes qui renferment le quarré kk :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dx}{dq} (1 + k \cos. q) - k dx \sin. q + 2 \omega dr - 2 \omega k dr \cos. q + 2 \omega k r dq \sin. q \\ &\quad + \frac{dq \sin. \omega}{\lambda m^2} (1 + 2 k \cos. q) - \frac{a^3 dq \sin. \omega}{\lambda m^2 v^3} (1 + 2 k \cos. q), \end{aligned}$$

dont la premiere partie, qui contient x & r étant absolument intégrable, nous trouverons :

$$0 = \frac{dx}{dq} (1 + k \cos q) + 2 \alpha r (1 + k \cos q) + \frac{1}{\lambda m m} \int dq \sin \omega (1 + 2 k \cos q) - \int \frac{a^3 dq \sin \omega}{\lambda m^2 v^3} (1 + 2 k \cos q).$$

Or, mettant pour $\frac{a^3}{\lambda v^3}$ la valeur qu'on vient de trouver, on aura :

$$\frac{a^3 dq}{\lambda m^2 v^3} (\sin \omega + 2 k \cos q \sin \omega) = \frac{dq}{h m m} \left(\begin{array}{cccc} A \sin \omega + \frac{1}{2} B \sin 2 \omega + \frac{1}{2} C \sin 3 \omega + \frac{1}{2} D \sin 4 \omega & \text{etc.} \\ -\frac{1}{2} C & -\frac{1}{2} D & -\frac{1}{2} E & -\frac{1}{2} F \end{array} \right) + \frac{2 k dq \cos q}{h m m} \left(\begin{array}{cccc} A \sin \omega + \frac{1}{2} B \sin 2 \omega + \frac{1}{2} C \sin 3 \omega & & & \\ -\frac{1}{2} C & -\frac{1}{2} D & -\frac{1}{2} E & \\ -\frac{1}{2} P^0 & -\frac{1}{2} Q^0 & -\frac{1}{2} R^0 & \text{etc.} \\ +\frac{1}{2} R^0 & +\frac{1}{2} S^0 & +\frac{1}{2} T^0 & \end{array} \right)$$

Mais comme $2 \sin \omega \cos q = \sin (\omega + q) + \sin (\omega - q)$ & $2 \sin 2 \omega \cos q = \sin (2 \omega + q) + \sin (2 \omega - q)$, l'équation intégrale précédente, se changera en celle-ci :

$$0 = \frac{dx}{dq} (1 + k \cos q) + 2 \alpha r (1 - k \cos q) + \frac{1}{\lambda m m} \int dq \sin \omega + \frac{k}{\lambda m m} \int dq \sin (\omega + q) + \frac{k}{\lambda m m} \int dq \sin (\omega - q) - \frac{(A - \frac{1}{2} C)}{h m m} \int dq \sin \omega - \frac{(\frac{1}{2} B - \frac{1}{2} D)}{h m m} \int dq \sin 2 \omega - \frac{(\frac{1}{2} C - \frac{1}{2} E)}{h m m} \int dq \sin 3 \omega - \frac{(\frac{1}{2} D - \frac{1}{2} F)}{h m m} \int dq \sin 4 \omega - \text{etc.} - \frac{k}{h m m} (A - \frac{1}{2} C - \frac{1}{2} P^0 + \frac{1}{2} R^0) \int dq \sin (\omega + q) - \frac{k}{h m m} (\frac{1}{2} B - \frac{1}{2} D - \frac{1}{2} Q^0 + \frac{1}{2} S^0) \int dq \sin (2 \omega + q) - \frac{k}{h m m} (A - \frac{1}{2} C - \frac{1}{2} P^0 + \frac{1}{2} R^0) \int dq \sin (\omega - q) - \frac{k}{h m m} (\frac{1}{2} B - \frac{1}{2} D - \frac{1}{2} Q^0 + \frac{1}{2} S^0) \int dq \sin (2 \omega - q) \text{ etc.}$$

§. L. Puisque tous ces termes naissent de l'action de Jupiter, & qu'ils sont par conséquent extrêmement petits, il sera permis de négliger les derniers termes, quoiqu'il ne feroit pas difficile de trouver leurs intégrales; & comme α est à peu près $= 1$, nous pourrions supposer :

$$d \omega = \frac{dq}{m} (1 - m + (1 + m) k \cos q) \text{ ou } d q = \frac{m d \omega}{1 - m} - \frac{(1 + m) k dq \cos q}{1 - m}, \text{ ce qui donnera,}$$

$$\int dq \sin. \omega = \frac{m}{1-m} \int d\omega \sin. \omega - \frac{(1+m)k}{2(1-m)} \int dq \sin. (\omega+q) - \frac{(1+m)k}{2(1-m)} \int dq \sin. (\omega-q).$$

Or, dans ces deux derniers termes, comme ils sont déjà multipliés par k , dq pourra être supposé $= \frac{m d\omega}{1-m}$, de sorte que $dq = m(d\omega + dq)$, & $dq = \frac{m}{1-2m}(d\omega - dq)$; d'où nous tirerons :

$$\int dq \sin. (\omega+q) = m \int (d\omega + dq) \sin. (\omega+q) = -m \cos. (\omega+q).$$

$$\int dq \sin. (\omega-q) = \frac{m}{1-2m} \int (d\omega - dq) \sin. (\omega-q) = \frac{-m}{1-2m} \cos. (\omega-q).$$

Et ces valeurs étant substituées dans la première formule, donneront :

$$\int dq \sin. \omega = \frac{-m}{1-m} \cos. \omega + \frac{m(1+m)k}{2(1-m)} \cos. (\omega+q) + \frac{m(1+m)k}{2(1-m)(1-2m)} \cos. (\omega-q).$$

§. LI. Je ne fais pas d'attention aux termes $\int dq \sin. 2\omega$, $\int dq \sin. 3\omega$, &c. parce qu'ils donneroient à la fin les mêmes termes & les mêmes inégalités que j'ai déjà déterminées dans l'article précédent. Cela remarqué, l'intégrale de la seconde équation aura cette forme :

$$\begin{aligned} &= \frac{dx}{dq} (1+k \cos. q) + 2ar (1-k \cos. q) + \frac{(2A-C)}{2hm(1-m)} \cos. \omega \\ &\quad - \frac{1}{\lambda m(1-m)} \cos. \omega \\ &\quad - \frac{(2A-C)(1+m)}{4hm(1-m)} k \cos. (\omega+q) - \frac{(2A-C)(1+m)}{4hm(1-m)(1-2m)} k \cos. (\omega-q) \\ &\quad + \frac{(1+m)}{2\lambda m(1-m)} k \cos. (\omega+q) + \frac{(1+m)}{2\lambda m(1-m)(1-2m)} k \cos. (\omega-q) \\ &\quad + \frac{(2A-C-P^0+\frac{1}{2}R^0)}{2hm} k \cos. (\omega+q) + \frac{(2A-C-P^0+\frac{1}{2}R^0)}{2hm(1-2m)} k \cos. (\omega-q) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda m} k \cos. (\omega+q) - \frac{1}{\lambda m(1-2m)} k \cos. (\omega-q) \end{aligned}$$

Supposons maintenant, pour abrégér :

$$\frac{2A-C}{2hm(1-m)} - \frac{1}{\lambda m(1-m)} = L.$$

$$\frac{(1+m)(2A-C)}{4hm(1-m)} + \frac{2A-C-P^0+\frac{1}{2}R^0}{2hm} + \frac{1+m}{2\lambda m(1-m)} - \frac{1}{\lambda m} = M,$$

& nous aurons :

$$\frac{dx}{dq}(1+k\cos q) = -2ar(1-k\cos q) - L\cos\omega + Mk\cos(\omega+q) + \frac{M}{1-2m}k\cos(\omega-q).$$

§. LII. Revenons ensuite à la première équation, & comme dx y est multiplié par $-2an(1-k\cos q)$, multiplions la dernière équation par $-2an(1-2k\cos q)$; & nous aurons :

$$\begin{aligned} -\frac{2andx}{dq}(1-k\cos q) &= 4aanr(1-3k\cos q) + 2anL\cos\omega \\ &\quad - 2anMk\cos(\omega+q) - \frac{2anM}{1-2m}k\cos(\omega-q) \\ &\quad - 2anLk\cos(\omega+q) - 2anLk\cos(\omega-q). \end{aligned}$$

Cette valeur, étant substituée dans la première équation du §. XLVI, donnera :

$$\begin{aligned} 0 &= -a^2dq + 2a^2kdq\cos q - kdq\cos q + \frac{(1+v)dq}{\lambda^3m^2} - \frac{kdq\cos q}{\lambda^3m^2} + \frac{ndq\cos\omega}{\lambda m^2}(1+k\cos q) \\ &\quad + \frac{na^3dq}{\lambda m^2v^3}(\lambda + 2\lambda k\cos q - \cos\omega - k\cos q\cos\omega) + \frac{nddr}{dq}(1-k\cos q) + nkdr\sin q \\ &\quad + 3aanrdq - 9aanrkdq\cos q + 2anLdq\cos\omega - 2anMkdq\cos(\omega+q) - \frac{2anM}{1-2m}kdq\cos(\omega-q) \\ &\quad - \frac{2nr dq}{\lambda^3m^2} + \frac{4nkr dq\cos q}{\lambda^3m^2} - 2anLkdq\cos(\omega-q) - 2anLkdq\cos(\omega-q) \end{aligned}$$

Or, puisque r ne peut contenir ni aucun terme constant, ni aucun de cette forme $\epsilon\cos q$, il faut absolument que ces termes se détruisent séparément dans l'équation, ayant déjà marqué les termes de cette nature, qui sont contenus dans $\frac{na^3dq}{\lambda m^2v^3}(\lambda + 2\lambda k\cos q - \cos\omega - k\cos q\cos\omega)$, d'où nous tirerons ces deux égalités :

$$\begin{aligned} 0 &= -a^2dq + \frac{(1+v)dq}{\lambda^3m^2} + \frac{\lambda nA}{m^2h}dq - \frac{nB}{2m^2h}dq \\ 0 &= +2a^2kdq\cos q - kdq\cos q - \frac{kdq\cos q}{\lambda^3m^2} + \frac{2\lambda nAk dq\cos q}{m^2h} \\ &\quad - \frac{nBkdq\cos q}{2m^2h} - \frac{\lambda nP^0kdq\cos q}{m^2h} + \frac{nQ^0kdq\cos q}{2m^2h}, \end{aligned}$$

& de-là nous obtiendrons :

$\omega = \frac{1+\nu}{\lambda^3 m^2} + \frac{\lambda n A}{m^2 h} - \frac{n B}{2 m^2 h}$, qui étant substituée dans l'autre, donne :

$$\frac{1+\nu}{\lambda^3 m^2} + \frac{4 \lambda n A}{m^2 h} - \frac{3 n B}{2 m^2 h} - 1 - \frac{\lambda n P^0}{m^2 h} + \frac{n Q^0}{2 m^2 h} = 0.$$

Par conséquent nous aurons :

$$\frac{1+\nu}{\lambda^3 m^2} = 1 - \frac{4 \lambda n A}{m^2 h} + \frac{3 n B}{2 m^2 h} + \frac{\lambda n P^0}{m^2 h} - \frac{n Q^0}{2 m^2 h} \&$$

$$\omega^2 = 1 - \frac{3 \lambda n A}{m^2 h} + \frac{n B}{m^2 h} + \frac{\lambda n P^0}{m^2 h} - \frac{n Q^0}{2 m^2 h}.$$

§. LIII. Mettant ces valeurs pour ω^2 & $\frac{1+\nu}{\lambda^3 m^2}$ (dans les plus petits termes , il suffira de mettre 1 à leur place ,) & développant de plus les termes contenus dans la formule $\frac{n a^3 d q}{\lambda m^2 v^3}$ ($\lambda + 2 \lambda k \cos. q - \cos. \omega - k \cos. q \cos. \omega$), nous parviendrons à cette équation :

$$0 = \frac{d d r}{d q} (1 - k \cos. q) + k d r \sin. q + r d q (1 - \frac{1}{2} k \cos. q) + 2 L d q \cos. \omega$$

$$\left. \begin{array}{l} - \frac{2 M}{2 L} \end{array} \right\} k d q \cos. (\omega + q) ; \quad \left. \begin{array}{l} - \frac{2 M}{1 - \frac{1}{2} m} \\ - \frac{2 L}{2 L} \end{array} \right\} k d q \cos. (\omega - q)$$

$$+ \frac{d q}{\lambda m m} \left(\cos. \omega + k \cos. q \cos. \omega \right) + \frac{d q}{h m m} \left\{ \begin{array}{l} \lambda B \cos. \omega - \lambda Q^0 k \cos. \omega \cos. q + 2 \lambda B k \cos. \omega \cos. q \\ - A \cos. \omega + P^0 k \cos. \omega \cos. q - A k \cos. \omega \cos. q \\ - \frac{1}{2} C \cos. \omega + \frac{1}{2} R^0 k \cos. \omega \cos. q - \frac{1}{2} C k \cos. \omega \cos. q \end{array} \right\}$$

Pour abréger davantage , & pour rendre cette équation plus simple , soient

$$L^0 = 2 L + \frac{\lambda B - A - \frac{1}{2} C}{h m m} + \frac{1}{\lambda m m}.$$

$$M^0 = 2 M + 2 L + \frac{\lambda Q^0 - P^0 - \frac{1}{2} R^0}{2 h m m} - \frac{2 \lambda B + A + \frac{1}{2} C}{2 h m m} - \frac{1}{2 \lambda m m}.$$

$$N^0 = \frac{2 M}{1 - 2 m} + 2 L + \frac{\lambda Q^0 - P^0 - \frac{1}{2} R^0}{2 h m m} - \frac{2 \lambda B + A + \frac{1}{2} C}{2 h m m} - \frac{1}{2 \lambda m m}.$$

& alors l'équation trouvée se changera en celle-ci :

$$0 = \frac{d d r}{d q} (1 - k \cos. q) + k d r \sin. q + r d q (1 - \frac{1}{2} k \cos. q) + L^0 d q \cos. \omega \\ = M^0 k d q \cos. (\omega + q) - N^0 k d q \cos. (\omega - q)$$

§. LIV.

§. LIV. Pour trouver l'intégrale de cette équation, la forme de r étant facile à deviner, supposons :

$$r = L' \cos. \omega + M' k \cos. (\omega + q) + N' k \cos. (\omega - q),$$

& à cause que $d\omega = \frac{dq}{m} (1 - m + (1 + m) k \cos. q)$, nous aurons :

$$\frac{dr}{dq} = -\frac{(1-m)}{m} L' \sin. \omega - \frac{(1+m)}{2m} L' k \sin. (\omega + q) - \frac{(1+m)}{2m} L' k \sin. (\omega - q)$$

$$- \frac{M'}{m} k \sin. (\omega + q) - \frac{(1-2m)}{m} N' k \sin. (\omega - q)$$

$$\& \frac{ddr}{dq^2} = -\frac{(1-m)^2}{m^2} L' \cos. \omega - \frac{(1-m)(1+m)}{2mm} L' k \cos. (\omega + q) - \frac{(1-m)(1+m)}{2mm} L' k \cos. (\omega - q)$$

$$- \frac{(1+m)}{2mm} L' k \cos. (\omega + q) - \frac{(1+m)(1-2m)}{2mm} L' k \cos. (\omega - q)$$

$$- \frac{1}{mm} M' k \cos. (\omega + q) - \frac{(1-2m)^2}{mm} N' k \cos. (\omega - q)$$

§. LV. Ces valeurs étant substituées dans l'équation, donneront :

$$0 = \left. \begin{array}{l} -\frac{(1-m)^2}{m^2} L' \\ + \frac{L'}{L^0} \end{array} \right\} \cos. \omega \left. \begin{array}{l} + \frac{(1-m)^2}{2m^2} L' \\ - \frac{(1-m)(1+m)}{2m^2} L' \\ - \frac{(1+m)}{2m^2} L' \\ - \frac{1}{m^2} M' \\ + \frac{(1-m)}{2m} L' \\ + \frac{M'}{2} \\ - \frac{L'}{M^0} \end{array} \right\} k \cos. (\omega + q) \left. \begin{array}{l} + \frac{(1-m)^2}{2m^2} L' \\ - \frac{(1-m)(1+m)}{2m^2} L' \\ - \frac{(1+m)(1-2m)}{2m^2} L' \\ - \frac{(1-2m)^2}{m^2} N' \\ - \frac{(1-m)}{2m} L' \\ + \frac{N'}{2} \\ - \frac{L'}{N^0} \end{array} \right\} k \cos. (\omega - q)$$

qui, en égalant chaque membre à part à zero, donnera :

$$L' = \frac{mm}{1-2m} L^0$$

$$M' = -\frac{mm}{1-mm} M^0 - \frac{(1+2m+4mm)}{2(1-mm)} L'$$

$$N' = \frac{-mm}{1-4m+3mm} N^0 - \frac{(1+2m)}{2(1-4m+3mm)} L'$$

Prix. 1748.

G

Ainsi la valeur de r sera connue, & sera :

$$r = L' \cos. \omega + M' k \cos. (\omega + q) + N' k \cos. (\omega - q),$$

ce qui donera la vraie distance de Saturne au Soleil,

$$z = f(1 + k \cos. q + nr),$$

où il faut remarquer que la lettre L' marque la même quantité que nous avons trouvée dans l'article précédent pour A' , de sorte qu'on doit encore ajouter ici les mêmes termes $B' \cos. 2 \omega + C' \cos. 3 \omega + D' \cos. 4 \omega + \&c.$ que je n'ai pas voulu chercher de nouveau. Car en général, on comprendra aisément, que cette nouvelle considération ne change point les inégalités déjà trouvées.

§. LVI. Ayant trouvé la valeur de r , on en tirera aisément celle de $\frac{dx}{dq}$, par le moyen de l'équation du §. LI. laquelle étant divisée par $1 + k \cos. q$, ou multipliée par $1 - k \cos. q$, donnera, en mettant pour r la valeur précédente,

$$\frac{dx}{dq} = \left. \begin{array}{l} -2 L' \\ -L \end{array} \right\} \cos. \omega \left. \begin{array}{l} -2 M' \\ +2 L' \\ +M \\ +\frac{1}{2} L \end{array} \right\} k \cos. (\omega + q) \left. \begin{array}{l} -2 N' \\ +2 L' \\ +M \\ +\frac{1}{2} L \end{array} \right\} k \cos. (\omega - q),$$

& puisque, suivant la même méthode dont je me suis servi §. L.

$$\int dq \cos. (\omega + q) = m \sin. (\omega + q).$$

$$\int dq \cos. (\omega - q) = \frac{m}{1 - 2m} \sin. (\omega - q).$$

$$\int dq \cos. \omega = \frac{m}{1 - m} \sin. \omega - \frac{m(1 + m)}{2(1 - m)} k \sin. (\omega + q) - \frac{m(1 + m)}{2(1 - m)(1 - 2m)} k \sin. (\omega - q),$$

la valeur intégrale sera :



$$\begin{aligned}
 x = & \frac{-m}{1-m} (2L' + L) \sin. \omega + \frac{m(1+m)}{2(1-m)} (2L' + L) \left. \begin{aligned} & + m(2L' - 2M' + M + \frac{1}{2}L) \end{aligned} \right\} k \sin. (\omega + q) \\
 & + \frac{m(1+m)}{2(1-m)(1-2m)} (2L' + L) \left. \begin{aligned} & + \frac{m}{1-2m} (2L' - 2N' + \frac{M}{1-2m} + \frac{1}{2}L) \end{aligned} \right\} k \sin. (\omega - q).
 \end{aligned}$$

& par conséquent on connoîtra la vraie longitude heliocentrique de Saturne, par la formule $\varphi = \alpha \int \frac{dq \sqrt{(1-kk)}}{1+k \cos q} + nx$, pourvu qu'on y ajoute les autres inégalités, que j'ai déjà trouvées dans l'article précédent.

§. LVII. Puisque $\frac{\sqrt{(1-kk)}}{1+k \cos q} = 1 - k \cos q + \frac{1}{2} k k \cos. 2q - \&c.$ on aura $\int \frac{dq \sqrt{(1-kk)}}{1+k \cos q} = q - k \sin. q + \frac{1}{4} k^2 \sin. 2q - \&c.$ & partant $\varphi = \alpha q - \alpha k \sin. q + \frac{1}{4} \alpha k^2 \sin. 2q - \&c. + nx$. Or, q étant l'anomalie excentrique, & l'anomalie moyenne p étant $= q + k \sin. q$, on aura $q = p - k \sin. q$, & par conséquent la longitude $\varphi = \alpha p - 2 \alpha k \sin. q + \frac{1}{4} \alpha k^2 \sin. 2q - \&c. + nx$: où chaque terme, excepté le premier, marque une inégalité du mouvement. Quant au premier α , il exprime la longitude moyenne: donc puisque α n'est pas exactement $= 1$, on voit que le mouvement moyen en longitude, est différent du mouvement de l'anomalie moyenne; de sorte que pendant une révolution entiere, l'anomalie moyenne n'est avancée que de $\frac{1}{\alpha}$, 360° : & par conséquent le lieu de l'aphélie sera avancé pendant le même tems de $(1 - \frac{1}{\alpha}) 360^\circ$. Or, puisque $\alpha = 1 - \frac{3 \lambda n A}{m^2 h} + \frac{n B}{m^2 h} + \frac{n}{m^2 h} (\lambda P^0 - \frac{1}{2} Q^0)$, on aura $\frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{n}{2 m^2 h} (3 \lambda A - B) - \frac{n}{2 m^2 h} (\lambda P^0 - \frac{1}{2} Q^0)$. Donc pendant une révolution entiere de Saturne, son aphé-

lie avancera d'un angle $= \frac{n}{m'h} (\wedge P^0 - \frac{1}{2} Q^0 - 3 \wedge A + B) 180^\circ$, dont je donnerai bien-tôt la quantité.

§. LVIII. Pour évaluer ces expressions en nombres, nous supposons l'excentricité de l'orbite de Saturne $k = 0,05700372$, d'après les Tables Astronomiques; & quoiqu'elle puisse avoir besoin de quelque correction, il n'en résultera aucun changement considérable dans les inégalités que je viens de trouver. Les valeurs des lettres A, B, C, D , &c. étant déjà données dans l'article précédent, celles des lettres nouvellement introduites seront :

$$\begin{aligned} P &= 13,216012; & P^0 &= 15,5662; & L &= -1,84937; & L^0 &= 1,09431; & L' &= 0,909616 \\ Q &= 23,790513; & Q^0 &= 26,4102; & M &= 0,36795; & M^0 &= -2,74013; & M' &= -0,80163 \\ R &= 18,949390; & R^0 &= 20,1064; & & & N^0 &= 0,29917; & N' &= 7,00984 \\ S &= 13,829410; \end{aligned}$$

De-là nous trouverons que l'aphélie de Saturne doit avancer, pendant une révolution entière de cette Planete, de $821'' = 13' 41''$, par rapport aux étoiles fixes. Et comme cela arrive en 29 ans & 5 mois, à peu près, le mouvement annuel de cette aphélie sera $= 28''$: donc par rapport aux équinoxes, l'aphélie de Saturne avancera de $1' 18''$ par an, ce qui s'accorde admirablement bien avec les Tables Astronomiques de M. Cassini; & ne differe de celles que Leadbetter a publiées que de $2''$. Ce qui marque déjà une grande harmonie entre la théorie & les observations, quoiqu'il n'y ait aucun doute que ce mouvement pourroit être ou un peu plus prompt, ou plus lent, sans qu'on l'eût pû appercevoir.

§. LIX. La valeur de la lettre r , d'où dépend la distance de Saturne au Soleil, fera :

$$r = 0,90962 \cos. u - 0,04569 \cos. (u + q) + 0,39959 \cos. (u - q).$$

Si l'on ajoute les autres membres qui contiennent $\cos. 2u$

cosf. 3^e &c. déjà trouvés, & qu'on multiplie la valeur de *r* par *n*, on trouvera enfin le vrai rapport de la distance de Saturne au Soleil *z*, à sa distance moyenne *f*:

$$\frac{z}{f} = 1 + 0,05700372 \cosf. q + 0,0008542 \cosf. \omega + 0,0001449 \cosf. 2\omega + 0,0000335 \cosf. 3\omega + \text{\&c.}$$

$$- 0,0000429 \cosf. (\omega + q) + 0,0003752 \cosf. (\omega - q).$$

Jusqu'ici la détermination de la distance *z* demande quatre équations ou corrections, dont la première est proportionnelle au cosinus de l'anomalie excentrique *q*, laquelle se trouve uniquement dans les Tables Astronomiques. La seconde dépend de la distance ω , que l'on a en soustrayant la longitude de Saturne de celle de Jupiter; & il est à remarquer que les parties *cosf. ω* , *cosf. 2 ω* , *cosf. 3 ω* , &c. peuvent être commodément comprises dans une seule Table. La troisième équation est proportionnelle au cosinus de l'angle $\omega + q$, que l'on aura, en ajoutant l'anomalie excentrique *q* à la distance ω ; & enfin la quatrième est proportionnelle au cosinus de l'angle $\omega - q$.

§. LX. Les mêmes valeurs que j'ai trouvées, donneront aussi celle de *x*, qui sera:

$$x = +0,02031 \sin. \omega + 0,06495 \sin. (\omega + q) - 1,32705 \sin. (\omega - q);$$

à laquelle il faut encore ajouter les termes trouvés dans l'article précédent, qui renferment *sin. 2 ω* , *sin. 3 ω* , &c. Alors on n'a qu'à multiplier cette expression de *x* par le nombre *n*, & l'ajouter à la longitude de Saturne, que donne la seule considération des loix de Kepler. Pour cet effet, soit *n* la longitude moyenne de Saturne, & *Y* son équation elliptique, ou la prosthaphérese, tirée des Tables Astronomiques, de sorte que $Y = -2 \omega k \sin. q + \frac{1}{4} \omega k^2 \sin. 2q$, &c. & alors on aura la longitude vraie de Saturne:

$$\phi = n + Y + 0,0000191 \sin. \omega - 0,0001523 \sin. 2\omega - 0,0000316 \sin. 3\omega$$

$$- 0,0000093 \sin. 4\omega + 0,0000611 \sin. (\omega + q) - 0,0012462 \sin. (\omega - q).$$

Ces expressions des sinus étant converties en angles réduits en minutes, secondes, donneront :

$$\varphi = \eta + Y + 4'' \cdot \sin. \omega - 32'' \sin. 2 \omega - 7'' \cdot \sin. 3 \omega - 2'' \sin. 4 \omega + 13'' \cdot \sin. (\omega + q) - 257'' \cdot \sin. (\omega - q).$$

§. LXI. La dernière équation $257'' \sin (\omega - q)$ est donc la plus considérable, vu qu'elle monte à $4' 17''$, quand l'angle $\omega - q$ est ou 90° , ou 270° . Au reste, il fera à propos de calculer cet effet de l'action de Jupiter dans les principales positions de Saturne: l'on voit d'abord que dans les conjonctions de Saturne & de Jupiter, quand $\omega = 0$, on aura :

$$\frac{z}{f} = 1,0010466 + 0,0573360 \cos. q; \quad \varphi = \eta + Y + 270'' \sin. q.$$

Dans les oppositions de Saturne & de Jupiter, quand $\omega = 180^\circ$, on aura :

$$\frac{z}{f} = 0,9992652 + 0,0566714 \cos. q; \quad \varphi = \eta + Y - 270'' \sin. q.$$

Donc dans les conjonctions, la plus grande équation de Saturne $Y = 6^\circ 32'$, paroîtra diminuée de $4' 30''$: mais dans les oppositions, elle paroîtra augmentée de $4' 30''$. Or, si dans l'une & l'autre position, Saturne se trouve dans son aphélie ou perihélie, alors l'inégalité qui vient de cette action de Jupiter, s'évanouïra tout-à-fait: ce qui se doit entendre seulement dans le cas où l'orbite de Jupiter est supposée circulaire; car son excentricité produit de nouvelles inégalités, que je vais rechercher dans l'article suivant.



V.

*Recherche des inégalités du Mouvement de
Saturne, qui viennent de l'excentricité
de l'orbite de Jupiter.*

§. LXII. **P**UISQUE la distance de Jupiter au Soleil est variable, à cause de son excentricité, son action sur Saturne doit être un peu différente de celle que nous avons employée pour conclure les inégalités précédentes; de sorte que cette circonstance demande quelque correction. Ayant donc supposé ci-dessus la distance de Jupiter au Soleil $= a$, soit maintenant a sa distance moyenne, & e son excentricité. Supposons de plus, que pour un certain tems proposé, sa longitude moyenne ou bien son anomalie moyenne soit $= \zeta$, sa longitude vraie $= \theta$, & son anomalie excentrique $= p$, sa distance vraie au Soleil $= r$, la théorie du mouvement des Planètes principales nous donnera $r = a(1 + e \cos. p)$, $\zeta = p + e \sin. p$, ou $d\zeta = dp(1 + e \cos. p)$, & $d\theta = \frac{dp \sqrt{1-e^2}}{1+e \cos. p}$.

Car on conviendra aisément, que dans cette recherche on pourra, sans craindre d'erreur, négliger les inégalités que l'action de Saturne cause réciproquement dans le mouvement de Jupiter; vû que celles-ci étant fort petites, l'effet qui en résulteroit sur Saturne, sera tout-à-fait insensible.

§. LXIII. Par la même raison, je pourrai ici faire abstraction de l'excentricité de l'orbite de Saturne, ayant déjà déterminé les inégalités qui en résultent, & qui ne

souffriront aucun changement sensible de l'excentricité de l'orbite de Jupiter. Je regarderai donc la valeur de k comme nulle dans cet article. Cela posé, supposant la distance moyenne de Saturne au Soleil $= f$, la distance vraie $z = f(1 + nr)$; la longitude moyenne $= \nu$, & la longitude vraie $= \varphi$, nous aurons, comme auparavant, $d\nu = m d\zeta$; $d\varphi = m d\zeta + n dx$; de sorte que $d\varphi = m dp(1 + e \cos.p) + n dx$, & $d\omega = d\theta - d\varphi$. Or dans les petits termes des équations que nous avons à résoudre, nous pourrions, sans erreur sensible, supposer $d\theta = dp(1 - e \cos.p)$. Donc $d\omega = dp(1 - m - (1 + m)e \cos.p)$; car le terme $n dx$ ne sera d'aucune conséquence dans les membres des équations, qui, par rapport aux autres, sont déjà comme infiniment petits.

§. LXIV. Cela remarqué, reprenons les équations fondamentales, que nous a fournies l'hypothese, que les deux orbites de Jupiter & de Saturne se trouvent dans le même plan.

$$\text{I. } dd\zeta - zd\varphi^2 + a^3 d\zeta^2 \left(\frac{1+\nu}{zz} + \frac{nz}{v^3} + \frac{n \cos.\omega}{yy} - \frac{ny \cos.\omega}{v^3} \right) = 0.$$

$$\text{II. } 2dx d\varphi + zd d\varphi + na^3 d\zeta^2 \sin.\omega \left(\frac{1}{yy} - \frac{y}{v^3} \right) = 0.$$

& mettant pour z & y les valeurs marquées, nous aurons:

$$\text{I. } nfd\zeta - f(1+nr)d\varphi^2 + a^3 d\zeta^2 \left(\frac{1+\nu}{ff(1+nr)^2} + \frac{nf}{v^3} + \frac{n \cos.\omega}{aa(1+e \cos.p)^2} - \frac{na(1+e \cos.p) \cos.\omega}{v^3} \right) = 0$$

$$\text{II. } 2nfd\zeta d\varphi + f(1+nr)dd\varphi + na^3 d\zeta^2 \sin.\omega \left(\frac{1}{aa(1+e \cos.p)^2} - \frac{1 - e \cos.p}{v^3} \right) = 0.$$

Or, parce que $d\varphi = m d\zeta + n dx$, & partant $dd\varphi = n ddx$, (à cause que $d\zeta$ est constant), si nous faisons, comme ci-dessus, $f = \lambda a$, ces équations se changeront en celles-ci :

$$\text{I. } n d d\zeta - m m d \zeta^2 - m^2 n r d \zeta^2 - 2 m n d \zeta d x + \frac{(1+\nu)(1-2nr)d\zeta^2}{\lambda^3} + \frac{na^3 d \zeta^2}{v^3} + \frac{n d \zeta^2 \cos.\omega (1-2e \cos.p)}{\lambda} - \frac{na^3 d \zeta^2 \cos.\omega (1+e \cos.p)}{\lambda v^3} = 0$$

II.

$$\text{II. } 2md\zeta dr + ddx + \frac{d\zeta^2 \sin. \omega (1-2e \cos. p)}{\lambda} - \frac{a^3 d\zeta^2 \sin. \omega (1+e \cos. p)}{\lambda v^3} = 0,$$

ayant divisé cette dernière équation par n , & négligé par-tout les termes qui renferment des puissances de e ou de n , vû que ces termes s'évanouissent auprès des autres.

§. LXV. Avant que de passer outre, nous chercherons à détruire l'effet de la supposition de $d\zeta$ constant, pour pouvoir supposer quelqu'autre différentielle constante.

$$\text{I. nd. } \frac{dr}{d\zeta} - mmd\zeta - m^2 nrd\zeta - 2mndx + \frac{(1+v)d\zeta}{\lambda^3} - \frac{2nr d\zeta}{\lambda^3} + \frac{na^3 d\zeta (\lambda - \cos. \omega - e \cos. \omega \cos. p)}{\lambda v^3} + \frac{na^3 d\zeta \cos. \omega (1-2e \cos. p)}{\lambda} = 0.$$

$$\text{II. d. } \frac{dx}{d\zeta} + 2mdr + \frac{d\zeta \sin. \omega (1-2e \cos. p)}{\lambda} - \frac{a^3 d\zeta \sin. \omega (1+e \cos. p)}{\lambda v^3} = 0.$$

Or, puisque $d\zeta = dp (1+e \cos. p)$, & que partant, en négligeant les termes qui renferment ee , $\frac{1}{d\zeta} = \frac{1-e \cos. p}{ap}$, ces équations prendront les formes suivantes :

$$\text{I. nd. } \frac{dr (1-e \cos. p)}{dp} - mmdp (1+e \cos. p) - m^2 nrdp (1+e \cos. p) + \frac{(1+v)dp (1+e \cos. p)}{\lambda^3} - \frac{2nr dp (1+e \cos. p)}{\lambda^3} + \frac{ndp \cos. \omega (1-e \cos. p)}{\lambda} - 2mndx + \frac{na^3 dp}{\lambda v^3} (\lambda + \lambda e \cos. p - \cos. \omega - 2e \cos. \omega \cos. p) = 0.$$

$$\text{II d. } \frac{dx (1-e \cos. p)}{dp} + 2mdr + \frac{dp \sin. \omega (1-e \cos. p)}{\lambda} - \frac{a^3 dp \sin. \omega (1+2e \cos. p)}{\lambda v^3} = c;$$

où il faut remarquer que $v = \sqrt{(aa + ff + 2aae \cos. p - 2af(1+e \cos. p) \cos. \omega)}$, & à cause de $f = \lambda a$, on aura $v = a\sqrt{(1 + \lambda\lambda - 2\lambda \cos. \omega + 2e \cos. p - 2\lambda e \cos. \omega \cos. p)}$.

LXVI. Supposons maintenant dp constant, & nous aurons ces équations :

$$\text{I. } \frac{n d d r (1 - e \cos p)}{d p} + n e d r \sin p - m m d p (1 + e \cos p) - m^2 n r d p (1 + e \cos p) \\ + \frac{(1 + v) d p (1 + e \cos p)}{\lambda^3} - \frac{2 n r d p (1 + e \cos p)}{\lambda^3} - 2 m n d x \\ + \frac{n d p \cos \omega (1 - e \cos p)}{\lambda} + \frac{n a^3 d p (\lambda - \cos \omega + \lambda e \cos p - 2 e \cos \omega \cos p)}{\lambda v^3} = 0.$$

$$\text{II. } \frac{d d x (1 - e \cos p)}{d p} + e d x \sin p + 2 m d x + \frac{d p \sin \omega (1 - e \cos p)}{\lambda} \\ - \frac{a^3 d p \sin \omega (1 + 2 e \cos p)}{\lambda v^3} = 0.$$

Et pour exprimer plus commodément la valeur de v ,
soit $\frac{2 \lambda}{1 + \lambda \lambda} = g$, & nous aurons $v = (1 + \lambda \lambda)^{\frac{1}{2}} a$
 $\sqrt{1 - g \cos \omega + g e \cos p (\frac{1}{\lambda} - \cos \omega)}$, & partant $\frac{a^3}{v^3}$
 $= \frac{1}{(1 + \lambda \lambda)^{\frac{3}{2}}} (1 - g \cos \omega + g e \cos p (\frac{1}{\lambda} - \cos \omega))^{-\frac{3}{2}}.$

Or, puisque $g e \cos p (\frac{1}{\lambda} - \cos \omega)$ est fort petit, par
rapport à $1 - g \cos \omega$, nous en tirerons d'abord cette ap-
proximation, en supposant $\lambda (1 + \lambda \lambda)^{\frac{1}{2}} = h$.

$$\frac{a^3}{\lambda v^3} = \frac{1}{h} (1 - g \cos \omega)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3 g e \cos p}{2 h} \left(\frac{1}{\lambda} - \cos \omega \right) (1 - g \cos \omega)^{-\frac{5}{2}}.$$

Soit, comme dans l'article précédent,

$$(1 - g \cos \omega)^{-\frac{3}{2}} = A + B \cos \omega + C \cos 2 \omega + D \cos 3 \omega + E \cos 4 \omega + \text{etc.}$$

$$(1 - g \cos \omega)^{-\frac{5}{2}} = P + Q \cos \omega + R \cos 2 \omega + S \cos 3 \omega + T \cos 4 \omega + \text{etc.}$$

& pour abréger, en multipliant cette dernière suite par
 $\frac{1}{\lambda} - \cos \omega$, supposons :

$$P^v = \frac{3 g}{2 \lambda} P - \frac{3}{4} g Q.$$

$$Q^v = \frac{3 g}{2 \lambda} Q - \frac{3}{2} g P - \frac{3}{4} g R.$$

$$R^v = \frac{3 g}{2 \lambda} R - \frac{3}{4} g Q - \frac{3}{4} g S.$$

$$S^v = \frac{3 g}{2 \lambda} S - \frac{3}{4} g R - \frac{3}{4} g T.$$

on aura :

$$\frac{a^3}{\lambda v^3} = \frac{1}{h} (A + B \cos. \omega + C \cos. 2 \omega + D \cos. 3 \omega + \text{etc.}) \\ - \frac{e \cos. p}{h} (P^v + Q^v \cos. \omega + R^v \cos. 2 \omega + S^v \cos. 3 \omega + \text{etc.})$$

§. LXVII. Substituons cette valeur dans la première équation, & égalons séparément à zero les termes constants, ou qui ne contiennent que dp nous trouverons par ce moyen :

$$-mm dp + \frac{(1+v) dp}{\lambda^3} + \frac{\lambda n A dp}{h} - \frac{n B dp}{2h} = 0,$$

ce qui donne, $\frac{1+v}{\lambda^3} = mm - \frac{\lambda n A}{h} + \frac{n B}{2h}.$

Cette valeur étant remise, & toute l'équation divisée par n , il en résultera :

$$\text{I. } \frac{d dr (1 - e \cos. p)}{dp} + e dr \sin. p - \frac{(2 \lambda A - B)}{2h} e dp \cos. p \\ - 3 m m r dp (1 + e \cos. p) - 2 m dx + \frac{dp \cos. \omega (1 - e \cos. p)}{\lambda} \\ + \frac{a^3 dp}{\lambda v^3} (\lambda - \cos. \omega + \lambda e \cos. p - 2 e \cos. \omega \cos. p) = 0,$$

omettant dans l'évolution de ce dernier membre les termes constants, la seconde équation se changera en celle-ci :

$$\text{II. } \frac{d dx (1 - e \cos. p)}{dp} + e dx \sin. p + 2 m dr + \frac{dp \sin. \omega (1 - e \cos. p)}{\lambda} \\ - \frac{a^3 dp \sin. \omega (1 + 2 e \cos. p)}{\lambda v^3} = 0,$$

dont l'intégrale est :

$$\frac{dx}{dp} (1 - e \cos. p) + 2 m r + \frac{1}{\lambda} \int dp (\sin. \omega - e \cos. p \sin. \omega) \\ - \int \frac{a^3 dp}{\lambda v^3} (\sin. \omega + 2 e \cos. p \sin. \omega) = 0.$$

§. LXVIII. Pour trouver les parties de ces intégrales qui peuvent être sensibles, il faut remarquer que les termes qui renfermeront l'angle $2 \omega - p$ deviendront si considérables, qu'il ne sera plus permis de les négliger, à cause du dénominateur $1 - 2 m$, qui, dans l'évolution,

H ij

affectera ces termes. Cette circonstance rend l'intégration de ces formules plus difficile que dans l'article précédent ; & remettant pour $\frac{a^3}{\lambda v^3}$ sa valeur, nous aurons :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dp} (1 - e \cos p) = & -2mr - \frac{1}{\lambda} \int dp \sin. \omega + \frac{e}{\lambda} \int dp \sin. \omega \cos p \\ & + \left. \begin{aligned} & + \frac{A}{h} \int dp \sin. \omega \\ & - \frac{C}{2h} \int dp \sin. \omega \end{aligned} \right\} + \left. \begin{aligned} & + \frac{B}{2h} \int dp \sin. 2\omega \\ & - \frac{D}{2h} \int dp \sin. 2\omega \end{aligned} \right\} \\ & + \left. \begin{aligned} & - \frac{eP^v}{h} \int dp \sin. \omega \cos p \\ & + \frac{eR^v}{2h} \int dp \sin. \omega \cos p \\ & + \frac{2eA}{h} \int dp \sin. \omega \cos p \\ & - \frac{eC}{h} \int dp \sin. \omega \cos p \end{aligned} \right\} + \left. \begin{aligned} & - \frac{eQ^v}{2h} \int dp \sin. 2\omega \cos p \\ & + \frac{eS^v}{2h} \int dp \sin. 2\omega \cos p \\ & + \frac{eB}{h} \int dp \sin. 2\omega \cos p \\ & - \frac{eD}{h} \int dp \sin. 2\omega \cos p \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Faisons, pour abrégier, $\frac{2A-C}{2h} - \frac{1}{\lambda} = A$; $\frac{B-D}{2h} = B$; $\frac{P^v - \frac{1}{2}R^v - 2A + C}{h} - \frac{1}{\lambda} = P$ & $\frac{\frac{1}{2}Q^v - \frac{1}{2}S^v - B + D}{h} = Q$; & puisque $\sin. \omega \cos p = \frac{1}{2} \sin. (\omega + p) + \frac{1}{2} \sin. (\omega - p)$; & $\sin. 2\omega \cos p = \frac{1}{2} \sin. (2\omega + p) + \frac{1}{2} \sin. (2\omega - p)$, nous aurons :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dp} (1 - e \cos p) = & -2mr + A \int dp \sin. \omega + B \int dp \sin. 2\omega \\ & - \frac{1}{2} e P \int dp \sin. (\omega + p) - \frac{1}{2} e Q \int dp \sin. (2\omega + p) \\ & - \frac{1}{2} e P \int dp \sin. (\omega - p) - \frac{1}{2} e Q \int dp \sin. (2\omega - p). \end{aligned}$$

S. LXIX. Ayant vû que $d\omega = (1 - m) dp - (1 + m) e dp \cos p$, nous en conclurons que $dp = \frac{d\omega}{1 - m} + \frac{(1 + m) e dp \cos p}{1 - m}$, & cette valeur étant mise pour dp , nous en tirerons les intégrales suivantes :

$$\int dp \sin. \omega = \frac{-1}{1 - m} \cos. \omega + \frac{(1 + m) e}{2(1 - m)} \int dp \sin. (\omega + p) + \frac{(1 + m) e}{2(1 - m)} \int dp \sin. (\omega - p).$$

$$\int dp \sin. 2\omega = \frac{-1}{2(1 - m)} \cos. 2\omega + \frac{(1 + m) e}{2(1 - m)} \int dp \sin. (2\omega + p) + \frac{(1 + m) e}{2(1 - m)} \int dp \sin. (2\omega - p).$$

Or, comme il suffit de prendre ces dernières intégrales à peu près, nous trouverons, en supposant $d\omega = (1 - m) dp$,

& en négligeant les termes qui renferment ee :

$$\int dp \sin.(\omega+p) = \frac{-1}{2-m} \cos.(\omega+p); \quad \int dp \sin.(2\omega+p) = \frac{-1}{3-2m} \cos.(2\omega+p);$$

$$\int dp \sin.(\omega-p) = + \frac{1}{m} \cos.(\omega-p); \quad \int dp \sin.(2\omega-p) = \frac{-1}{1-2m} \cos.(2\omega-p);$$

& ces valeurs étant substituées dans les formules précédentes, donneront :

$$\int dp \sin. \omega = \frac{-1}{1-m} \cos. \omega - \frac{(1+m)e}{2(1-m)(2-m)} \cos.(\omega+p) + \frac{(1+m)e}{2m(1-m)} \cos.(\omega-p).$$

$$\int dp \sin. 2\omega = - \frac{1}{2(1-m)} \cos. 2\omega - \frac{(1+m)e}{2(1-m)(3-2m)} \cos.(2\omega+p) - \frac{(1+m)e}{2(1-m)(1-2m)} \cos.(2\omega-p)$$

§. LXX. De-là l'équation intégrale trouvée §. LXVIII. fera :

$$\begin{aligned} \frac{dx(1-e \cos.p)}{dp} = & -2mr - \frac{A}{1-m} \cos. \omega - \frac{B}{2(1-m)} \cos. 2\omega + \left. \begin{aligned} & \frac{-(1+m)Ae}{2(1-m)(2-m)} \\ & + \frac{Pe}{2(2-m)} \end{aligned} \right\} \cos.(\omega+p) \\ & + \left. \begin{aligned} & \frac{(1+m)Ae}{2m(1-m)} \\ & - \frac{Pe}{2m} \end{aligned} \right\} \cos.(\omega-p) \\ & - \left. \begin{aligned} & \frac{(1+m)Be}{2(1-m)(3-2m)} \\ & + \frac{Qe}{2(3-2m)} \end{aligned} \right\} \cos.(2\omega-p) \\ & + \left. \begin{aligned} & \frac{-(1+m)Be}{2(1-m)(1-2m)} \\ & + \frac{Qe}{2(1-2m)} \end{aligned} \right\} \cos.(2\omega-p) \end{aligned}$$

faisons, pour abrégér :

$$\frac{A}{1-m} = A'; \quad \frac{B}{2(1-m)} = B'; \quad \frac{P}{2} - \frac{(1+m)A}{2(1-m)} = P' \text{ \& } \frac{Q}{2} - \frac{(1+m)B}{2(1-m)} = Q', \text{ pour avoir}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx(1-e \cos.p)}{dp} = & -2mr - A' \cos. \omega + \frac{P'e}{2-m} \cos.(\omega+p) + \frac{Q'e}{3-2m} \cos.(2\omega+p) \\ & - B' \cos. 2\omega - \frac{P'e}{m} \cos.(\omega-p) + \frac{Q'e}{1-2m} \cos.(2\omega-p). \end{aligned}$$

Divisons ensuite par $1-e \cos.p$, ou, ce qui revient au même, multiplions par $1+e \cos.p$, & nous aurons :

$$\frac{dx}{dp} = -2mr - 2mer \cos p - A' \cos \omega \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} A' \\ + \frac{P'}{2-m} \end{array} \right\} e \cos(\omega+p) \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} A' \\ - \frac{P'}{m} \end{array} \right\} e \cos(\omega-p) \\ - \frac{1}{2} B' \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} B' \\ + \frac{Q'}{3-2m} \end{array} \right\} e \cos(2\omega+p) \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} B' \\ + \frac{Q'}{1-2m} \end{array} \right\} e \cos(2\omega-p) \\ - B' \cos 2\omega$$

§. LXXI. Substituons à présent cette valeur dans la première équation ; pour réussir plus aisément, multiplions auparavant par $1 - e \cos p$, & réduisant tous les produits des cosinus aux cosinus simples, comme on a fait ci-dessus, nous trouverons cette équation :

$$\begin{aligned} &= \frac{d dr (1 - 2e \cos p)}{dp^2} + \frac{e dr \sin p}{dp} + mmr \\ &+ \cos \omega \left(2m A' + \frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda B}{h} - \frac{A}{h} - \frac{C}{2h} \right) \\ &+ \cos 2\omega \left(2m B' + \frac{\lambda C}{h} - \frac{B}{2h} - \frac{D}{2h} \right) \\ &+ e \cos p \left(\frac{-\lambda A}{h} + \frac{B}{2h} - \frac{\lambda P^v}{h} + \frac{Q^v}{2h} - \frac{B}{2h} \right) \\ &+ e \cos(\omega+p) \left(\frac{-2m P'}{2-m} - \frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda Q^v}{2h} + \frac{P^v}{2h} - \frac{A}{2h} + \frac{R^v}{4h} - \frac{C}{4h} \right) \\ &+ e \cos(\omega-p) \left(2 P' - \frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda Q^v}{2h} + \frac{P^v}{2h} - \frac{A}{2h} + \frac{R^v}{4h} - \frac{C}{4h} \right) \\ &+ e \cos(2\omega+p) \left(\frac{-2m Q'}{3-2m} - \frac{\lambda R^v}{2h} + \frac{Q^v}{4h} - \frac{B}{4h} + \frac{S^v}{4h} - \frac{D}{4h} \right) \\ &+ e \cos(2\omega-p) \left(\frac{-2m Q'}{1-2m} - \frac{\lambda R^v}{2h} + \frac{Q^v}{4h} - \frac{B}{4h} + \frac{S^v}{4h} - \frac{D}{4h} \right) \end{aligned}$$

Soit encore fait, pour abréger :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda B - A - \frac{1}{2} C}{h} + \frac{1}{\lambda} &= B'; \quad \frac{\lambda C - \frac{1}{2} B - \frac{1}{2} D}{h} = C'; \quad \frac{\lambda A + \lambda P^v - \frac{1}{2} Q^v}{h} = M'; \\ \frac{\lambda Q^v - P^v - \frac{1}{2} R^v + A + \frac{1}{2} C}{2h} + \frac{1}{\lambda} &= Q'; \quad \frac{\lambda R^v - \frac{1}{2} Q^v - \frac{1}{2} S^v + \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} D}{2h} = R' \end{aligned}$$

& nous aurons à résoudre l'équation qui suit :

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{ddr(1-2e\cos p)}{dp^2} + \frac{edr\sin p}{dp} + mnr - M'e\cos p + (2m A' + B')\cos \omega \\ & + (2m B' + C')\cos 2\omega - \left(\frac{2mP'}{2-m} + Q'\right)e\cos(\omega+p) \\ & - \left(-2P' + Q'\right)e\cos(\omega-p) - \left(\frac{2mQ'}{3-2m} + R'\right)e\cos(2\omega+p) \\ & - \left(\frac{2mQ'}{1-2m} + R'\right)e\cos(2\omega-p). \end{aligned}$$

Or, quoiqu'on puisse intégrer cette équation absolument, vû que r ne s'y trouve que d'une dimension, il vaudra mieux, pour l'usage de l'Astronomie, se servir de l'approximation suivante.

§. LXXIII. Supposons donc, pour trouver la valeur de r :

$$\begin{aligned} r = & M''e\cos p + B''\cos \omega + C''\cos 2\omega + Q''e\cos(\omega+p) + R''e\cos(2\omega+p) \\ & + Q''e\cos(\omega-p) + R''e\cos(2\omega-p) \end{aligned}$$

à cause que $d\omega = (1-m)dp - (1+m)e dp \cos p$, on aura, en prenant les différentielles :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dp} = & -M'' - (1-m)B'' - 2(1-m)C'' + \frac{1}{2}(1+m)B'' + \frac{1}{2}(1+m)B'' + (1+m)C'' + (1+m)C'' \\ & - (2-m)Q'' + mQ'' - (3-2m)R'' - (1-2m)R'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{ddr}{dp^2} = & -M'' - (1-m)^2 B'' - 4(1-m)^2 C'' + \frac{1}{2}(1-m)(1+m)B'' \\ & + \frac{1}{2}(1+m)(2-m)B'' \\ & - (2-m)(2-m)Q'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{2}(1-m)(1+m)B'' + 2(1-m)(1+m)C'' + 2(1-m)(1+m)C'' \\ & - \frac{1}{2}m(1+m)B'' + (1+m)(3-2m)C'' + (1+m)(1-2m)C'' \\ & - mmQ'' - (3-2m)(3-2m)R'' - (1-2m)(1-2m)R'' \end{aligned}$$

Ces valeurs étant substituées dans l'équation, nous trouverons les termes suivans à égalier séparément à zero :

$e \cos. p$	$\cos. \omega$	$\cos. 2 \omega$	$e \cos. (\omega + p)$	$e \cos. (\omega - p)$
$-M''$	$-(1-m)^2 B''$	$-4(1-m)^2 C''$	$+\frac{1}{2}(1+m)(3-2m)B''$	$+\frac{1}{2}(1+m)(1-2m)B''$
			$-(2-m)^2 Q''$	$-mm Q''$
			$+(1-m)^2 B''$	$+(1-m)^2 B''$
			$+\frac{1}{2}(1-m)B'$	$-\frac{1}{2}(1-m)B''$
$+m^2 M''$	$+m^2 B''$	$+m^2 C''$	$+m^2 Q''$	$+m^2 Q''$
$-M'$	$+2mA'$	$+2mB'$	$-\frac{2m}{2-m}P'$	$+2P'$
	$+B'$	$+C'$	$-Q'$	$-Q''$

$e \cos. (2\omega + p)$	$e \cos. (2\omega - p)$
$+(1+m)(5-4m)C''$	$+(1+m)(3-4m)C''$
$-(3-2m)^2 R''$	$-(1-2m)^2 R''$
$+4(1-m)^2 C''$	$+4(1-m)^2 C''$
$+(1-m)C''$	$-(1-m)C''$
$+m^2 R''$	$+m^2 R''$
$-\frac{2m}{3-2m}Q'$	$-\frac{2m}{1-2m}Q'$
$-R'$	$-R'$

§. LXXIV. Faisant évanouir chaque terme à part , nous trouverons :

$$M'' = \frac{-M'}{1-mm} ; \quad B'' = \frac{2mA+B'}{(1-m)^2-m^2} ; \quad C'' = \frac{2mB'+C'}{4(1-m)^2-m^2}$$

$$Q'' = \frac{(3-2m)B'' - \frac{2m}{2-m}P' - Q'}{(2-m)^2-m^2} ; \quad Q'' = \frac{(1-2m)B'' + 2P' - Q'}{m^2-m^2}$$

$$R'' = \frac{2(5-4m)C'' - \frac{2m}{3-2m}Q' - R'}{(3-2m)^2-m^2} ; \quad R'' = \frac{2(3-4m)C'' - \frac{2m}{1-2m}Q' - R'}{(1-2m)^2-m^2}$$

Or, le coefficient Q'' devenant infini, c'est une marque qu'outre les termes supposés, il entre dans la valeur de r un nouveau terme, qui renferme un angle absolu ; & il n'est pas difficile de voir

voir que ce terme aura cette forme : $p \sin. (\omega - p)$. Ajoutons donc à l'expression supposée pour r , encore ce terme : $+ T'' e p \sin. (\omega - p)$, & il en résultera, dans la valeur de $\frac{dr}{dp}$, cette quantité : $+ T'' e \sin. (\omega - p) - m T'' e p \cos. (\omega - p)$; & dans $\frac{ddr}{dp^2}$, on aura, outre l'expression précédente, la quantité $- 2 m T'' e \cos. (\omega - p) - m^2 T'' e p \sin. (\omega - p)$. Ainsi il faudra ajouter à la colonne $e \cos. (\omega - p)$, le terme $- 2 m T''$, & puisque les Q'' se détruisent, nous tirerons de cette colonne $T'' = \frac{(1-2m)B'' + 2P' - Q'}{2m}$, & la lettre Q'' n'entrera plus en considération, de sorte qu'elle sera ou $= 0$, ou indéterminée.

§. LXXV. Si donc ce terme $T'' e p \sin. (\omega - p)$ entre dans l'expression de r , l'inégalité qui en résulte, croîtra à chaque révolution, puisqu'après chacune de ces révolutions, la valeur de p est augmentée de 360 degrés : & quelque petite que soit la valeur de $T'' e$, il doit, avec le tems, absolument arriver, que la valeur de cette inégalité surpasse toute quantité donnée : & comme elle est tantôt à ajouter à la distance de Saturne au Soleil, tantôt à en soustraire, il pourroit arriver que dans une même période, Saturne s'approchât du Soleil; & s'en éloignât ensuite à une distance incomparablement plus grande que celle dont il s'en écarte à présent. Cependant, on voit bien que dès qu'un tel dérangement deviendroit considérable, l'approximation dont je me suis servi jusqu'ici ne seroit plus d'aucun usage, & je crois presque que la détermination d'un tel mouvement surpasseroit les bornes de notre entendement. Mais il faut aussi considérer que le dérangement du mouvement de Jupiter, causé par l'action de Saturne, pourroit apporter un changement

fort considérable dans la détermination de la lettre Q'' . Car si l'aphélie de Jupiter n'est pas en repos, comme je l'ai supposé, & que son mouvement moyen ne soit pas exactement égal au mouvement de son anomalie, le dénominateur de Q'' ne s'évanouira plus. Pour rendre ceci plus clair, soit fait $d\zeta = i dp$, i surpassant un peu l'unité, à cause du mouvement de l'aphélie, au lieu du dénominateur $m^2 - m^2$, on trouvera $(i - 1 - m)^2 - m^2$, dont la valeur fera à peu près $= \frac{-m}{43200}$. Mais ce dénominateur étant si petit, & le numérateur seulement vrai à peu près, on devra regarder la valeur de Q'' comme inconnue. Au reste, il est à remarquer que cette petite différence de i ne sçauroit causer aucun changement sensible dans les valeurs des autres lettres.

LXXVI. C'est ici sans doute qu'il faut chercher la cause principale des dérangemens dans le mouvement de Saturne; & comme les observations nous montrent assez clairement, que dans diverses périodes de Saturne, les différences entre son lieu vrai & son lieu moyen ne sont pas les mêmes, quoiqu'il se trouve à la même anomalie & au même aspect avec Jupiter; il en faut conclure, que les inégalités ne reviennent pas les mêmes dans chaque période, mais qu'elles vont en croissant: & je ne doute presque pas, que cette circonstance ne soit la véritable cause de la dissension des Astronomes, sur le tems périodique de Saturne, selon les divers points de son orbite, qu'ils ont eus en vûe en cherchant le tems que cette planete met à y retourner. Il me paroît donc très-probable, que le terme $T'' e p \sin. (\omega - p)$ entre dans l'expression de la valeur de r , quoique le mouvement de Jupiter soit lui-même troublé par l'action de Saturne, & que peut-être, nonobstant cela, le terme $Q'' e \cos. (\omega - p)$ y entre aussi, & l'on auroit en ce cas:

$$s = +M''e \cos p + B''e \cos \omega + Q''e \cos(\omega + p) + R''e \cos(2\omega + p) + T''e p \sin(\omega - p) \\ + C''e \cos 2\omega + Q''e \cos(\omega - p) + R''e \cos(2\omega - p).$$

Cependant, comme les valeurs des lettres Q'' & T'' dépendent du dérangement de Jupiter, cette recherche est trop délicate pour que j'ose me hasarder de les déterminer par la voie d'approximation; & il sera plus sûr de les regarder comme indéterminées, jusqu'à ce qu'on trouve moyen de les assigner par les observations.

§. LXXVII. Ayant trouvé la valeur de r , nous en tirerons celle de dx , qui sera :

$$\frac{dx}{dp} = -2m M''e \cos p - 2m B''e \cos \omega - 2m C''e \cos 2\omega - 2m Q''e \cos(\omega + p) \\ - A' - B' - m B''e \\ - \frac{1}{2} A'e \\ + \frac{P'e}{2-m} \\ - 2m Q''e \cos(\omega - p) - 2m R''e \cos(2\omega + p) - 2m R''e \cos(2\omega - p) - 2m T''e p \sin(\omega - p) \\ - m B''e - m C''e - m C''e \\ - \frac{1}{2} A'e - \frac{1}{2} B'e - \frac{1}{2} B'e \\ - \frac{P'e}{m} + \frac{Q'e}{3-2m} + \frac{Q'e}{1-2m}.$$

Et les intégrales de ces termes seront :

$$\int dp \cos p = \sin p \\ \int dp \cos \omega = \frac{1}{1-m} \sin \omega + \frac{(1+m)e}{2(1-m)(2-m)} \sin(\omega + p) - \frac{(1+m)e}{2m(1-m)} \sin(\omega - p) \\ \int dp \cos 2\omega = \frac{1}{2(1-m)} \sin 2\omega + \frac{(1+m)e}{2(1-m)(3-2m)} \sin(2\omega + p) + \frac{(1+m)e}{2(1-m)(1-2m)} \sin(2\omega - p) \\ \int dp \cos(\omega + p) = \frac{1}{2-m} \sin(\omega + p); \quad \int dp \cos(\omega - p) = \frac{1}{m} \sin(\omega - p) \\ \int dp \cos(2\omega + p) = \frac{1}{3-2m} \sin(2\omega + p); \quad \int dp \cos(2\omega - p) = \frac{1}{1-2m} \sin(2\omega - p) \\ \int p dp \sin(\omega - p) = \frac{p}{m} \cos(\omega - p) + \frac{1}{m^2} \sin(\omega - p),$$

rejetant les termes, qui, dans l'équation, seroient multi-

68 RECHERCHES DES INEGALITE'S
pliés par $e e$, ou par de plus hautes puissances de e .

§. LXXVIII. Ces formules nous fourniront la valeur
suivante de x :

$$e^p \sin p; \sin \omega; \sin 2\omega; e \sin(\omega+p); e \sin(\omega-p); e \sin(2\omega+p); e \sin(2\omega-p); e p \cos(\omega-p)$$

$$\begin{aligned} x = & -2mM'' - \frac{2mB''}{1-m} - \frac{2mC''}{2(1-m)} - \frac{2m(1+m)B''}{2(1-m)(2-m)} + \frac{(1+m)B''}{1-m} - \frac{2m(1+m)C''}{2(1-m)(3-2m)} - \frac{2m(1+m)C''}{2(1-m)(1-2m)} - 2T'' \\ & - \frac{A'}{1-m} - \frac{B'}{2(1-m)} - \frac{(1+m)A'}{2(1-m)(2-m)} + \frac{(1+m)A'}{2m(1-m)} - \frac{(1+m)B'}{2(1-m)(3-2m)} - \frac{(1+m)B'}{2(1-m)(1-2m)} \\ & - \frac{2mQ''}{2-m} + \frac{2Q''}{B''} - \frac{2mR''}{3-2m} - \frac{2mR''}{1-2m} \\ & - \frac{mB''}{2-m} + \frac{A'}{2m} - \frac{mC''}{3-2m} - \frac{mC''}{1-2m} \\ & - \frac{A'}{2(2-m)} + \frac{P'}{m^2} - \frac{B'}{2(3-2m)} - \frac{B'}{2(1-2m)} \\ & + \frac{P'}{(2-m)^2} - \frac{2T''}{m} + \frac{Q'}{(3-2m)^2} + \frac{Q'}{(1-2m)^2} \end{aligned}$$

Pour rendre cette expression plus simple, soit fait :

$$\begin{aligned} 2mB'' + A' &= b; \quad 2mC'' + B' = c; \quad \& \text{puisque } \frac{(1+m)b}{2(1-m)} \\ + \frac{b}{2} &= \frac{b}{1-m}; \quad \frac{(1+m)c}{2(1-m)} + \frac{c}{2} = \frac{c}{1-m}, \text{ soit } \frac{b}{1-m} \\ &= B'' \quad \& \quad \frac{c}{1-m} = C'', \quad \& \text{on aura :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = & -2mM'' e \sin p - B'' \sin \omega - \frac{1}{2} C'' \sin 2\omega - \frac{1}{2-m} \left(B'' + 2mQ'' - \frac{1}{2-m} P' \right) e \sin(\omega+p) - 2T'' e p \cos(\omega-p) \\ & + \frac{1}{m} \left(B'' + 2mQ'' + \frac{1}{m} P' - 2T'' \right) e \sin(\omega-p) \\ & - \frac{1}{3-2m} \left(C'' + 2mR'' - \frac{1}{3-2m} Q' \right) e \sin(2\omega+p) \\ & - \frac{1}{1-2m} \left(C'' + 2mR'' - \frac{1}{1-2m} Q' \right) e \sin(2\omega-p) \end{aligned}$$

Or, puisque les coefficients des termes $\cos \omega$, $\cos 2\omega$ &
 $\sin \omega$, $\sin 2\omega$ sont les mêmes que ceux que nous avons

trouvés plus haut, nous aurons en nombres :

$$\begin{aligned} B'' &= 0,90962; & B'' &= -0,02031 & \& e &= 0,048219. \\ C'' &= 0,15431; & C'' &= 0,32430 \end{aligned}$$

§. LXXIX. De-là les valeurs des autres lettres seront trouvées en nombres :

$$\begin{aligned} A &= 3,21789; B = 4,70357; C = 3,07731; D = 1,92413; E = 1,18601 \\ P &= 13,21601; Q = 23,79051; R = 18,94939; S = 13,82941; T = 2,96700 \\ P^v &= -5,9133; Q^v = -12,2555; R^v = -10,6902; S^v = -8,7228; \\ A &= -0,44477; B = 0,08309; P = -0,77993; Q = -0,27178; P' = 0,13207; Q' = -0,23341; \\ M &= 0,30991; Q' = 0,35190; R' = -0,17356; M' = -0,36984; Q'' = 0,66032; Q'' \text{ indéterminé} \\ R'' &= 0,28038; R'' = 12,63013; \& T'' = 0,11124, \text{ ou plutôt inconnue.} \end{aligned}$$

Évaluant maintenant les expressions trouvées en nombres, nous trouverons, outre les termes que les considérations précédentes nous ont déjà fournis :

$$\begin{aligned} r &= -0,01783 \cos. p + 0,03184 \cos. (\omega + p) + 0,01352 \cos. (2\omega + p) + 0,005364 p \sin. (\omega - p) \\ &\quad - \dots \cos. (\omega - p) + 0,60901 \cos. (2\omega - p), \end{aligned}$$

& à cause de $z = f(1 + nr)$, nous aurons :

$$\begin{aligned} \frac{z}{f} &= \text{précéd.} - 0,0000168 \cos. p + 0,0000300 \cos. (\omega + p) \\ &\quad - \dots \cos. (\omega - p) \\ &\quad + 0,0000127 \cos. (2\omega + p) + 0,0000050 p \sin. (\omega - p) \\ &\quad + 0,0005719 \cos. (2\omega - p) \end{aligned}$$

où il faut se souvenir que le dernier terme est peu exact.

§. LXXX. Les mêmes valeurs numériques nous donneront :

$$\begin{aligned} x &= +0,01436 \sin. p - 0,01294 \sin. (\omega + p) - 0,01442 \sin. (2\omega + p) - 0,010728 p \cos. (\omega - p) \\ &\quad - \dots \sin. (\omega - p) - 1,25258 \sin. (2\omega - p). \end{aligned}$$

Cette expression multipliée par n , étant ajoutée aux termes trouvés ci-dessus, donnera la longitude vraie de Saturne :

$$\begin{aligned}\varphi &= \text{précéd.} + 0,0000135 \sin. p - 0,0000122 \sin. (\omega + p) \\ &\quad - \dots \sin. (\omega - p) \\ &= 0,0000135 \sin. (2\omega + p) - 0,0000100 p \cos. (\omega - p) \\ &= 0,0011762 \sin. (2\omega - p); \end{aligned}$$

ou, réduisant cette expression en secondes :

$$\begin{aligned}\varphi &= \text{précéd.} + 3'' \sin. p - 3'' \sin. (\omega + p) - 3'' \sin. (2\omega + p) - \frac{1}{100000} p \cos. (\omega - p) \\ &\quad - \dots \sin. (\omega - p) - 243'' \sin. (2\omega - p); \end{aligned}$$

où le dernier terme (puisque p est un angle) s'exprimera aisément en minutes, secondes, pourvu qu'on remarque que son coëfficient puisse être fort différent de $\frac{1}{100000}$.

§. LXXXI. Rassemblant tout ce que je viens de trouver, tant dans cet article que dans les précédens, on aura, faisant l'anomalie excentrique de Jupiter $= p$, celle de Saturne $= q$; & la distance de Saturne & de Jupiter $= \omega$, que l'on trouve en ôtant la longitude de Saturne de celle de Jupiter: nous aurons premierement la distance de Saturne au Soleil :

$$\begin{aligned}\frac{x}{f} &= 1 + 0,05700372 \cos. q + 0,0008542 \cos. \omega - 0,0000429 \cos. (\omega + q) + 0,0000050 p \sin. (\omega - p) \\ &= 0,0000168 \cos. p + 0,0001449 \cos. 2\omega + 0,0003752 \cos. (\omega - q) \\ &\quad + 0,0000335 \cos. 3\omega + 0,0000300 \cos. (\omega + p) \\ &\quad - \dots \cos. (\omega - p) \\ &\quad + 0,0000127 \cos. (2\omega + p) \\ &\quad + 0,0005719 \cos. (2\omega - p) \end{aligned}$$

Faisant ensuite la longitude moyenne de Saturne $= \eta$, son équation elliptique, ou celle qui est la seule qu'on trouve dans les Tables Astronomiques $= Y$, la longitude vraie de Saturne sera :

$$\begin{aligned}\varphi &= \eta \pm Y + 3'' \sin. p + 4'' \sin. \omega + 13'' \sin. (\omega + q) \\ &\quad - 32'' \sin. 2\omega - 257'' \sin. (\omega - q) \\ &\quad - 7'' \sin. 3\omega \\ &\quad - 2'' \sin. 4\omega \\ &= 3'' \sin. (\omega + p) - 3'' \sin. (2\omega + p) - \frac{1}{100000} p \cos. (\omega - p) \\ &\quad - \dots \sin. (\omega - p) - 243'' \sin. (2\omega - p). \end{aligned}$$

Dans laquelle il faut remarquer que l'équation elliptique Y dépend de l'anomalie excentrique q , en sorte que $Y = -2k \sin. q + \frac{1}{4}kk \sin. 2q$; ou en minutes, secondes :

$$Y = -23515'' \sin. q + 167'' \sin. 2q.$$

Quant à l'anomalie excentrique q , elle se tire de l'anomalie moyenne; & on l'aura assez exactement pour l'usage présent, si l'on prend le milieu arithmétique entre l'anomalie moyenne & l'anomalie vraie; ou si l'on applique à l'anomalie moyenne, la moitié de l'équation elliptique, que les Tables Astronomiques donnent.



V I.

*Recherches du Mouvement des Nœuds, &
de la variation de l'inclinaison de
l'orbite de Saturne.*

§. LXXXII. **J**USQU'ICI j'ai supposé l'orbite de Saturne dans le même plan que celle de Jupiter, & dans cette hypothèse, les inégalités trouvées dans le mouvement de Saturne, ne regardent que sa longitude & sa distance au Soleil. Or, l'inclinaison de l'orbite de Saturne sur celle de Jupiter est si petite, que le changement qui en pourroit résulter sur les inégalités déjà trouvées, ne mérite aucune attention. Car pour le commencement de l'année 1748, les Tables Astronomiques marquent la longitude du nœud de Jupiter sur l'écliptique de $3^{\circ} 8' 14'' 0''$, la longitude du nœud de Saturne, de $3^{\circ} 21' 19' 30''$; l'inclinaison de l'orbite de Jupiter sur l'écliptique, est marquée $1^{\circ} 19' 10''$, & celle de Saturne $= 2^{\circ} 30' 10''$; d'où je conclus que l'inclinaison de l'orbite de Saturne sur celle de Jupiter est de $1^{\circ} 15' 20''$, & que cette intersection tombe au tems indiqué sur l'orbite de Jupiter, à $4^{\circ} 5' 4' 0''$ constant depuis le commencement d'Aries. Or, cette inclinaison de $1^{\circ} 15' 20''$ étant si petite, on m'accordera aisément que les expressions précédentes n'ont besoin d'aucune correction de cette part. Par conséquent, ayant déjà les véritables valeurs des quantités $\frac{z}{f}$ & de φ , il ne reste qu'à déterminer le mouvement qui se peut trouver dans la ligne des nœuds, & la variation à laquelle l'inclinaison même peut être assujettie.

§. LXXXIII.

§. LXXXIII. Pour cet effet, ayant fait la longitude moyenne de Jupiter $= \zeta$, sa longitude vraie $= \theta$, sa distance moyenne $= a$, & sa distance vraie $= y$; ensuite la longitude vraie de Saturne $= \varphi$, sa distance moyenne au Soleil $= f$, & sa distance vraie $= z$, & de plus, la distance entre Jupiter & Saturne $\theta - \varphi = \omega$, la longitude du nœud ascendant de Saturne sur l'orbite de Jupiter $= \pi$, & l'inclinaison mutuelle de ces deux orbites $= \psi$, & pour abrégér $v = \sqrt{\left(\frac{zz}{\cos. \psi^2} + yy - 2yz \cos. \omega \right)}$; dans laquelle, à cause que ψ est la latitude de Saturne, qui ne surpasse jamais $1^\circ 15' 20''$, on pourra, sans balancer, mettre 1 pour $\cos. \psi$, ce qui réduira cette expression à $v = \sqrt{(zz + yy - 2yz \cos. \omega)}$. On aura, par le §. xx, pour la recherche présente, les deux équations qui suivent :

$$\text{I. } d\pi = \frac{na^3 d\zeta^2 \sin.(\varphi - \pi) \sin.(\theta - \pi)}{z d\varphi} \left(\frac{1}{yy} - \frac{y}{v^3} \right).$$

$$\text{II. } d \text{ tang. } \varphi = \frac{na^3 d\zeta^2 \cos.(\varphi - \pi) \sin.(\theta - \pi)}{z d\varphi} \left(\frac{1}{yy} - \frac{y}{v^3} \right).$$

§. LXXXIV. Comme il est aisé de prévoir que les inégalités qui seront renfermées dans ces équations doivent être extrêmement petites, on conviendra aisément que les excentricités de l'une & de l'autre orbite n'y sçauroient apporter aucun changement sensible. C'est pourquoi je supposerai l'une & l'autre orbite circulaire, c'est-à-dire, $y = a$, & $z = f$, donc $v = \sqrt{(aa + ff - 2af \cos. \omega)}$. Soit en outre, $f = \lambda a$, $d\theta = d\zeta$; $d\varphi = m d\zeta$, & partant $d\omega = (1 - m) d\zeta$; soient enfin, comme ci-dessus, $\frac{2\lambda}{1 + \lambda\lambda} = g \lambda (1 + \lambda\lambda)^{\frac{1}{2}} = h$ & $\frac{1}{(1 - g \cos. \omega)^{\frac{1}{2}}} = a + B \cos. \omega + C \cos. 2\omega + D \cos. 3\omega + \&c.$ & nos équations se changeront en celles-ci :

$$I. \quad d\pi = \frac{n}{\lambda m} d\zeta \sin.(\varphi - \pi) \sin.(\theta - \pi) \left(1 - \frac{\lambda}{h} (A + B \cos. \omega + C \cos. 2\omega + D \cos. 3\omega + \text{\&c.}) \right)$$

$$II. \quad d. l \operatorname{tang.} \varphi = \frac{n}{\lambda m} d\zeta \cos.(\varphi - \pi) \sin.(\theta - \pi) \left(1 - \frac{\lambda}{h} (A + B \cos. \omega + C \cos. 2\omega + D \cos. 3\omega + \text{\&c.}) \right)$$

Ou bien, en faisant $\frac{h}{\lambda} - A = \alpha$, c'est-à-dire, $1 - \frac{\lambda}{h} A = \frac{\lambda}{h} \alpha$.

$$I. \quad d\pi = \frac{n}{mh} d\zeta \sin.(\varphi - \pi) \sin.(\theta - \pi) (\alpha - B \cos. \omega - C \cos. 2\omega - D \cos. 3\omega - \text{\&c.}).$$

$$II. \quad d. l \operatorname{tang.} \varphi = \frac{n}{mh} d\zeta \cos.(\varphi - \pi) \sin.(\theta - \pi) (\alpha - B \cos. \omega - C \cos. 2\omega - D \cos. 3\omega - \text{\&c.}).$$

où il est à remarquer, que puisque la variabilité de π est extrêmement petite, on pourra, sans faute, dans l'intégration de ces formules, regarder la quantité π comme constante, au moins pour en trouver la valeur à peu près. Car on n'aura ensuite qu'à introduire cette valeur déjà trouvée, pour en trouver une plus exacte.

§. LXXXV. Pour préparer ces formules à l'intégration, je remarque que :

$$\begin{aligned} \sin.(\theta - \pi) \sin.(\varphi - \pi) &= \frac{1}{2} \cos. \omega - \frac{1}{2} \cos.(\theta + \varphi - 2\pi) && \text{à cause de } \theta - \varphi = \omega, \\ \sin.(\theta - \pi) \cos.(\varphi - \pi) &= \frac{1}{2} \sin. \omega + \frac{1}{2} \sin.(\theta + \varphi - 2\pi) \end{aligned}$$

& de plus, que

$$\begin{aligned} \cos. \omega \sin.(\theta - \pi) \sin.(\varphi - \pi) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos. 2\omega - \frac{1}{4} \cos. 2(\varphi - \pi) - \frac{1}{4} \cos. 2(\theta - \pi), \\ \cos. \omega \sin.(\theta - \pi) \cos.(\varphi - \pi) &= \frac{1}{4} \sin. 2\omega + \frac{1}{4} \sin. 2(\varphi - \pi) + \frac{1}{4} \sin. 2(\theta - \pi). \end{aligned}$$

Ces valeurs étant substituées, & les termes qui résultent de $C \cos. 2\omega$, $D \cos. 3\omega$, &c. négligés, comme n'étant d'aucune conséquence, ainsi qu'on le verra bien-tôt, nous aurons :

$$I. \quad d\pi = \frac{n}{mh} d\zeta \left(\frac{1}{2} \alpha \cos. \omega - \frac{1}{2} \alpha \cos.(\theta + \varphi - 2\pi) - \frac{1}{4} B - \frac{1}{4} B \cos. 2\omega + \frac{1}{4} B \cos. 2(\varphi - \pi) + \frac{1}{4} B \cos. 2(\theta - \pi) \right).$$

$$II. \quad d. l \operatorname{tang.} \varphi = \frac{n}{mh} d\zeta \left(\frac{1}{2} \alpha \sin. \omega + \frac{1}{2} \alpha \sin.(\theta + \varphi - 2\pi) - \frac{1}{4} B \sin. 2\omega - \frac{1}{4} B \sin. 2(\varphi - \pi) - \frac{1}{4} B \sin. 2(\theta - \pi) \right).$$

§. LXXXVI. Or, ayant $d\theta = d\zeta$; $d\varphi = m d\zeta$, &c

$d\omega = (1-m)d\zeta$, & $d\pi = 0$, nous en tirerons les formules intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \int d\zeta \cos \omega &= \frac{1}{1-m} \sin \omega & \int d\zeta \sin \omega &= \frac{1}{1-m} \cos \omega \\ \int d\zeta \cos (\theta + \varphi - 2\pi) &= \frac{1}{1+m} \sin (\theta + \varphi - 2\pi) & \int d\zeta \sin (\theta + \varphi - 2\pi) &= -\frac{1}{1+m} \cos (\theta + \varphi - 2\pi) \\ \int d\zeta \cos 2\omega &= \frac{1}{2(1-m)} \sin 2\omega & \int d\zeta \sin 2\omega &= -\frac{1}{2(1-m)} \cos 2\omega \\ \int d\zeta \cos 2(\varphi - \pi) &= \frac{1}{2m} \sin 2(\varphi - \pi) & \int d\zeta \sin 2(\varphi - \pi) &= -\frac{1}{2m} \cos 2(\varphi - \pi) \\ \int d\zeta \cos 2(\theta - \pi) &= \frac{1}{2} \sin 2(\theta - \pi) & \int d\zeta \sin 2(\theta - \pi) &= -\frac{1}{2} \cos 2(\theta - \pi) \\ & \text{\& } \int d\zeta = \zeta = \frac{1}{m} \varphi. \end{aligned}$$

D'où nous trouverons les équations des intégrales proposées :

$$\begin{aligned} \text{I. } \pi &= C - \frac{n}{4mmh} B \varphi + \frac{n}{mh} \left(\frac{\omega}{2(1-m)} \sin \omega - \frac{\omega}{2(1+m)} \sin (\theta + \varphi - 2\pi) - \frac{B}{8(1-m)} \sin 2\omega \right. \\ &\quad \left. + \frac{B}{8m} \sin 2(\varphi - \pi) + \frac{B}{8} \sin 2(\theta - \pi) \right), \\ \text{II. } \text{tang. } \rho &= D - \frac{n}{mh} \left(\frac{\omega}{2(1-m)} \cos \omega + \frac{\omega}{2(1+m)} \cos (\theta + \varphi - 2\pi) - \frac{B}{8(1-m)} \cos 2\omega \right. \\ &\quad \left. + \frac{B}{8m} \cos 2(\varphi - \pi) + \frac{B}{8} \cos 2(\theta - \pi) \right). \end{aligned}$$

LXXXVII. Nous voyons donc que la longitude du nœud π n'est pas fixe, mais qu'elle souffre, pendant chaque période, plusieurs variations, qui sont proportionnelles aux sinus des angles ω ; $\theta + \varphi - 2\pi$; 2ω ; $2(\varphi - \pi)$ & $2(\theta - \pi)$. Or, mettant ces variations périodiques à part, nous voyons aussi qu'après chaque période, le lieu du nœud rétrograde d'un angle $= \frac{nB}{4mmh} \times 360^\circ$, pendant une révolution entière de Saturne. Mettons donc les valeurs de n , B , m , & h qu'on a trouvées ci-dessus, & nous trouverons que les nœuds de Saturne reculeront,

pendant chaque période de Saturne de $8' 47''$, & partant dans un an, de $18''$, par rapport aux étoiles fixes. Donc puisque les étoiles fixes avancent chaque année de $51''$, par rapport à l'équinoxe, la ligne des nœuds de Saturne avancera chaque année sur l'orbite de Jupiter, de $33''$; d'où l'on connoîtra son mouvement moyen. On voit par les Tables, que les Astronomes sont trop peu d'accord sur cet article, pour le pouvoir vérifier par les observations: cependant, ce mouvement annuel de $33''$ convient assez avec les Tables de M. Cassini.

§. LXXXVIII. Pour trouver les inégalités périodiques, puisque $u = \frac{h}{\lambda} - A = 5,9006$, nous trouverons les deux valeurs de π , & de $l \text{ tang. } \rho$, exprimées en nombres:

$$\pi = \text{Const.} - 0,0004066 \phi + 141'' \sin. \omega - 28'' \sin. 2\omega + 42'' \sin. 2(\phi - \pi) + 17'' \sin. 2(\phi - \pi) - 60'' \sin. (\phi + \phi - 2\pi).$$

$$l \text{ tang. } \rho = \text{Const.} - 141'' \cos. \omega + 28'' \cos. 2\omega - 42'' \cos. 2(\phi - \pi) - 17'' \cos. 2(\phi - \pi) - 60'' \cos. (\phi + \phi - 2\pi).$$

Par la première équation, il paroît que le lieu vrai du nœud peut quelquefois différer du lieu moyen de plus de $3'$: cependant, comme une faute de $3'$ dans le lieu du nœud, n'est d'aucune conséquence dans le mouvement de Saturne, à cause de sa fort petite inclinaison à l'orbite de Jupiter, je ne crois pas qu'on ait besoin de charger les Tables Astronomiques de ces équations, pour corriger le lieu des nœuds; & il suffira de se servir du lieu moyen du nœud, dans les calculs Astronomiques.

§. LXXXIX. La seconde équation fait voir que l'inclinaison de l'orbite de Saturne sur celle de Jupiter n'est pas constante non plus; mais qu'elle devient, dans chaque période, tantôt un peu plus grande, tantôt un peu plus petite. On voit d'abord, que la constante doit être le

logarithme de la tangente de l'inclinaison moyenne, que je fais $= \gamma$ ainsi que

$$\frac{\log \frac{\tan. \rho}{\tan. \gamma}}{\log \frac{\tan. \rho}{\tan. \gamma}} = -141'' \cos. \omega + 28'' \cos. 2\omega - 42'' \cos. 2(\phi - \pi) - 17'' \cos. 2(\theta - \pi) - 60'' \cos. (\theta + \phi - 2\pi) = V.$$

Pour développer mieux cette équation, soit l'inclinaison vraie $\rho = \gamma + \sigma$, σ devant être fort petit par rapport à γ ,

nous aurons $\tan. \rho = \tan. \gamma + \frac{\sigma}{\cos. \gamma^2}$, & partant :

$$\frac{\tan. \rho}{\tan. \gamma} = 1 + \frac{\sigma}{\sin. \gamma \cos. \gamma} = 1 + \frac{2\sigma}{\sin. 2\gamma}; \text{ donc } \frac{\log \frac{\tan. \rho}{\tan. \gamma}}{\log \frac{\tan. \rho}{\tan. \gamma}} =$$

$$= \frac{2\sigma}{\sin. 2\gamma}, \text{ qui donne } \sigma = \frac{1}{2} V \sin. 2\gamma. \text{ Or, comme l'inclinaison moyenne } \gamma \text{ est à peu près } = 1^\circ 15' 20'', \text{ nous}$$

aurons $2\gamma = 2^\circ 30' 40''$, & $\sin. 2\gamma = 0,0438131$; & partant $\sigma = 0,0219065 V = \frac{1}{45} V$. Remettant donc pour γ & V leurs valeurs, l'inclinaison cherchée sera :

$$\rho = 1^\circ 15' 20'' - 3'' \cos. \omega + \frac{1}{2}'' \cos. 2\omega - 1'' \cos. 2(\phi - \pi) - \frac{1}{3}'' \cos. 2(\theta - \pi) - 1'' \cos. (\theta + \phi - 2\pi).$$

Ainsi cette inclinaison pourra varier environ de $5''$, dont elle deviendra tantôt plus grande, tantôt plus petite; de sorte qu'on s'assûrera à peine de cette variation par les observations.

§. XC. Les mêmes équations qui m'ont servi à déterminer jusqu'à présent les dérangemens de Saturne causés par l'action de Jupiter, serviront aussi réciproquement à déterminer les dérangemens de Jupiter causés par l'action de Saturne, pourvu qu'on détermine convenablement les valeurs des coefficients. Or, selon ces dernières formules, on trouvera que les nœuds de l'orbite de Jupiter sur celle de Saturne, doivent reculer dans un an de $10''$, par rapport aux étoiles fixes; & partant, par rapport aux équinoxes, ce mouvement sera progressif, & de $40''$ dans un an. Par la même méthode, on trouvera que les nœuds

de Mars sur l'orbite de Jupiter, avanceront de $36''$ par an, par rapport aux équinoxes. Mais la force de Saturne les fera reculer de $1''$ par an; de sorte que les deux forces de Jupiter & de Saturne étant réunies, elles feront avancer la ligne des nœuds de Mars de $35''$ par an, ce qui s'accorde admirablement bien avec les observations, sur lesquelles sont dressées les Tables Astronomiques. De plus, on trouvera que la ligne des nœuds de Vénus doit avancer par an de $46''$, & celle de Mercure de $49''$, par rapport aux équinoxes: quoique ces mouvemens se rapportent principalement au plan de l'orbite de Jupiter, ils feront à peu près les mêmes par rapport au plan de l'écliptique.

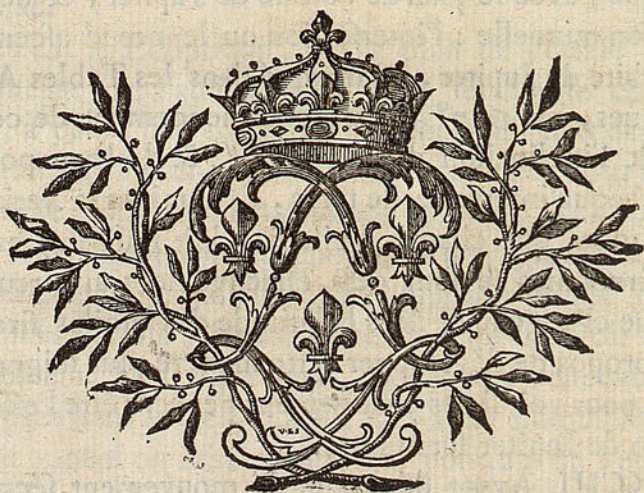
§. XCI. L'Ecliptique, ou le plan de l'orbite de la terre même, sera aussi assujetti à un semblable changement, à cause de l'action de Jupiter; car l'effet de celle de Saturne sera tout-à-fait insensible, comme nous avons vu dans le mouvement des nœuds de Mars. Mais comme dans l'Astronomie on est accoutumé de regarder le plan de l'écliptique comme fixe, & à supposer plutôt le ciel tout entier mobile, il est difficile de s'apercevoir de ce mouvement. Pour y parvenir, on devoit concevoir un autre plan dans le ciel, qui fût tout-à-fait immobile, par rapport auquel on détermineroit la position de l'écliptique & ses changemens. Si le plan de l'orbite de Jupiter étoit immobile, il seroit sans doute le plus convenable; mais quoiqu'il soit lui-même mobile, on pourra s'en servir avec assez de succès, à cause que son mouvement est fort lent, & qu'il ne sera pas difficile d'avoir égard à ses changemens. Supposons donc que le plan de l'orbite de Jupiter soit immobile, du moins pour un siècle, & nous trouverons que l'intersection de l'orbite de la terre doit reculer sur celle de Jupiter, pendant un siècle, de $12'$

21", par rapport aux étoiles fixes : mais par rapport aux équinoxes, le mouvement sera progressif; & de $1^{\circ} 11' 0''$, pendant un siècle.

§. XCII. Donc l'écliptique passera successivement par différentes étoiles fixes; de sorte que si elle passe maintenant par une certaine étoile fixe, dont on jugera par conséquent la latitude $= 0$, après quelque tems, cette étoile fixe se trouvera hors de l'écliptique, & aura quelque latitude. Et par-là on comprendra aisément, que la latitude de chaque étoile fixe, doit subir de tems en tems quelque changement, & devenir ou plus grande, ou plus petite. Ce changement dépendra du lieu d'intersection de l'écliptique, avec le plan de l'orbite de Jupiter, & de l'inclinaison mutuelle : l'intersection ou le nœud ascendant de l'orbite de Jupiter, est marqué dans les Tables Astronomiques, en $7^{\circ} 35'$, au commencement de ce siècle, & l'inclinaison de $1^{\circ} 19' 10''$: & de-là on pourra, pour chaque intervalle de tems, déterminer la variation en latitude, que chaque étoile fixe doit souffrir. Comme les Astronomes se sont déjà effectivement aperçus de quelque changement dans la latitude des étoiles fixes, il est à propos de développer cette matière plus soigneusement, pour voir si ces changemens peuvent être l'effet de l'action de Jupiter sur la terre.

§. XCIII. Ayant déterminé le mouvement séculaire de la ligne des nœuds de l'écliptique sur l'orbite de Jupiter, j'ai calculé de combien la latitude de chaque étoile fixe doit croître ou décroître pendant un siècle. Pour cet effet, il faut chercher la longitude de l'étoile fixe, proposée pour le commencement de ce siècle, ou de l'an 1701; & la Table suivante montrera l'accroissement ou la diminution séculaire de la latitude de cette étoile fixe. J'ai dressé cette Table, seulement pour les étoiles qui ont

une latitude Boréale, à laquelle se rapportent les titres *ajoutés*, ou *ôtés* : mais si la latitude de l'étoile proposée est méridionale, on n'a qu'à changer ces titres. Il est bien vrai que ces changemens ne seront pas les mêmes pendant chaque siècle : mais on s'appercvra aisément que les variations de plusieurs siècles ne seront pas considérables, & qu'on se pourra servir de cette Table pour tout le tems passé, que l'Astronomie a été cultivée. Voici donc la Table que j'ai calculée de ce changement de l'écliptique, causé par l'action de la force de Jupiter.



TABLE

T A B L E

DU CHANGEMENT EN LATITUDE

des Etoiles fixes pendant un siecle, depuis 1700 jusqu'à 1800.

Arg. Longitude de l'Etoile proposée pour l'an 1700.

LATITUDE BOREALE.

Longitude.	Otez.	Longitude.	Ajoutez.	Longitude.	Ajoutez.	Longitude.	Otez.
Υ 0°	2", 19"	♄ 0°	17" 26"	♌ 0°	2", 19"	♍ 0°	17", 26"
5	0, 47	5	17 34	5	0, 47	5	17, 34
10	Ajoutez. 0, 44	10	17, 35	10	Otez. 0, 44	10	17, 35
15	2, 16	15	17, 26	15	2, 16	15	17, 26
20	3, 47	20	17, 11	20	3, 47	20	17, 11
25	5, 16	25	16, 47	25	5, 16	25	16, 47
♌ 0	6, 43	♎ 0	16, 16	♏ 0	6, 43	♐ 0	16, 16
5	8, 6	5	15, 37	5	8, 6	5	15, 37
10	9, 26	10	14, 51	10	9, 26	10	14, 51
15	10, 41	15	13, 58	15	10, 41	15	13, 58
20	11, 52	20	13, 0	20	11, 52	20	13, 0
25	12, 57	25	11, 55	25	12, 57	25	11, 55
♍ 0	13, 56	♐ 0	10, 44	♑ 0	13, 56	♒ 0	10, 44
5	14, 49	5	9, 28	5	14, 49	5	9, 28
10	15, 35	10	8, 9	10	15, 35	10	8, 9
15	16, 15	15	6, 46	15	16, 15	15	6, 46
20	16, 46	20	5, 19	20	16, 46	20	5, 19
25	17, 10	25	3, 50	25	17, 10	25	3 50

Prix. 1748.

L

Si la Latitude est méridionale , il faut changer les titres.

§. XCIV. A l'aide de cette Table , on sera en état de trouver de combien la latitude de chaque étoile fixe doit varier depuis 1700 jusqu'à 1800 : & comme il est aisé de reconnoître , que pendant plusieurs siècles il doit y avoir le même changement , on en pourra assez exactement assigner la latitude que chaque étoile fixe a dû avoir au tems de Ptolémée , & même d'Hipparque. Soit , par exemple , proposé le *Cœur du Lyon* , dont la longitude est marquée pour 1700 en $Q\ 25^{\circ} 40' 30''$, & la latitude Boréale $0^{\circ} 26' 38''$: on connoîtra d'abord , par cette Table , que sa latitude va en croissant de $11'' 46'''$ pendant chaque siècle ; de sorte qu'en 1800 elle sera $0^{\circ} 26' 50''$. Mais pour avoir sa latitude pour un tems quelconque passé , il faut , pour chaque siècle , soustraire $11'' 46'''$ de la latitude $0^{\circ} 26' 38''$. Ainsi au tems de Ptolémée , c'est-à-dire , l'année 150 , ou $15\frac{1}{2}$ siècles avant 1700 , il en faut retrancher $15\frac{1}{2} \times 11'' 46'''$, ou $3' 1''$; de sorte qu'au tems de Ptolémée , la latitude du *Cœur du Lyon* ne doit avoir été que $0^{\circ} 23' 37''$. Dans les *Institutions Astronomiques* , on remarque que la latitude de cette étoile a été augmentée depuis 50 ans de $5''$, & partant depuis un siècle , de $10''$; ce qui s'accorde parfaitement bien avec ma Table : & on s'appercevra d'un pareil accord en plusieurs autres étoiles fixes , dont le changement en latitude a été observé avec tout le soin possible , depuis 50 ans.



VII.

Application des Recherches précédentes aux observations de Saturne.

§. XCV. **A**PRE'S avoir déterminé les dérangemens que l'action de Jupiter doit causer dans le mouvement de Saturne, je vais examiner jusqu'à quel point de précision ils seront d'accord avec les observations. Pour cet effet, je ne considérerai que des longitudes observées de Saturne, puisque la latitude, si l'on en excepte le mouvement des nœuds, qui paroît assez bien déterminé, ne sçauroit souffrir aucun dérangement sensible de la part de Jupiter. Or la longitude de Saturne demande quantité de corrections, comme j'ai fait voir dans les articles précédens : elles dépendent de trois angles, dont le premier est l'anomalie excentrique de Saturne, que j'ai nommée q ; le second est l'anomalie excentrique de Jupiter, que j'ai nommée p , & enfin le troisième, est celui qu'on détermine en ôtant la longitude de Saturne de celle de Jupiter, & cet angle est nommé ω . Donc si l'on connoît pour quelque tems proposé ces angles, & qu'on fasse la longitude moyenne de Saturne $= x$, & son équation elliptique $= Y$, qui dépend de l'anomalie excentrique q , & de l'excentricité $= k$, on en tirera la vraie longitude héliocentrique de Saturne ϕ , par l'équation

$$\begin{aligned} \phi = & x + Y + 3'' \sin. p + 4'' \sin. \omega + 13'' \sin. (\omega + q) - 3'' \sin. (\omega + p) - 3'' \sin. (2\omega + p) - \frac{1}{100000} p \cos. (\omega - p) \\ & - 32'' \sin. 2\omega - 257'' \sin. (\omega - q) - \dots \sin. (\omega - p) - 243'' \sin. (2\omega - p) \\ & - 7'' \sin. 3\omega \\ & - 2'' \sin. 4\omega. \end{aligned}$$

84 RECHERCHES DES INEGALITES

§. XCVI. Comme l'équation elliptique Y est composée de plusieurs membres, il est nécessaire de la développer. Ayant donc fait l'excentricité $= k$, & l'anomalie

excentrique $= q$, soit, pour abréger, $\frac{1 - \sqrt{1 - kk}}{k} = x$, & on aura :

$Y = -(k + 2x) \sin. q + x^2 \sin. 2q - \frac{2}{3} x^3 \sin. 3q + \frac{1}{5} x^4 \sin. 4q - \frac{2}{7} x^5 \sin. 5q + \&c.$
 mais nous avons $k = 8,7559031$, & $x = \frac{1}{2} k + \frac{1}{8} k^3 + \frac{1}{16} k^5 + \frac{5}{128} k^7 + \&c.$ réduisant tous ces coefficients en minutes, secondes, nous trouverons :

$$Y = -23525'' \sin. q + 168'' \sin. 2q - 3'' \sin. 3q + \&c.$$

Mais parce que je me servirai des observations anciennes aussi-bien que des modernes, & que dans celles-là la précision ne se borne gueres à une minute; pour faciliter le calcul, je négligerai les inégalités qui sont moindres qu'une demi-minute; & la formule qui exprime la longitude vraie de Saturne fera :

$$q = -23525'' \sin. q - 3'' \sin. 2q - 257'' \sin. (q - p) - \dots \sin. (q - p) - 243'' \sin. (2q - p) - \dots p \cos. (q - p) + 168'' \sin. 2q,$$

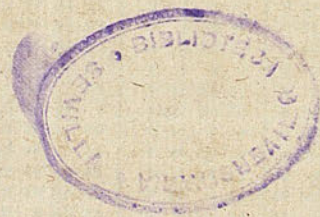
où le coefficient du terme $\sin. (q - p)$ est inconnu, aussi-bien que celui du dernier terme, jusqu'à ce qu'à l'aide des observations on en puisse déterminer les véritables valeurs.

§. XCVII. Toutes ces inégalités, excepté la dernière, reviennent les mêmes dans chaque période; & toutes les fois que les trois angles q , p & u seront les mêmes, il y aura la même différence entre la longitude moyenne de Saturne & la vraie. Mais l'inégalité contenue dans le dernier terme.... $p \cos. (u - p)$ devient, après chaque période, plus grande, puisque l'angle p croît toujours presque uniformément, & acquiert à chaque révolution de Jupiter, un accroissement de 360 degrés. Donc si à présent le coefficient du terme $\cos. (u - p)$ a été $= \frac{1}{100000} p$.

OPPOSITIONS DE SATURNE AVEC LE SOLEIL.

	Temps à Paris.	Long. obs. η .	Long. moyen η .	An. exc. q .	$2q$.	ω	2ω .	p .	$\omega - q$.	$\omega - p$.	$2\omega - p$.
v. ft.	1582. Août 20 ^h 23 ^m 12 ^s	11 ^h 7 ^m 27 ^s 47"	11 ^h 13 ^m 22 ^s 44"	2 ^h 14 ^m 39 ^s 47"	4 ^h 29 ^m 19 ^s	11 ^h 11 ^m 42 ^s	10 ^h 23 ^m 24 ^s	4 ^h 13 ^m 38 ^s	8 ^h 27 ^m 2 ^s	6 ^h 28 ^m 4 ^s	6 ^h 9 ^m 46 ^s
	1583. Sept. 2 21 40	11 19 49 30	11 26 2 30	2 27 10 41	5 24 21	0 3 30	0 7 0	5 16 24	9 6 ...	6 17 6	6 20 36
	1584. Sept. 15 6 30	0 2 34 0	0 8 43 30	3 9 51 53	6 19 44	0 25 18	1 20 36	6 19 23	9 15 26	6 5 55	7 1 13
	1585. Sept. 28 18 0	0 15 44 0	0 21 24 52	3 22 43 2	7 15 26	1 16 12	3 2 24	7 22 9	9 23 29	5 24 3	7 10 15
	1586. Oct. 12 9 0	0 29 6 5	1 4 6 41	4 5 44 1	8 11 23	2 5 26	4 10 52	8 24 10	9 29 42	5 11 16	7 16 42
	1587. Oct. 26 7 0	1 12 49 44	1 16 47 16	4 18 54 23	9 7 49	2 22 38	5 15 16	9 25 21	10 3 44	4 27 17	7 19 55
	1588. Nov. 8 8 32	1 26 47 30	1 29 29 56	5 2 12 17	10 4 25	3 8 19	6 16 38	10 25 55	10 6 7	4 12 24	7 20 43
	1589. Nov. 22 12 18	2 10 54 10									
	1590. Déc. 6 19 40	2 25 14 10	2 25 55 7	5 29 3 25	11 28 7	4 7 28	8 14 56	0 26 12	10 8 25	3 11 16	7 18 44
	1591. Déc. 20 22 14	3 9 23 14	3 7 36 53	6 12 30 14	0 25 0	4 22 38	9 15 16	1 26 35	8 10 8	2 26 3	7 18 41
	1593. Janv. 3 1 20	3 23 32 0									
	1594. Janv. 17 3 0	4 7 30 0									
	1595. Janv. 30 23 0	4 21 15 0	4 15 39 38	7 19 48 33	3 9 37	6 17 18	1 4 36	5 2 5	10 24 53	1 15 13	8 2 31
	1596. Févr. 13 10 28	5 4 38 12									
	1597. Févr. 25 19 0	5 17 45 30									
	1598. Mars 10 23 0	6 0 33 35	5 23 41 14	9 1 1 24	6 2 3	8 20 12	5 10 24	8 10 16	11 19 11	0 9 56	9 0 8
	1599. Mars 23 18 40	6 13 0 0	6 6 21 13	9 13 33 24	6 27 7	9 9 32	6 19 4	9 11 45	11 25 59	11 27 47	9 7 19
u. ft.	1608. Juil. 19 3 0	9 26 53 0									
	1609. Juil. 31 13 0	10 8 31 0									
	1610. Août 12 12 0	10 20 10 0									
	1611. Août 25 16 0	11 2 12 0									
	1642. Sept. 13 23 45	11 21 33 48	11 27 56 51	2 27 48 21	5 25 37	11 22 25	11 14 50	5 6 34	8 24 37	6 15 51	6 8 16
	1644. Oct. 9 19 12	0 17 38 0	0 23 19 6	3 23 21 31	7 16 43	1 5 14	2 10 28	7 12 25	9 11 52	5 22 49	6 28 3
	1647. Nov. 20 6 50	1 28 24 25									
	1654. Févr. 10 19 0	4 22 54 0									
	1657. Mars 21 23 0	6 2 18 0	5 25 35 20	9 1 38 51	6 3 18	8 9 33	4 19 18	8 0 42	11 7 55	0 8 52	8 18 26
	1658. Avr. 3 17 13	6 14 35 28	6 8 15 14	9 14 10 22	6 28 21	8 29 21	5 28 42	9 2 25	11 15 11	11 27 0	8 26 21
	1659. Avr. 16 10 11	6 26 47 52									
	1660. Avr. 27 22 48	7 8 41 32									
	1661. Mai 10 6 2	7 20 22 24	7 16 13 15	10 20 55 21	9 11 51	10 21 53	9 13 46	0 3 35	0 0 58	10 18 18	9 10 11
	1662. Mai 22 11 0	8 1 52 20									
	1664. Juin 14 13 4	8 24 27 27									
	1665. Juin 26 15 23	9 5 43 51	9 6 44 17	0 8 49 54	0 17 40	1 7 48	2 15 36	4 6 53	0 28 58	9 0 55	10 8 43
	1670. Août 27 7 20	11 3 44 11	11 9 55 43	2 9 24 30	4 18 49	4 26 23	9 22 46	9 18 33	2 17 0	7 7 50	0 4 13
	1671. Sept. 8 8 56	11 16 5 0	11 22 33 38	2 21 49 49	5 13 39	5 13 46	10 27 32	10 19 4	2 21 56	6 24 42	0 8 28
	1672. Sept. 20 12 39	11 28 42 22	0 5 14 3	3 4 26 27	6 8 53	6 0 0	0 0 0	11 19 12	2 25 34	6 10 48	0 10 48
	1673. Oct. 3 21 4	0 11 37 8	0 17 55 6	3 17 13 13	7 4 26	6 15 43	1 1 26	0 19 13	2 28 30	5 26 30	0 12 13
	1674. Oct. 17 12 0	0 24 52 40	1 0 36 52	4 0 10 7	8 0 20	7 1 34	2 3 8	1 19 29	3 1 24	5 12 5	0 13 39
	1675. Oct. 30 7 10	1 8 28 0									
	1676. Nov. 13 7 25	1 22 19 14									
	1677. Nov. 27 11 18	2 6 24 51									
	1678. Déc. 11 16 13	2 20 38 12	2 21 25 21	5 23 19 26	11 16 39	9 15 45	7 1 30	5 27 25	3 22 26	3 18 20	1 4 5
	1679. Déc. 25 22 34	3 4 54 4	3 4 7 3	6 6 47 24	0 13 35	10 6 6	8 12 12	7 0 28	3 29 19	3 5 38	1 11 44
	1681. Janv. 8 2 17	3 19 16 20									
	1682. Janv. 22 3 20	4 3 9 15	3 29 39 17	7 3 32 0	2 7 4	11 13 34	10 27 8	9 4 49	4 10 2	2 8 45	1 22 19
	1683. Févr. 5 0 2	4 16 58 22									
	1684. Févr. 18 17 10	5 0 34 27									
	1685. Mars 3 3 40	5 13 47 25									
	1686. Mars 16 10 28	5 26 47 10	5 20 12 15	8 25 38 10	5 21 16	1 17 4	3 4 8	1 6 16	4 21 26	0 10 48	1 27 52
	1687. Mars 29 11 0	6 9 24 53	6 2 52 34	9 8 14 30	6 16 29	2 4 4	4 8 8	2 6 46	4 2 50	11 27 18	2 1 22





après une révolution de Jupiter, il sera $= \frac{1}{1000000} (p+360^\circ)$,
 ou son accroissement sera $= \frac{360^\circ}{1000000}$ c'est-à-dire presque
 13" : & après deux révolutions de Saturne, qui compren-
 nent presque 5 révolutions de Jupiter, ce coefficient doit
 croître d'une minute entière, en supposant la fraction
 $\frac{1}{1000000}$ juste. Mais peut-être qu'elle est encore plus gran-
 de, & par conséquent, cette variation plus sensible, au-
 quel cas il ne seroit pas surprenant que les Astronomes
 soient si peu d'accord sur le tems périodique de Saturne.

§. XCVIII. Comme il s'agit ici des longitudes héliocentriques de Saturne, je ne pourrai employer que des observations de la même espece, puisque les inégalités de la distance z ne paroissent pas encore assez connues pour qu'on puisse, d'une longitude géocentrique, conclurre l'héliocentrique. Ce seront donc seulement les observations de Saturne, qui ont été faites vers le tems de ses oppositions au Soleil, dont je pourrai faire usage dans cette recherche; & je profiterai des oppositions observées, que M. Cassini s'est donné la peine de calculer, & de publier dans ses Elémens d'Astronomie; & en les rapportant ici, j'y ajouterai les valeurs des angles q , $2q$, 2ω , $\omega - q$; $\omega - p$; & $2\omega - p$, dont les inégalités dépendent; afin que je puisse ensuite plus aisément voir, combien ces inégalités, tirées de la théorie, s'écartent de celles que nous connoissons par les observations.

§. XCIX. J'ai calculé les angles pour chacune de ces observations, suivant les Tables de M. Cassini, lesquelles étant fondées sur les regles de Kepler, ont besoin, comme il est aisé de le concevoir, de quelque correction, puisqu'on a enveloppé les inégalités causées par l'action de Jupiter, dans l'excentricité & la position de l'orbite de Saturne. Ces corrections nécessaires étant inconnues, je ferai les réflexions suivantes, qui pourront conduire à une connoissance plus parfaite du mouvement de cette planete. La troisieme colonne contient la longitude moyenne de Saturne, pour le moment de chaque observation, & je l'ai déjà réduite au plan de l'écliptique : car comme le vrai lieu de Saturne est donné par l'observation, & que le lieu du nœud est connu, j'en ai tiré l'argument de latitude, dont j'ai appliqué d'abord l'équation à la longitude moyenne, de sorte que si l'on y ajoute outre cela les autres inégalités, il en doit résulter la longitude vraie observée, sans avoir égard à la latitude. Or cette longitude moyenne tabulaire, peut avoir besoin d'une double correction : la premiere est constante, que je supposerai de m secondes, qu'il faut ajouter à chaque longitude moyenne ; l'autre vient de la correction du tems périodique, en cas qu'il ne soit pas juste, & ira tous les ans en croissant. Je supposerai que l'avancement annuel de la longitude moyenne doit être augmenté de n'' : donc si la longitude moyenne A. 1582 a été $= \text{ } + m''$, après un nombre donné d'années N , elle sera $= \text{ } + m'' + Nn''$; où $\text{ } +$ marque toujours la longitude moyenne, qui se trouve exprimée dans la Table précédente.

§. C. L'anomalie excentrique de Saturne q , pourra aussi, par la même raison, être ou trop grande, ou trop petite : je supposerai donc qu'il y faut toujours ajouter k'' , de sorte que pour chacune de ces observations, l'anomalie

excentrique ne sera plus précisément $= q$, comme j'ai supposé selon les Tables, mais elle sera $= q + k''$. Ensuite, comme l'excentricité elle-même peut avoir besoin de quelque correction dans l'expression de la longitude vraie φ , le coefficient du terme $\sin. q$, que j'ai supposé $= 23525''$, demandera une correction que je supposerai de x'' à y ajouter : de sorte qu'au lieu du terme $-23525'' \sin. q$, on écrira $-(23525'' + x'') \sin. (q + k)$. Or, puisque x & k seront des quantités fort petites, on aura $\sin. (q + k) = \sin. q + k \cos. q$; & partant au lieu du terme $-23525'' \sin. q$, nous aurons $-23525'' \sin. q - x'' \sin. q - 23525'' k \cos. q$: & réduisant dans le dernier terme les $23525''$ en parties du rayon $= 1$, vû que k exprime déjà un angle, nous aurons $-23525'' \sin. q - x'' \sin. q - 0,11405 k \cos. q$.

§. CI. Mettant de même dans le terme $168'' \sin. 2q$, $q + k''$ au lieu de q , le sinus de l'angle $2q$ se changera en $\sin. (2q + 2k) = \sin. 2q + 2k \cos. q$. Et le coefficient $168''$ ayant aussi besoin d'une correction, j'y ajouterai y'' , & il sera $= 168'' + y''$: par conséquent au lieu du terme $+168'' \sin. 2q$, j'aurai, après les corrections faites, $+168'' \sin. 2q + y'' \sin. 2q + 336'' k \cos. 2q$; & réduisant ces $336''$ en parties du rayon $= 1$, on aura $0,00163$. Par conséquent au lieu du terme $+168'' \sin. 2q$, il faudra substituer cette expression $+168'' \sin. 2q + y'' \sin. 2q + 0,00163 k'' \cos. 2q$. Il s'agit donc de déterminer ces corrections inconnues m , n , k , x & y , en sorte que la longitude vraie de Saturne φ devienne parfaitement d'accord avec la longitude observée : & après avoir connu par ce moyen leurs valeurs, on sera en état de corriger les Tables de M. Cassini, afin qu'elles soient parfaitement d'accord avec les observations, pourvû qu'on fasse usage des inégalités causées par l'action de Jupiter, que je vais envisager plus

particulièrement, parce qu'elles ne sont pas encore assez déterminées par la théorie.

§. CII. Or d'abord, il paroît que quand même les termes $-32'' \sin. 2\omega - 257'' \sin. (\omega - q)$ ne feroient pas tout-à-fait justes, leurs erreurs devroient pourtant être si petites, qu'on ne sçauroit s'en appercevoir dans les observations, sur-tout les anciennes, dont je suis obligé de faire usage; & partant je regarderai ces termes comme n'ayant besoin d'aucune correction. La même chose se doit entendre du terme $-243'' \sin. (2\omega - p)$, dont le coefficient $-243''$ a été fourni si clairement par la théorie, qu'il sera presque aussi exact que la théorie est vraie. Et quand même la force de Jupiter ne suivroit pas exactement la règle que j'ai supposée, pourvû qu'elle ne s'en écarte pas très-considérablement, l'erreur ne roulera que sur quelques secondes, que je ne regarderai point dans cette recherche. Mais la théorie ayant laissé tout-à-fait indéterminé le coefficient du terme $\sin. (\omega - p)$, pour le trouver par les observations, je le supposerai $= -z''$, de sorte que j'aurai, outre les termes déjà expliqués, encore celui-ci: $-z'' \sin. (\omega - p)$; & les observations nous découvriront la valeur de z , soit que la théorie soit exactement vraie ou non.

§. CIII. La dernière équation $..... p \cos. (\omega - p)$ cause sans doute la plus grande inégalité, vû que son coefficient croît continuellement, & qu'après chaque période de Jupiter, il prend un accroissement de 360° . Il ne suffit donc pas de prendre pour p les valeurs qui se trouvent dans la huitième colonne, mais il y faut encore ajouter autant de fois 360° , qu'il y a de révolutions de Jupiter achevées, depuis une certaine époque qu'on aura choisie pour régler cette inégalité. Je choisirai pour cet effet la première observation faite en 1582, & je supposerai qu'alors le coefficient de $\cos. (\omega - p)$ ait été $(\omega + p)'' = u$
 $(\omega + 4^s 13^o 38')$

($a + 4^s 13^o 38'$), où u marque un certain nombre, que j'avois trouvé plus haut $= \frac{1}{1000000}$, mais qu'il faut déterminer plus exactement par les observations. Ainsi pour l'observation de l'année 1582 ce terme sera $= -u$ ($a + 4^s 13^o 38'$) *cos.* ($\omega - p$). Or pour une autre observation, entre laquelle & celle-là il y aura le nombre de périodes de Jupiter achevées, & où p marque l'anomalie excentrique de Jupiter; ce terme sera $= -u$ ($a + p + 360$) *cos.* ($\omega - p$). Ainsi pour l'année 1642, où on aura 5 périodes de Jupiter achevées depuis 1582, ce terme sera $= -u$ ($a + 5.360 + 5^s 6^o 34'$) *cos.* ($\omega - p$). Et c'est suivant cette remarque qu'on doit déterminer cette dernière inégalité pour chacune des observations expliquées.

§. CIV. Toutes ces inégalités, en partie connues, en partie inconnues, doivent produire, pour la longitude vraie de Saturne ϕ , une longitude qui soit précisément celle qui a été observée; c'est-à-dire qu'il faut que l'équation qui suit ait lieu.

$$\begin{aligned} \phi = & +n - 23525'' \sin. q + 168'' \sin. 2q - 32'' \sin. 2\omega - 257'' \sin. (\omega - q) - 243'' \sin. (2\omega - p) \\ & + m'' - x'' \sin. q + y'' \sin. 2q - z'' \sin. (\omega - p) - u(a + 360 + p) \cos. (\omega - p) \\ & + Nn'' - 0,11405k'' \cos. q + \frac{1}{600}k'' \cos. 2q \end{aligned}$$

où l'on doit remarquer que les lettres ϕ, n, q, ω, p , ont pour chaque observation les mêmes valeurs que celles qui sont exprimées dans la Table des observations; & qu'elles sont par conséquent connues. Mais les lettres m, n, k, x, y, z, u & a marquent des quantités inconnues, dont les valeurs pourront être déterminées par 8 équations de cette nature, qu'on formera d'un pareil nombre d'observations. Or les lettres N & v se rapportent à l'époque de 1582, & N marque le nombre d'années écoulées depuis cette époque, jusqu'à l'observation qu'on réduit au calcul; & u signifie le nombre des révolutions de Jupiter achevées,

outre la valeur de p dans le même intervalle de tems ; de forte que les valeurs de ces deux lettres N & ' sont connues. Par-là on trouvera :

Depuis	1582	1590	1602	1614	1626	1638	1649	1661	1673	1685	1697	1708	1721	1732
jusqu'à	1589	1600	1613	1625	1637	1648	1660	1672	1684	1696	1707	1720	1731	1744
$v =$	0	=1	=2	=3	=4	=5	=6	=7	=8	=9	=10	=11	=12	=13

§. CV. Donc pour trouver les valeurs des huit lettres inconnues m, n, k, x, y, z, u & a , on n'auroit qu'à calculer suivant la formule donnée, huit observations, pour en obtenir autant d'équations, qui, contenant ces huit inconnues, serviroient à en trouver leurs valeurs. Mais comme de petites erreurs commises, tant dans les observations que dans le calcul, en pourroient produire de fort grossières dans les valeurs de ces lettres, on doit dans cette recherche, choisir avec soin les observations qui feront les plus propres pour ce dessein, afin que des erreurs inévitables dans les observations & dans le calcul, il en résulte de moins considérables dans les valeurs de ces huit lettres cherchées. Et partant, pour arriver heureusement à ce but, il faut tâcher de choisir des observations telles que si l'on combine les équations qui en résultent, la plupart des lettres inconnues s'évanouissent, en sorte qu'on n'ait plus à déterminer à la fois qu'une ou deux de ces huit lettres inconnues. Car alors on pourra être plus sûr de la justesse des valeurs, qu'on trouvera par cette voie. Or je remarque d'abord que dans deux observations quelconques, dont l'intervalle de tems est $= 59$ ans, les valeurs des lettres connues sont à peu près les mêmes ; & que si l'on retranche l'une de l'autre les équations qu'on en tire, toutes les lettres inconnues se détruiront mutuellement, excepté les deux n & u . Donc si l'on cherche deux ou plusieurs équations de cette nature, on en tirera aisément & avec assez de précision les valeurs de ces deux lettres

n & u ; ensuite, comme il ne reste que six lettres à déterminer, on les déterminera plus facilement, en se servant de pareilles précautions.

VIII.

*Recherche du Tems périodique de Saturne,
& de ses Variations.*

§. CVI. **L**E tems périodique de Saturne dépend de la lettre n , par laquelle on connoît de combien il faut augmenter ou diminuer le mouvement moyen annuel qui est employé dans les Tables de M. Cassini. Ensuite les variations auxquelles le tems périodique de Saturne est sujet, & à cause desquelles il n'est pas toujours le même, dépendent de la lettre u . Pour découvrir ces variations, je choisis parmi les observations celles où la valeur du terme *cos.* ($\omega - p$) est la plus grande, ou affirmative, ou négative, qui seront celles où l'angle $\omega - p$ est ou $= 0$, ou $= 180^\circ$. De la première espece, sont les observations des années 1598, 1657, 1686, 1716, 1745, où la valeur de l'angle $\omega - p$ est à peu près $= 0$: de l'autre espece, où cet angle est à peu près $= 6^\circ$, sont celles des années 1585, 1644, 1673, 1703, 1732. On pourra ajouter les observations où l'angle $\omega - p$ est à peu près ou $= 3^\circ$, ou $= 9^\circ$, puisque dans ces cas la variation du tems périodique doit s'évanouir. Or l'angle $\omega - p$ est à peu près $= 3^\circ$ dans les observations des années 1591, 1679, 1710; & il est à peu près $= 9^\circ$ dans les observations des années 1665, 1695, 1724. Dans le choix de ces observations, j'ai été obligé de m'écarter un peu de l'exacte précision, à cause des années dont les observations manquent.

§. CVII. Je ferai donc le calcul, suivant la formule générale du §. CIV. & l'observation de l'année 1598 donnera cette équation :

$$\begin{aligned} 5^{\circ}33'35'' &= 5^{\circ}23'41''14'' + m'' + 16n'' + 23525'' \sin.88^{\circ}58' + x'' \sin.88^{\circ}58' - 0,114k'' \cos.88^{\circ}58' \\ &- 32'' \sin.19^{\circ}36' + 257'' \sin.10^{\circ}49' - 168'' \sin.2^{\circ}3' - y'' \sin.2^{\circ}3' - \frac{1}{600} k'' \cos.2^{\circ}3' \\ &+ 243'' \sin.89^{\circ}52' - z'' \sin.9^{\circ}56' - (\alpha + 360^{\circ} + 8^{\circ}10'16'') u \cos.0^{\circ}59'. \end{aligned}$$

L'observation de l'année 1657 donnera cette équation :

$$\begin{aligned} 6^{\circ}20'18'' &= 5^{\circ}25'35''20'' + m'' + 75n'' + 23525'' \sin.88^{\circ}21' + x'' \sin.88^{\circ}21' - 0,114k'' \cos.88^{\circ}21' \\ &- 32'' \sin.40^{\circ}42' + 257'' \sin.22^{\circ}5' - 168'' \sin.3^{\circ}18' - y'' \sin.3^{\circ}18' - \frac{1}{600} k'' \cos.3^{\circ}18' \\ &+ 243'' \sin.78^{\circ}26' - z'' \sin.8^{\circ}52' - (\alpha + 6.360^{\circ} + 8^{\circ}04'2'') u \cos.8^{\circ}52'. \end{aligned}$$

L'observation de l'année 1686 donnera cette équation :

$$\begin{aligned} 5^{\circ}26'47'10'' &= 5^{\circ}20'12'15'' + m'' + 104n'' + 23525'' \sin.85^{\circ}38' + x'' \sin.85^{\circ}38' + 0,114k'' \cos.85^{\circ}38' \\ &- 32'' \sin.85^{\circ}52' - 257'' \sin.38^{\circ}34' + 168'' \sin.8^{\circ}44' + y'' \sin.8^{\circ}44' - \frac{1}{600} k'' \cos.8^{\circ}44' \\ &- 243'' \sin.57^{\circ}52' - z'' \sin.10^{\circ}48' - (\alpha + 9.360^{\circ} + 16^{\circ}016'') u \cos.10^{\circ}48'. \end{aligned}$$

L'observation de l'année 1716 donnera cette équation :

$$\begin{aligned} 6^{\circ}3'48'1'' &= 5^{\circ}27'29'10'' + m'' + 134n'' + 23525'' \sin.87^{\circ}44' + x'' \sin.87^{\circ}44' - 0,114k'' \cos.87^{\circ}44' \\ &- 32'' \sin.62^{\circ}10' + 257'' \sin.33^{\circ}21' - 168'' \sin.4^{\circ}32' - y'' \sin.4^{\circ}32' - \frac{1}{600} k'' \cos.4^{\circ}32' \\ &+ 243'' \sin.66^{\circ}47' - z'' \sin.7^{\circ}52' - (\alpha + 11.360^{\circ} + 7^{\circ}21'3'') u \cos.7^{\circ}52'. \end{aligned}$$

L'Observation de l'année 1745 donnera cette équation :

$$\begin{aligned} 5^{\circ}28'26'10'' &= 5^{\circ}22'6'24'' + m'' + 163n'' + 23525'' \sin.86^{\circ}15'54'' + x'' \sin.86^{\circ}16' + 0,114k'' \cos.86^{\circ}16' \\ &- 32'' \sin.75^{\circ}28' - 277'' \sin.48^{\circ}33' + 168'' \sin.7^{\circ}28' + y'' \sin.7^{\circ}28' - \frac{1}{600} k'' \cos.7^{\circ}28' \\ &- 243'' \sin.48^{\circ}12' - z'' \sin.10^{\circ}29' - (\alpha + 14.360^{\circ} + 0^{\circ}27'14'') u \cos.10^{\circ}29'. \end{aligned}$$

§. CVIII. Ces équations étant évaluées en nombres, donneront :

$$\begin{aligned} 1598 ; \quad 15'45'' &= m'' + 16n'' - 0,0038k'' + 1,00x'' - 0,0357y'' - 0,1725z'' - 0,988au'' - 600,8u'' \\ 1657 ; \quad 5'43'' &= m'' + 75n'' - 0,0049k'' + 1,00x'' - 0,0575y'' - 0,1541z'' - 0,988au'' - 2156,0u'' \\ 1686 ; \quad 10'11'' &= m'' + 104n'' + 0,0070k'' + 1,00x'' + 0,1518y'' - 0,1873z'' - 0,982au'' - 3218,0u'' \\ 1716 ; \quad -18'23'' &= m'' + 134n'' - 0,0062k'' + 1,00x'' - 0,079y'' - 0,1368z'' - 0,990au'' - 4151,5u'' \\ 1745 ; \quad = 5'6'' &= m'' + 163n'' + 0,0058k'' + 1,00x'' + 0,130y'' - 0,1819z'' - 0,983au'' - 4982,5u'' \end{aligned}$$

Otons la seconde de la premiere, la quatrieme de la seconde, la cinquieme de la troisieme, & nous trouverons ces équations :

$$\begin{aligned} 70' 2'' &= -59'' + 0,0011k'' + 0,0218y'' - 0,0184z'' + 1555,2u'' \\ 24' 6'' &= -59'' + 0,0013k'' + 0,0215y'' - 0,0173z'' + 1995,5u'' \\ 15' 17'' &= -59'' + 0,0012k'' + 0,0218y'' - 0,0054z'' + 1764,5u'' \end{aligned}$$

De ces trois équations les deux différences feront :

$$\begin{aligned} 14' 4'' &= +0,0011z'' + 440,3u'' \\ 8' 49'' &= -0,0119z'' + 231,0u'', \end{aligned}$$

où l'on voit bien que les termes qui contiennent z'' ne font d'aucune conséquence, vû que la quantité z elle-même est probablement assez petite pour que sa centieme partie puisse être négligée sûrement. Or la premiere donnera $440,3u'' = 844''$, où le nombre $u = \frac{844}{60.26418} = \frac{1}{1878}$; l'autre donne $u = \frac{529}{60.13860} = \frac{1}{1572}$; & comme la différence de ces deux valeurs vient sans doute des erreurs des observations, qui pourroient être encore beaucoup plus grandes, si nous ne supposons les erreurs des observations que d'une minute, nous examinerons les autres observations marquées ci-dessus, avant que d'entreprendre la détermination de la lettre u .

§. CLX. Les observations de l'autre espece, où l'angle $\alpha - p$ est près de 6° , feront ainsi réduites au calcul :

I. Celle de l'année 1585.

$$\begin{aligned} 0^\circ 15' 44'' 0'' &= 0^\circ 21' 24'' 52'' + m'' + 3n'' - 23525'' \sin.67^\circ 17' - x'' \sin.67^\circ 17' + 0,114k'' \cos.67^\circ 17' \\ &- 32'' \sin.87^\circ 36' + 257'' \sin.66^\circ 31' - 168'' \sin.45^\circ 26' - y'' \sin.45^\circ 26' - \frac{1}{600} k'' \cos.45^\circ 26' \\ &+ 243'' \sin.40^\circ 15' - z'' \sin.5^\circ 57' + (\alpha + 7^\circ 22' 9'') u \cos.5^\circ 57'. \end{aligned}$$

II. Celle de l'année 1644.

$$\begin{aligned} 0^\circ 17' 38'' 0'' &= 0^\circ 23' 19'' 6'' + m'' + 62n'' - 23525'' \sin.66^\circ 38' - x'' \sin.66^\circ 38' + 0,114k'' \cos.66^\circ 38' \\ &- 32'' \sin.70^\circ 28' + 257'' \sin.78^\circ 8' - 168'' \sin.46^\circ 43' - y'' \sin.46^\circ 43' - \frac{1}{600} k'' \cos.46^\circ 43' \\ &+ 243'' \sin.12^\circ 3' - z'' \sin.7^\circ 11' + (\alpha + 5.360^\circ + 7^\circ 12' 25'') u \cos.7^\circ 11'. \end{aligned}$$

III. Celle de l'année 1673.

$$\begin{aligned} 0^\circ 11' 37'' 8'' &= 0^\circ 17' 55' 6'' + m'' + 91n'' - 23525'' \sin.72^\circ 47' - x'' \sin.66^\circ 47' + 0,114k'' \cos.72^\circ 47' \\ &- 32'' \sin.31^\circ 26' - 257'' \sin.88^\circ 30' - 178'' \sin.34^\circ 26' - y'' \sin.34^\circ 26' - \frac{1}{600} k'' \cos.34^\circ 26' \\ &- 243'' \sin.12^\circ 13' - z'' \sin.3^\circ 30' + (\alpha + 8.360^\circ + 0^\circ 19' 13'') u \cos.3^\circ 30'. \end{aligned}$$

94 RECHERCHES DES INEGALITES
IV. Celles de l'année 1703.

$$\begin{aligned} 0^{\circ} 19' 14'' 56'' &= 0^{\circ} 25' 13'' 21'' + m'' + 121n'' - 23525'' \sin. 66^{\circ} 0' - x'' \sin. 66^{\circ} 0' + 0,114k'' \cos. 66^{\circ} 0' \\ &- 32'' \sin. 48' 52'' + 257'' \sin. 89^{\circ} 34'' - 168'' \sin. 48^{\circ} 0' - y'' \sin. 48^{\circ} 0' - \frac{1}{660} k'' \cos. 48^{\circ} 0' \\ &+ 243'' \sin. 16' 12'' - z'' \sin. 8^{\circ} 14'' + (u + 10,360^{\circ} + 7^{\circ} 2' 40'') u \cos. 8^{\circ} 14'. \end{aligned}$$

V. Celles de l'année 1732.

$$\begin{aligned} 1^{\circ} 13' 27' 20'' &= 0^{\circ} 19' 49' 28'' + m'' + 150n'' - 23525'' \sin. 72^{\circ} 8' - x'' \sin. 72^{\circ} 8' + 0,114k'' \cos. 72^{\circ} 8' \\ &- 32'' \sin. 12^{\circ} 34'' - 257'' \sin. 78^{\circ} 37'' - 168'' \sin. 35^{\circ} 43' - y'' \sin. 35^{\circ} 43' - \frac{1}{660} k'' \cos. 35^{\circ} 43' \\ &- 243'' \sin. 2^{\circ} 11'' - z'' \sin. 4^{\circ} 6'' + (u + 13,360^{\circ} + 0^{\circ} 10' 23'') u \cos. 4^{\circ} 6'. \end{aligned}$$

§. CX. Ces équations étant évaluées tout-à-fait en nombres, donneront :

$$\begin{aligned} \text{I. } 1585. + 16' 49'' &= m'' + 3n'' - 0,922x'' - 0,712y'' + 0,0428k'' - 0,1036z'' + 0,9946uu^0 + 2300 u^0 \\ \text{II. } 1644. + 15' 18'' &= m'' + 62n'' - 0,918x'' - 0,728y'' + 0,0440k'' - 0,1250z'' + 0,9921uu^0 + 2006 u^0 \\ \text{III. } 1673. + 3' 33'' &= m'' + 91n'' - 0,955x'' - 0,565y'' + 0,0324k'' - 0,0610z'' + 0,9981uu^0 + 2898 u^0 \\ \text{IV. } 1703. - 3' 11'' &= m'' + 121n'' - 0,913x'' - 0,743y'' + 0,0453k'' - 0,1432z'' + 0,9891uu^0 + 3769 u^0 \\ \text{V. } 1732. - 2' 57'' &= m'' + 150n'' - 0,952x'' - 0,583y'' + 0,0336k'' - 0,0714z'' + 0,9974uu^0 + 4679 u^0 \end{aligned}$$

De ces équations la seconde ne paroît pas trop juste, & partant, en l'obmettant, nous trouverons :

$$\begin{aligned} \text{I—IV... } 20' 0'' &= -118n'' - 0,009x'' + 0,031y'' - 0,0025k'' + 0,0396z'' + 0,0055uu^0 - 3539u^0 \\ \& \text{ la moitié } 10' 0'' &= -59n'' - 0,005x'' + 0,015y'' - 0,0012k'' + 0,0198z'' + 0,0087uu^0 - 1769u^0 \\ \text{II—V... } 6' 30'' &= -59n'' - 0,003x'' + 0,018y'' - 0,0012k'' + 0,0104z'' + 0,0007uu^0 - 1781u^0 \end{aligned}$$

Et la différence $3' 30'' = 0,0094z'' + 12 u^0$; ce qui donneroit u fort grand.

Mais comparons une de ces équations avec une des premières du §. CVIII, en sorte que

$$\begin{aligned} 15' 17'' &= -59n'' + 1764 u^0 \quad \text{où je néglige les autres termes, comme étant} \\ 6' 30'' &= -59n'' - 1781 u^0 \quad \text{forts petits.} \end{aligned}$$

$$\text{Diff. } 8' 47'' = 3545 u^0, \& \text{ partant } u = \frac{1}{24216}.$$

Et cette valeur ayant été trouvée par des observations tout-à-fait contraires, elle ne sçauroit différer sensiblement de la vérité.

§. CXI. Si nous ajoutons ces dernières équations ensemble, il en résultera celle-ci: $21' 47'' = -118n''$, d'où l'on tire pour la valeur de n , -11 , de sorte que le mou-

vement moyen annuel de Saturne dans les Tables de M. Cassini est trop grand de 11". Or dans ces Tables, le moyen mouvement annuel de Saturne se trouve $= 0^{\circ} 12^{\circ} 13' 36''$, & on sera surpris qu'il ait été possible de se tromper de 11", ce qui fait deux heures dans le tems, & 60 heures dans le tems périodique de cette planete. Mais si nous regardons les Tables de M. Halley, nous verrons qu'il suppose le mouvement moyen annuel de Saturne $= 0^{\circ} 12^{\circ} 13' 21''$, c'est-à-dire de 15" plus petit que M. Cassini, de sorte que la vraie quantité tient un milieu entre ces deux Tables, étant $= 0^{\circ} 12^{\circ} 13' 25''$. La raison de cette différence entre ces deux célèbres Auteurs, est sans doute qu'ils n'ont eû égard à cette dernière inégalité, qui trouble le tems périodique, en le rendant tantôt trop grand, tantôt trop petit, selon les diverses situations de Saturne dans son orbite, par lesquelles on a voulu déterminer son tems périodique. Or cette inégalité deviendra continuellement plus grande, & partant le mouvement de cette planete paroîtra devenir de plus en plus irrégulier.

§. CXII. Pour nous assurer davantage de ces valeurs de n & de u , je considererai encore les observations des années 1583, 1642, 1672, 1701, 1731, où la valeur de q est à peu près $= 3^s$; & celles-ci serviront, avec les cinq premières, à connoître la valeur de m .

I. Celle de l'année 1583 donne,

$$\begin{aligned} 11^s 19^{\circ} 49' 30'' &= 11^s 26^{\circ} 2' 30'' + m'' + n'' - 23525'' \sin. 87^{\circ} 11' - x'' \sin. 87^{\circ} 11' - 0,114k'' \cos. 87^{\circ} 11' \\ &- 32'' \sin. 7^{\circ} 0' + 257'' \sin. 83^{\circ} 40' + 168'' \sin. 5^{\circ} 39' + y'' \sin. 5^{\circ} 39' - \frac{1}{600} k'' \cos. 5^{\circ} 39' \\ &+ 243'' \sin. 20^{\circ} 36' + z'' \sin. 17^{\circ} 6' + (u + 5^{\circ} 16' 24') u \cos. 17^{\circ} 6'. \end{aligned}$$

II. Celle de l'année 1642 donne,

$$\begin{aligned} 11^s 21^{\circ} 33' 48'' &= 11^s 27^{\circ} 56' 51'' + m'' + 60n'' - 23525'' \sin. 87^{\circ} 48' - x'' \sin. 87^{\circ} 48' - 0,114k'' \cos. 87^{\circ} 48' \\ &+ 32'' \sin. 15^{\circ} 10' + 257'' \sin. 84^{\circ} 37' + 168'' \sin. 4^{\circ} 23' + y'' \sin. 4^{\circ} 23' - \frac{1}{600} k'' \cos. 4^{\circ} 23' \\ &+ 243'' \sin. 8^{\circ} 16' + z'' \sin. 15^{\circ} 51' + (u + 5^{\circ} 36' 0 + 5^{\circ} 34') u \cos. 15^{\circ} 51'. \end{aligned}$$

III. Celle de l'année 1672 donne,

$$\begin{aligned} 11^{\circ} 28' 42'' 22'' &= 0^{\circ} 5' 14' 3'' + m'' + 90n'' - 23525'' \sin. 85^{\circ} 34' - x'' \sin. 85^{\circ} 34' + 0,114k'' \cos. 85^{\circ} 34' \\ &- 32'' \sin. 0^{\circ} 0' - 257'' \sin. 85^{\circ} 34' - 168'' \sin. 8^{\circ} 53' - y'' \sin. 8^{\circ} 53' - \frac{1}{600} k'' \cos. 8^{\circ} 53' \\ &- 243'' \sin. 10^{\circ} 48' + z'' \sin. 10^{\circ} 48' + (x + 7.360 + 11^{\circ} 19' 12'') u'' \cos. 10^{\circ} 48'. \end{aligned}$$

IV. Celle de l'année 1701 donne,

$$\begin{aligned} 11^{\circ} 23' 21' 18'' &= 11^{\circ} 29' 51' 10'' + m'' + 119n'' - 23525'' \sin. 88^{\circ} 26' - x'' \sin. 88^{\circ} 26' - 0,114k'' \cos. 88^{\circ} 26' \\ &+ 32'' \sin. 37^{\circ} 18' + 257'' \sin. 72^{\circ} 55' + 168'' \sin. 3^{\circ} 8' + y'' \sin. 3^{\circ} 8' - \frac{1}{600} k'' \cos. 3^{\circ} 8' \\ &- 243'' \sin. 4^{\circ} 18' + z'' \sin. 14^{\circ} 21' + (x + 10.360 + 4^{\circ} 27' 0'') u'' \cos. 14^{\circ} 21'. \end{aligned}$$

V. Celle de l'année 1731 donne,

$$\begin{aligned} 0^{\circ} 0' 30' 50'' &= 0^{\circ} 7' 8' 25'' + m'' + 149n'' - 23525'' \sin. 84^{\circ} 56' - x'' \sin. 84^{\circ} 56' + 0,114k'' \cos. 84^{\circ} 56' \\ &+ 32'' \sin. 19^{\circ} 6' - 257'' \sin. 75^{\circ} 23' - 168'' \sin. 10^{\circ} 9' - y'' \sin. 10^{\circ} 9' - \frac{1}{600} k'' \cos. 10^{\circ} 9' \\ &- 243'' \sin. 0^{\circ} 40' + z'' \sin. 10^{\circ} 13' + (x + 12.360 + 11^{\circ} 10' 14'') u'' \cos. 10^{\circ} 13'. \end{aligned}$$

§. CXIII. Ces équations étant exprimées en nombres, donneront :

$$\begin{aligned} \text{I. } 1583.. + 12' 47'' &= m'' + n'' - 1,00x'' + 0,098y'' - 0,0072k'' + 0,2942z'' + 0,956au'' + 159u'' \\ \text{II. } 1642.. + 3' 35'' &= m + 60n - 1,00x + 0,076y - 0,0060k + 0,273z + 0,962au + 1885u \\ \text{III. } 1672.. + 4' 41'' &= m + 90n - 1,00x - 0,154y + 0,0072k + 0,187z + 0,982au + 2814u \\ \text{IV. } 1701.. - 2' 15'' &= m + 119n - 1,00x + 0,055y - 0,0048k + 0,248z + 0,968au + 3627u \\ \text{V. } 1731.. - 2' 31'' &= m + 149n - 1,00x - 0,176y + 0,0084k + 0,177z + 0,984au + 4586u \end{aligned}$$

De-là en éliminant $m, x, y, k, z, \& u$, nous aurons :

$$\begin{array}{l|l} \text{I} - \text{II.} + 9' 12'' &= -59n - 1726u'' \\ \text{II} - \text{IV.} + 5, 50 &= -59n - 1742u \\ \text{III} - \text{V.} + 7, 12 &= -59n - 1772u \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{or, auparavant nous avons} \\ 10' 2'' = -59n + 1555u'' \\ 24' 6'' = -59n + 1995u \\ 15' 17'' = -59n + 1764u. \end{array} \right.$$

En comparant ces équations, nous trouverons presque constamment $n = -11$; & les deux dernières équations donnent $u = \frac{1}{26246}$, ce qui s'accorde fort bien avec la valeur trouvée ci-dessus $u = \frac{1}{24216}$; & partant nous pourrions prendre un milieu, & supposer $u = \frac{1}{25000}$ pour les degrés, & $u = \frac{1}{7}$ pour les secondes.

§. CXIV. Pour trouver la valeur de m , considérons ces deux équations :

$$\begin{aligned}
 1731 \dots -2' 31'' &= m + 149n - 1,00x - 0,176y + 0,0084k + 0,177z + 0,984u + 4586u^\circ \\
 1745 \dots -5' 6'' &= m + 163n + 1,00x + 0,130y + 0,0058k - 0,182z - 0,983u - 4982u^\circ \\
 \text{dont la somme} &= -7, 37 = 2m + 312n - 0,046y + 0,0142k - 0,005z - 396u^\circ,
 \end{aligned}$$

dans laquelle nous pouvons sûrement rejeter les termes qui contiennent y , k & z , & nous aurons :

$$-457'' = 2m - 3432'' - 56'', \text{ ou bien } 2m = +3031'' \text{ \& } m = 1515'' = 25' 15''.$$

Pour être plus sûr de cette valeur, je choisirai deux autres équations :

$$\begin{aligned}
 1672 \dots + 4' 41'' &= m + 90n - 1,00x - 0,154y + 0,0072k + 0,187z + 0,982u + 2814u^\circ \\
 1686 \dots + 10' 11'' &= m + 104n + 1,00x + 0,152y + 0,0070k - 0,187z - 0,982u - 3218u^\circ \\
 \text{dont la som.} &= +14' 52'' = 2m + 194n + 0,0142k - 404u^\circ.
 \end{aligned}$$

$$\text{ou bien } + 892'' = 2m - 2134'' - 58'', \text{ \& } 2m = 3084'', \text{ \& } m = 1542'' = 25' 42'',$$

comme auparavant. Et si on ne vouloit pas négliger le terme k , on auroit :

$$m = 25' 30'' - 0,0071k''.$$

Mais pour voir si la valeur de k peut altérer cette valeur, je considérerai deux autres équations :

$$\begin{aligned}
 1701 \dots - 2' 15'' &= m + 119n - 1,00x + 0,055y - 0,0048k + 0,248z + 0,968u + 3627u^\circ \\
 1716 \dots - 18' 23'' &= m + 134n + 1,00x - 0,079y - 0,0062k - 0,137z - 0,990u - 4151u^\circ \\
 \text{ce qui donne} &= -20' 38'' = 2m + 253n - 0,0110k + 0,111z - 0,022u - 524u^\circ,
 \end{aligned}$$

$$\text{ou } m = 13' 30'' + 0,0055k'' - 0,055z'' + 0,011u^\circ; \text{ une autre combinaison donne :}$$

$$m = 18' 35'' + 0,0060k'' - 0,070z'' + 0,016u^\circ,$$

de sorte qu'on est incertain combien les valeurs de k , z , & u° dérangent celles de m .



I X.

Recherche des autres inégalités qui se trouvent dans le Mouvement de Saturne.

§. CXV. **A**YANT trouvé dans l'article précédent les valeurs des lettres n & u , d'où dépendent le tems périodique de Saturne & ses variations, sçavoir $n = -11''$, & $u = \frac{1}{25000}$ pour le calcul en degrés, & $u = \frac{1}{7}$ pour le calcul en secondes, il ne reste que six lettres à déterminer : m , k , x , y , z & u . Or nous avons déjà exprimé la valeur de m par celle de k , ayant trouvé cette égalité : $m = 25' 30'' - 0,0071 k''$; de sorte qu'on pourra aussi par-tout éliminer la lettre m . Mais dans le §. précédent, si au lieu d'ajouter les équations d'où nous avons tiré la valeur de m , nous retranchons l'une de l'autre, les deux premières paires nous donneront les valeurs suivantes pour x .

$$x = 683'' - 0,153 y'' + 0,179 z'' + 0,984 u''$$

$$x = 673'' - 0,153 y'' + 0,187 z'' + 0,982 u'', \text{ \& prenant un milieu ;}$$

$$x = 678'' - 0,153 y'' + 0,183 z'' + 0,983 u''.$$

Mais la troisieme paire fournit cette valeur de x .

$$x = 154'' + 0,067 y'' + 0,192 z'' + 0,980 u''.$$

D'où nous pouvons conclurre que la valeur de y est fort considérable.

§. CXVI. Pour arriver à la connoissance des quatre autres lettres k , y , z & u , il faut remarquer, que chacune de ces lettres doit être déterminée par des équations où elle obtienne le plus grand coëfficient, tant affirmatif que négatif. Pour cet effet, si nous voulons commencer

par k , dont le coefficient est $\cos. q$, nous devons choisir les observations des années 1723, 1708, 1694, 1679, où je ne ferai plus d'usage des observations plus anciennes, puisqu'elles n'ont servi que pour connoître le tems périodique.

I. Celle de 1679 donne,

$$\begin{aligned} 3^s 4^m 54^s 4'' &= 3^s 4^m 7^s 3'' + m'' + 97n'' + 23525'' \sin. 6^\circ 47' + x'' \sin. 6^\circ 47' + 0,114k'' \cos. 6^\circ 47' \\ &+ 32'' \sin. 72^\circ 12' - 257'' \sin. 60,41' + 168 \sin. 13,35 + y \sin. 13,35 + \frac{1}{600} k'' \cos. 13^\circ 35' \\ &- 243 \sin. 41,44 - z \sin. 84,22 + (x + 8.360 + 7^\circ 0' 28'') u \cos. 84^\circ 22'. \end{aligned}$$

II. Celle de 1694 donne,

$$\begin{aligned} 9,1,12,6 &= 9,1,23,10 + m + 112n - 23525'' \sin. 3^\circ 10' - x'' \sin. 3^\circ 10' - 0,114k'' \cos. 3^\circ 10' \\ &- 32'' \sin. 64^\circ 2' + 257'' \sin. 28^\circ 51' + 168 \sin. 6,20 + y \sin. 6,20 + \frac{1}{600} k'' \cos. 6^\circ 12' \\ &- 243 \sin. 47,15 + z \sin. 79,17 - (x + 9.360 + 9^\circ 21' 19'') u \cos. 79^\circ 17'. \end{aligned}$$

III. Celle de 1708 donne,

$$\begin{aligned} 2,28,37,11 &= 2,28,43,15 + m + 126n + 23525'' \sin. 0^\circ 23' + x'' \sin. 0^\circ 23' + 0,114k'' \cos. 0^\circ 23' \\ &+ 32'' \sin. 37,38 + 257'' \sin. 71,34 + 168 \sin. 0,46 + y \sin. 0,46 + \frac{1}{600} k'' \cos. 0,46 \\ &+ 243 \sin. 29,23 - z \sin. 79,26 + (x + 11.360 + 0^\circ 8' 15'') u \cos. 79^\circ 26'. \end{aligned}$$

IV. Celle de 1723 donne,

$$\begin{aligned} 8,26,12,6 &= 8,26,1,8 + m + 141n + 23525'' \sin. 2^\circ 31' + x'' \sin. 2^\circ 31' - 0,114k'' \cos. 2^\circ 31' \\ &- 32'' \sin. 12,50 - 257'' \sin. 8,56 - 168 \sin. 5,2 - y \sin. 5,2 + \frac{1}{600} k'' \cos. 5,2 \\ &+ 243 \sin. 72,48 + z \sin. 79,13 - (x + 12.360 + 2^\circ 25' 38'') u \cos. 79^\circ 13'. \end{aligned}$$

§. CXVII. Ces équations étant réduites en nombres, donneront :

$$\text{I. } 1679.. + 5' 55'' = m'' + 97n'' + 0,118x'' + 0,235y'' + 0,129k'' - 0,995z'' + 0,098au'' + 303u''$$

$$\text{II. } 1694.. + 11 40 = m + 112n - 0,055x + 0,110y - 0,097k + 0,982z - 0,186au - 657u$$

$$\text{III. } 1708.. - 15 3 = m + 126n + 0,007x + 0,013y + 0,130k - 0,983z + 0,183au + 726u$$

$$\text{IV. } 1723.. - 9 10 = m + 141n + 0,044x - 0,088y - 0,098k + 0,982z - 0,186au - 819u.$$

De-là on pourra encore déterminer la valeur de m , en en ajoutant deux ensemble.

$$\text{III} + \text{IV. donne } m = 748'' - 0,025x'' + 0,038y'' - 0,016k''$$

$$\text{II} + \text{III. donne } m = 1204 + 0,024x - 0,062y - 0,017k''.$$

d'où l'on tirera $m = 976'' - 0,012y'' - 0,016k''$, & $x = 2y - 9080''$; mais cette dernière détermination n'est

pas sûre, à cause de la petitesse des coefficients de x & y .

Mais prenant ces sommes, & les autres différences :

$$\begin{aligned} I + III.. &= 9' 8'' = 2m + 223n + 0,125x + 0,248y + 0,259k - 1,978z + 0,281u + 1029u \\ II + IV.. &+ 2,30 = 2m + 253n - 0,011x + 0,022y - 0,195k + 1,964z - 0,372u - 1476u \\ I - IV.. &+ 15, 5 = - 44n + 0,074x + 0,323y + 0,227k - 1,977z + 0,284u + 1122u \\ -II + III.. &- 26,43 = + 14n + 0,062x - 0,098y + 0,227k - 1,965z + 0,369u + 1383u. \end{aligned}$$

De la différence de ces deux dernières équations, on tire, $1907'' = 0,012x + 0,421y - 0,085u$; & si $x = 2y - 9080$, on aura $2006'' = 0,445y - 0,085u$; d'où l'on voit que la valeur de y doit être très-considérable, & peut-être plus grande d'un degré; ce qui feroit une marque [infaillible] que la force du Soleil ne décroît point en raison réciproque des quarrés des distances.

§. CXVIII. Substituons dans ces équations les valeurs déjà trouvées, sçavoir :

$$m = 1500 - 0,007k; n = -11, u = \frac{1}{7} \& x = 678'' - 0,153y'' + 0,183z'' + 0,983u'',$$

& nous aurons les équations suivantes :

$$\begin{aligned} II + III.. &= - 280'' - 0,010k'' - 0,066y'' + 0,004z'' + 0,024u'' \\ I + III.. &= + 1327 + 0,245k + 0,229y - 1,955z + 0,404u \\ II + IV.. &= - 152 - 0,209k + 0,024y + 1,962z - 0,383u \\ I - IV.. &= - 206 + 0,227k + 0,313y - 1,966z + 0,360u \\ III - II.. &= + 1689 + 0,227k - 0,107y - 1,954z + 0,431u, \end{aligned}$$

où la différence des dernières donne $0 = 1895 - 0,420y + 0,012z + 0,071u''$; & par conséquent $y = 4514'' + 0,029z'' + 0,171u''$, laquelle valeur n'est pas pour tant trop sûre, mais dans la suite elle sera déterminée plus exactement. Substituons cette valeur dans la dernière équation, & nous aurons :

$$0 = 1207'' + 0,227k'' - 1,957z'' + 0,413u'',$$

d'où nous tirons $k = - 5320'' + 8,621z'' - 1,826u''$.

Ces deux valeurs étant substituées dans l'équation II + IV, elle prendra cette forme :

$$0 = 1070'' + 0,1562'' + 0,0031u''.$$

Mais il est trop dangereux d'en tirer la valeur de z . Or si nous appliquons ces mêmes valeurs de y & de k dans la première équation II+III, nous trouverons :

$$0 = 528 + 0,0842 - 0,0312u'',$$

& ces deux dernières équations donnant $z = -6821$, on trouvera $m = 1930''$; $x = -1220'' + 0,957u''$; & $y = 4316'' + 0,171u''$. Mais dans la valeur de k je n'ose pas encore substituer celle de z , parce que son coefficient est trop grand.

§. CXIX. Dans les équations que j'ai tirées jusqu'ici des observations, le coefficient de y a été fort petit, & par cette raison je ne puis pas me fier à sa valeur, que je viens de trouver. Je considérerai donc encore quelques équations, où le coefficient de y , c'est-à-dire $\sin. 2q$ devient le plus grand, en employant les observations de 1690 & 1727.

Celles de 1690 donnent,

$$\begin{aligned} 7^{\circ}15'34''0'' = 7^{\circ}10' \quad 51'20'' + m'' + 108n'' + 23525'' \sin.44^{\circ}49' + x'' \sin.44^{\circ}49' - 0,114k'' \cos.44^{\circ}49' \\ + 32'' \sin.70,54 - 257 \sin.9,43 - 168 \sin.89,39 - y \sin.89,39 + \frac{1}{600} k' \cos.89^{\circ}39' \\ - 243 \sin.88,20 + z'' \sin.37^{\circ}7' - (a + 9.360 + 5^{\circ}12'34'') u \cos.37^{\circ}7'. \end{aligned}$$

Celle de 1727 donne,

$$\begin{aligned} 10,11,48,7 = 10,16, 31, 8 + m' + 145n'' - 23525'' \sin.45^{\circ}30' - x'' \sin.45,30 - 0,114k'' \cos.45,30 \\ + 32 \sin.9,50 - 257 \sin.49,25 + 168 \sin.89, 1 + y \sin.89, 1 - \frac{1}{600} k' \cos.89, 1 \\ + 243 \sin.25,30 + z'' \sin.59^{\circ}35' + (a + 12.360 + 7^{\circ}5'20'') u \cos.59,35. \end{aligned}$$

qui étant réduites en nombres, produisent :

$$\begin{aligned} 1690... \quad + 13'20'' = m'' + 108n'' + 0,705x'' - 1,000y'' - 0,0809k'' + 0,6032'' - 0,797u'' - 2713u'' \\ 1727... \quad - 4350 = m + 145n - 0,713x + 1,000y'' - 0,0798k'' + 0,8622'' + 0,506au'' + 2297u'' \\ \text{la différence} + 18'10'' = -37n'' + 1,418x - 2y - 0,0010k - 0,2592'' - 1,303au'' - 5010u'' \\ \& \text{ partant} \quad y = -700'' + 0,709x'' - 0,1292'' - 0,6512u''. \end{aligned}$$

§. CXX. La somme de ces deux équations donne :

N iij

$$+ 8'30'' = 2m'' + 253n'' - 0,008x - 0,1607k'' + 1,465z - 0,291uu'' - 476u''$$

$$\text{ou } 0 = -350 \quad -0,008x - 0,175k + 1,465z - 0,291uu''.$$

Or pour déterminer plus précisément les autres lettres, je remarque que les coefficients des lettres x & u sont par-tout presque égaux, avec des signes contraires, de même que les coefficients de k & de z . La raison en est, que les angles q & $u - p$ sont presque toujours la même somme, qui est à peu près $= 270^\circ$; c'est pourquoi on déterminera plus sûrement la différence de ces deux lettres, que chacune à part. Je supposerai donc, pour rendre la résolution plus aisée :

$$x = r + s; \quad uu = r - s \quad \& \quad 0,114k = t + v; \quad z = t - v, \quad \text{ou } k = 9t + 9v$$

& les deux dernières équations se changeront en

$$y = -700'' + 0,058r + 1,360s - 0,179t + 0,080v$$

$$0 = -350 - 0,299r + 0,283s - 0,110t - 3,040v.$$

De cette dernière équation nous tirons :

$$v = -115 - 0,099r + 0,094s - 0,036t,$$

qui, étant substituées dans la première, donne :

$$y = -709 + 0,050r + 1,368s - 0,182t,$$

& les valeurs déjà trouvées plus haut, seront :

$$n = -11; \quad u = \frac{1}{7}$$

$m = 1507 + 0,006r - 0,006s - 0,061t$, & pour la valeur de x , on aura :

$$0 = 786 - 0,025r - 2,192s + 0,030t, \quad \text{qui donne } s = 360 - 0,012r + 0,015t,$$

$$\& \text{ partant } v = -81 - 0,100r - 0,035t; \quad \& \quad y = -217 + 0,034r - 0,162t,$$

$$\text{de plus } 0 = 513 + 0,015r - 0,208t, \quad \& \quad 0 = +1960 + 0,059r + 0,083t,$$

$$0 = +1081 + 0,020r + 0,162t.$$

§. CXXI. Mais puisque par la combinaison de deux ou plusieurs équations, les erreurs des observations & du calcul se peuvent multiplier, je substituerai les valeurs que je viens de trouver, & qui paroissent assez certaines dans

Les équations qui ont été immédiatement déduites des observations. J'employerai donc les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{l} m = 1500 + 0,006r - 0,061t \\ n = -11 \\ x = r + s \\ y = -217 + 0,034r - 0,162t \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} k = 9t + 9v \\ z = t - v \\ au = r - s \\ u = \frac{r}{7} \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} s = 360 - 0,012r + 0,015t \\ v = -81 - 0,100r - 0,035t \end{array}$$

& les équations qui ont été déduites des observations de ce siècle seront :

$$\begin{array}{l} 1745... 0 = -32 - 0,021r - 0,190t \\ 1732... 0 = +89 + 0,016r + 0,227t \\ 1731... 0 = -1 + 0,018r + 0,192t \\ 1716... 0 = +1263 - 0,025r - 0,213t \\ 1723... 0 = 634 + 0,044r + 0,122t \\ 1708... 0 = +1014 - 0,387r + 0,052t \end{array}$$

Or de ces équations on ne sçauroit rien conclurre ; & la raison en est , peut-être , que j'ai voulu satisfaire exactement à quelques observations , au lieu que je ne l'aurois dû faire qu'à peu près ; & cette faute s'est ensuite augmentée.

§. CXXII. Afin qu'on puisse mieux voir de quelle nature doivent être les valeurs des lettres r, s, t, v & y , après avoir supposé $n = -11$, & $u = \frac{r}{7}$, je ferai $m = 1200 + \mu$, & toutes les équations que j'ai trouvées jusqu'ici , se changeront en celles-ci :

		L'équation " étoit
I.	$A.1583..0 = + 445 + \mu - 0,044r - 1,956s + 0,231t - 0,357v + 0,098y$	$+ 23''$
II.	$A.1585..0 = + 191 + \mu + 0,073r - 1,917s + 0,283t + 0,491v - 0,712y$	$+ 33$
III.	$A.1598..0 = - 7 + \mu + 0,012r + 1,988s - 0,209t + 0,137v - 0,036y$	$- 86$
IV.	$A.1642..0 = + 594 + \mu - 0,038r - 1,962s + 0,219t - 0,327v + 0,076y$	$+ 269$
V.	$A.1644..0 = - 113 + \mu + 0,074r - 1,910s + 0,271t + 0,521v - 0,728y$	$+ 287$
VI.	$A.1657..0 = - 276 + \mu + 0,012r + 1,988s - 0,199t + 0,109v - 0,057y$	$- 308$
VII.	$A.1672..0 = + 331 + \mu - 0,018r - 1,982s + 0,250t - 0,124v - 0,154y$	$+ 402$
VIII.	$A.1673..0 = + 400 + \mu + 0,043r - 1,953s + 0,227t + 0,349v - 0,565y$	$+ 414$
IX.	$A.1679..0 = - 179 + \mu + 0,216r + 0,020s + 0,166t + 2,156v + 0,235y$	$+ 43$
X.	$A.1686..0 = - 1014 + \mu - 0,018r + 1,982s - 0,124t + 0,250v + 0,152y$	$- 459$
XI.	$A.1690..0 = - 1175 + \mu - 0,092r + 1,502s - 0,126t - 1,332v - 1,000y$	$- 387$
XII.	$A.1694..0 = - 826 + \mu - 0,241r + 0,131s + 0,109t - 1,855v + 0,110y$	$- 94$
XIII.	$A.1701..0 = + 544 + \mu - 0,032r - 1,968s + 0,203t - 0,293v + 0,055y$	$+ 518$
XIV.	$A.1703..0 = + 598 + \mu + 0,076r - 1,902s + 0,262t + 0,548v - 0,743y$	$+ 538$
XV.	$A.1708..0 = + 821 + \mu + 0,190r - 0,176s + 0,187t + 2,153v + 0,013y$	$+ 104$
XVI.	$A.1716..0 = + 236 + \mu + 0,010r + 1,990s - 0,191t + 0,083v - 0,079y$	$- 593$
XVII.	$A.1723..0 = + 82 + \mu - 0,142r + 0,230s + 0,100t - 1,864v - 0,088y$	$- 117$
XVIII.	$A.1727..0 = + 223 + \mu - 0,207r - 1,219s + 0,142t - 1,582v + 1,000y$	$+ 328$
XIX.	$A.1731..0 = + 367 + \mu - 0,016r - 1,984s + 0,249t - 0,105v - 0,176y$	$+ 655$
XX.	$A.1732..0 = + 395 + \mu + 0,045r - 1,949s + 0,235t + 0,377v - 0,583y$	$+ 668$
XXI.	$A.1745..0 = - 999 + \mu + 0,017r + 1,983s - 0,128t + 0,236v + 0,130y$	$- 712$

§. CXXIII. Ici nous voyons d'abord, que si nous faisons les valeurs des lettres μ, r, s, t, v & $y = 0$, la plus grande erreur négative du calcul seroit $= 1175$, & la plus grande erreur affirmative $= 821$: donc si nous faisons $\mu = 177$, ces erreurs deviendront égales, & chacune sera $= 998''$ ou $16' 38''$, qui sera déjà plus petite que celle à laquelle les Tables ordinaires sont sujettes. De plus je remarque, que si au lieu de mettre $u = \frac{1}{7}$, je supposois $u = \frac{1}{28}$ pour les secondes, ou $u = \frac{1}{190000}$ pour les degrés, ainsi que la théorie nous a montré, les erreurs du calcul seroient :

I. A.

I. $A. 1583..0 = +428'' + \mu \text{ } \acute{e}c.$	XII. $A. 1694..0 = -755 + \mu \text{ } \acute{e}c.$
II. $A. 1585..0 = +166 + \mu \text{ } \acute{e}c.$	XIII. $A. 1701..0 = +155 + \mu \text{ } \acute{e}c.$
III. $A. 1598..0 = +58 + \mu \text{ } \acute{e}c.$	XIV. $A. 1703..0 = +194 + \mu \text{ } \acute{e}c.$
IV. $A. 1642..0 = +392 + \mu \text{ } \acute{e}c.$	XV. $A. 1708..0 = +743 + \mu \text{ } \acute{e}c.$
V. $A. 1644..0 = -328 + \mu \text{ } \acute{e}c.$	XVI. $A. 1716..0 = +681 + \mu \text{ } \acute{e}c.$
VI. $A. 1657..0 = -45 + \mu \text{ } \acute{e}c.$	XVII. $A. 1723..0 = +170 + \mu \text{ } \acute{e}c.$
VII. $A. 1672..0 = +29 + \mu \text{ } \acute{e}c.$	XVIII. $A. 1727..0 = -23 + \mu \text{ } \acute{e}c.$
VIII. $A. 1673..0 = +89 + \mu \text{ } \acute{e}c.$	XIX. $A. 1731..0 = -124 + \mu \text{ } \acute{e}c.$
IX. $A. 1679..0 = -211 + \mu \text{ } \acute{e}c.$	XX. $A. 1732..0 = -106 + \mu \text{ } \acute{e}c.$
X. $A. 1686..0 = -670 + \mu \text{ } \acute{e}c.$	XXI. $A. 1745..0 = -465 + \mu \text{ } \acute{e}c.$
XI. $A. 1690..0 = -885 + \mu \text{ } \acute{e}c.$	

Et si nous faisons à présent $\mu = 71$, la plus grande erreur, tant affirmative que négative montera à $814'' = 13' 34''$, qui est déjà plus petite que la précédente.

§. CXXIV. Pour diminuer davantage ces erreurs, je ne vois pas de valeurs à donner aux lettres r, s, t, v & y , à moins que celles des lettres r & t ne soient extrêmement grandes, auquel cas il faudroit des observations beaucoup plus exactes, pour en pouvoir tirer ces valeurs par la méthode ordinaire. Mais j'observe, que si l'on ajoute encore cette équation $+540 \sin. (2a - p)$; les erreurs non-seulement seront diminuées considérablement, mais on pourra déterminer des valeurs pour les autres lettres, qui les diminueront encore davantage. Ayant donc ajouté par-tout cette équation, outre la valeur $u = \frac{1}{28}$, les erreurs du calcul pour chaque observation seront:

		Erreurs.	Soit $v = -100$	Erreurs.	Soit $s = 50$	Erreurs.
I.	A. 1583.	+239"	+ 36	+ 275	- 98	+ 177
II.	A. 1585.	- 179	- 49	- 228	- 96	- 324
III.	A. 1598.	- 482	- 14	- 496	+ 99	- 397
IV.	A. 1642.	+ 317	+ 33	+ 350	- 98	+ 252
V.	A. 1644.	- 581	- 52	- 633	- 95	- 728
VI.	A. 1657.	- 572	- 11	- 583	+ 99	- 484
VII.	A. 1672.	+ 125	+ 12	+ 137	- 99	+ 38
VIII.	A. 1673.	+ 200	- 35	+ 165	- 97	+ 68
IX.	A. 1686.	- 213	- 25	- 238	+ 99	- 139
X.	A. 1690.	- 345	+ 133	- 212	+ 75	- 137
XI.	A. 1694.	- 361	+ 185	- 176	+ 6	- 170
XII.	A. 1701.	+ 191	+ 29	+ 220	- 98	+ 122
XIII.	A. 1703.	+ 44	- 55	- 11	- 95	- 106
XIV.	A. 1708.	+ 482	- 215	+ 267	- 9	+ 258
XV.	A. 1716.	+ 188	- 8	+ 180	+ 99	+ 279
XVI.	A. 1723.	- 332	+ 186	- 146	+ 11	- 135
XVII.	A. 1727.	- 250	+ 158	- 92	- 61	- 153
XVIII.	A. 1731.	- 118	+ 10	- 108	- 99	- 207
XIX.	A. 1732.	- 87	- 37	- 124	- 97	- 221
XX.	A. 1745.	- 64	- 24	- 88	+ 99	+ 11

§. CXXV. On voit par-là que la dernière hypothèse $s = 50$, ne rend point les erreurs plus petites, & on ne sçauroit trouver des valeurs pour les autres lettres, qui diminuassent davantage les erreurs, que n'a fait la supposition $v = -100$. Car à l'exception des observations des années 1642, 1644 & 1657, qui n'ont pas été faites par des Astronomes du premier ordre, les autres erreurs ne montent qu'à $+ 267''$, & $- 238''$, si nous ne faisons point attention aux observations plus anciennes. Et parant, si l'on met $\mu = -15$, l'une & l'autre erreur ne sera que de $252''$, ou $4' 12''$; & je doute fort qu'il soit possible de rendre ces erreurs plus petites: je crois même qu'on doit

être content d'avoir réduit les erreurs des Tables de Saturne entre des limites qui ne different que de $4' 12''$ de la vérité, puisqu'elles montoient auparavant jusqu'à $20'$. Or, si la dernière équation $+540 \sin. (2^a - p)$ est fondée comme la théorie avoit fourni celle-ci $-243 \sin. (2^a - p)$, il faudra employer au lieu de celle-ci, presque sa négative $+297 \sin. (2^a - p)$; ce qui m'a fait soupçonner d'abord que je m'étois trompé dans le signe: mais ayant réitéré le calcul, je n'y ai pourtant pas trouvé cette faute. De sorte que c'est une preuve évidente que la théorie Newtonienne n'est pas trop d'accord avec les observations; ce qui se confirme encore par les erreurs qui sont restées, puisqu'elles ne sçauroient être attribuées tout-à-fait aux observations.

§. CXXVI. Comme il n'y a pas de valeurs pour les lettres s & y , qui puissent diminuer les erreurs, je ferai $s = 0$; $y = 0$; & pour les lettres r & t , il sera indifférent de leur donner des valeurs quelconques au-dessous de 100 , puisque les variations qui en résultent, seront moindres que $25''$. Je supposerai donc $t = -100$, pour rendre la valeur de $z = 0$, afin que l'inégalité $-z \sin. (a - p)$ s'évanouisse. Soit ensuite aussi $r = 0$, & puisque $\mu = -15$, les valeurs des élémens des Tables de Saturne seront:

$$m = 1185''; n = -11''; x = 0; y = 0; k = -1800''; z = 0; w = 0; \& u = \frac{1}{18}.$$

D'où je tire la méthode suivante de construire des Tables plus exactes pour calculer le lieu de Saturne, lesquelles depuis 1672 jusqu'à 1745, ne s'écartent de la vérité que de $4' 12''$ tout au plus; & comme cet intervalle de tems surpasse deux révolutions de Saturne, après lesquelles cette planète revient à peu près dans les mêmes situations, tant par rapport à son orbite, que par rapport à Jupiter, on peut être assuré que ces mêmes Tables serviront à dé-

terminer le lieu de Saturne pour tous les tems propofés ; tant avant qu'après ces termes marqués.

CXXVII. Je prendrai donc pour bafe les Tables de M. Caffini , & je déterminrai tant les corrections qu'il y faut apporter , que les nouvelles équations qu'on y doit ajoûter , pour trouver la place de Saturne au degré marqué de précision.

I. A la longitude moyenne de Saturne , que ces Tables marquent , il faut premierement ajoûter $1185''$; enfuite il en faut retrancher autant de fois $11''$ qu'il y aura d'années écoulées depuis 1582. Donc pour l'année 1700, il faudra fouftraire $113''$, ou $1' 53''$ de la longitude moyenne ; & pour l'année 1600, il y faut ajoûter $987''$, ou $16' 27''$: de forte que nous aurons pour ces deux époques :

A. 1600. Longitude moyenne..... $6^s 15^o 47' 13''$

A. 1700. Longitude moyenne..... $11 \quad 8 \quad 56 \quad 20$

Donc le mouvement moyen pendant 100 ans fera..... $4 \quad 23 \quad 9 \quad 7$

& le mouvement moyen pendant une année commune fera.. $0 \quad 12 \quad 23 \quad 25$

ce qui fuffit pour avoir la longitude moyenne de Saturne à chaque instant propofé.

II. Enfuite ayant trouvé $k = -1800'' = -30' 0''$, on doit , à chaque instant propofé, fouftraire $30'$ de l'anomalie excentrique , ou , ce qui revient au même , de l'anomalie moyenne de Saturne , qui eft tirée des Tables. Donc l'anomalie moyenne pour l'année 1700, qui , felon les Tables , fe trouve $= 2^s 10^o 49' 34''$, fera en effet $= 2^s 10^o 19' 34''$, & partant le lieu de l'aphélie pour ce tems A. 1700 fera : $8^s 28^o 36' 46''$. Or les Tables le marquent $8^s 28^o 8' 39''$. Donc puiſque le mouvement annuel de l'aphélie eft juſte , on n'aura qu'à ajoûter conſtamment $28' 7''$ au lieu de l'aphélie de Saturne , que les Tables marquent , ainſi

A. 1600. Lieu de l'Aphélie..... $8^{\circ} 26' 27''$

A. 1700. Lieu de l'Aphélie..... $8^{\circ} 28' 36'' 46''$

De-là on trouvera l'anomalie moyenne ; & puisque $x = 0$ & $y = 0$, la Table marquera la vraie équation du centre de Saturne, pourvu qu'on augmente la plus grande équation, qui est $6^{\circ} 31' 40''$ de $30''$, ce qui la donnera de $6^{\circ} 32' 10''$.

III. En troisieme lieu, il faut calculer la place de Jupiter, & son anomalie excentrique p : supposant l'anomalie excentrique de Saturne $= q$; soustrayant la longitude de Saturne de celle de Jupiter, soit le reste $= \omega$. En cherchant les valeurs des angles 2ω , $\omega - q$; $\omega - p$ & $2\omega - p$, on tirera aisément les corrections suivantes :

$$-32'' \sin. 2\omega - 257'' \sin. (\omega - q) + 297'' \sin. (2\omega - p),$$

par le moyen desquelles il faut corriger la place de Saturne déjà trouvée.

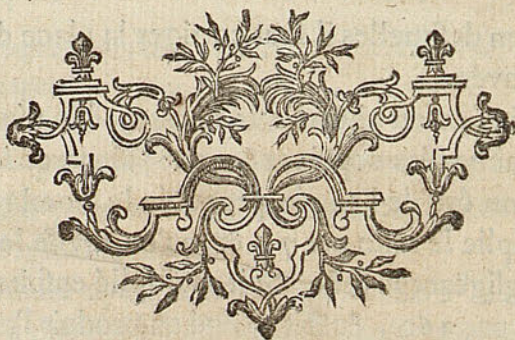
IV. Enfin, qu'on cherche le nombre des révolutions de Jupiter achevées depuis 1582, que j'ai marquées §. CIV, ou bien qu'on ôte de l'année proposée le nombre 1578, qu'on multiplie le reste par 7, & qu'on divise le produit par 83 ; négligeant le reste. Soit multiplié ensuite le quotient entier par 360, & soit ajouté au produit l'anomalie de Jupiter p , exprimée en degrés, & la somme divisée par 28 : le quotient étant supposé $= Q$; on aura la dernière équation $= -Q'' \cos. (\omega - p)$, qui étant appliquée, donnera le vrai lieu de Saturne dans son orbite ; d'où, à l'aide du lieu du nœud de Saturne, on trouvera sa longitude & sa latitude héliocentrique.

§. CXXVIII. Pour trouver enfin la vraie distance de Saturne, puisqu'en supposant la distance moyenne de la Terre au Soleil $= 100000$, la distance moyenne de Saturne au Soleil est $f = 954008$: on tirera du §. LXXXI, en

changeant le signe du terme $\cos. (2\omega - p)$, l'expression suivante pour la vraie distance de Saturne au Soleil z :

$$z = 954008 + 54382 \cos. q + 815 \cos. \omega + 358 \cos. (\omega - q) + 2 \frac{1}{2} Q \sin. (\omega - p) \\ + 136 \cos. 2\omega - 572 \cos. (2\omega - p),$$

où Q marque le même nombre que dans le §. précédent. Or les deux premiers termes ensemble $954008 + 54382 \cos. q$ sont déjà marqués assez exactement dans les Tables de M. Cassini, de sorte qu'on n'aura qu'à y appliquer les valeurs des cinq autres termes suivant leurs signes : & connoissant la distance vraie de Saturne au Soleil, on en déterminera sa place géocentrique.



SUPPLEMENT A LA PIECE.

Ponderibus librata suis per inane profundum

Sidera , quò vis alma trahit retrahitque sequuntur.

PRES avoir calculé plusieurs observations
 A de Saturne selon les nouvelles Tables que je
 viens d'expliquer, j'ai trouvé pour la plupart
 un plus grand accord que je n'avois espéré;
 puisque je n'ai pas eu égard dans le calcul, à toutes les
 petites variations qui peuvent provenir du changement
 de la longitude moyenne & du lieu de l'aphélie. Je juge
 donc à propos d'ajouter ici plusieurs de ces calculs, pour
 confirmer davantage mes nouvelles Tables de Saturne:
 & comme la dernière équation — $Q'' \cos. (\omega - p)$ semble
 le plus embarrasser le calcul, j'ai trouvé moyen de m'en
 défaire tout-à-fait. Car ayant observé que cette équation
 obtient sa plus grande valeur à peu près quand l'équation
 du centre de Saturne est la plus grande, & que ces
 deux équations ons presque toujours le même rap-
 port entre elles, vû que — $\cos. (\omega - p)$ est environ égal à
 $\sin. q$; on pourra comprendre l'équation — $Q'' \cos. (\omega - p)$
 dans l'équation ordinaire du centre, dont celle-ci sera di-
 minuée; & puisque cette équation — $Q'' \cos. (\omega - p)$ va
 en croissant, & qu'après chaque siècle elle prend un ac-
 croissement de $1' 50''$, la plus grande équation du centre
 de Saturne ira en diminuant, & après chaque siècle elle
 deviendra plus petite de $1' 50''$: & dans un espace de dix
 ans, cette diminution fera de $11''$. M. Cassini supposant

donc constamment la plus grande équation du centre de Saturne de $6^{\circ} 31' 40''$, je trouve qu'en retranchant ladite équation pour l'année 1745, cette plus grande équation doit être supposée $6^{\circ} 29' 10''$, de sorte que pour cette année, la plus grande équation de M. Cassini doit être diminuée de $2' 30''$, & pour l'année 1700, il en faut soustraire $1' 40''$. Or pour l'année 1600, il y faut ajouter $0' 10''$, & pour l'année 1500 $2' 0''$. De même, on peut rendre la correction de la longitude moyenne des Tables de M. Cassini plus aisée. Car pour l'année 1700, il en faut retrancher $1' 53''$; or pour l'année 1600, il y faut ajouter $16' 27''$, & pour l'année 1500, on y doit ajouter $34' 47''$. Ces corrections sont représentées dans la Table qui suit de cinq en cinq ans.



CORRECTION

CORRECTION DES TABLES DE SATURNE

DE M. CASSINI.

An.	Long. moyen.	Eq. du Centr.	An.	Long. moyen.	Eq. du Centr.	An.	Long. moyen.	Eq. du Centr.
1500.	+ 34' 47"	+ 2' 0"	1600	+ 16' 27"	+ 0' 10"	1700	- 1' 53"	- 1' 40"
1505.	+ 33' 52	+ 1' 55	1605	+ 15' 32	+ 0' 5	1705	- 2' 48	- 1' 45
1510.	+ 32' 57	+ 1' 49	1610	+ 14' 37	- 0' 1	1710	- 3' 43	- 1' 51
1515.	+ 32' 2	+ 1' 44	1615	+ 13' 42	- 0' 6	1715	- 4' 38	- 1' 56
1520.	+ 31' 7	+ 1' 38	1620	+ 12' 47	- 0' 12	1720	- 5' 33	- 2' 2
1525.	+ 30' 12	+ 1' 33	1625	+ 11' 52	- 0' 17	1725	- 6' 28	- 2' 7
1530.	+ 29' 17	+ 1' 27	1630	+ 10' 57	- 0' 23	1730	- 7' 23	- 2' 13
1535.	+ 28' 22	+ 1' 22	1635	+ 10' 2	- 0' 28	1735	- 8' 18	- 2' 18
1540.	+ 27' 27	+ 1' 16	1640	+ 9' 7	- 0' 34	1740	- 9' 13	- 2' 24
1545.	+ 26' 32	+ 1' 11	1645	+ 8' 12	- 0' 39	1745	- 10' 8	- 2' 29
1550.	+ 25' 37	+ 1' 5	1650	+ 7' 17	- 0' 45	1750	- 11' 3	- 2' 35
1555.	+ 24' 42	+ 1' 0	1655	+ 6' 22	- 0' 50	1755	- 11' 58	- 2' 40
1560.	+ 23' 47	+ 0' 54	1660	+ 5' 27	- 0' 56	1760	- 12' 53	- 2' 46
1565.	+ 22' 52	+ 0' 49	1665	+ 4' 32	- 1' 1	1765	- 13' 48	- 2' 51
1570.	+ 21' 57	+ 0' 43	1670	+ 3' 37	- 1' 7	1770	- 14' 43	- 2' 57
1575.	+ 21' 2	+ 0' 38	1675	+ 2' 42	- 1' 12	1775	- 15' 38	- 3' 2
1580.	+ 20' 7	+ 0' 32	1680	+ 1' 47	- 1' 18	1780	- 16' 33	- 3' 8
1585.	+ 19' 12	+ 0' 27	1685	+ 0' 52	- 1' 23	1785	- 17' 28	- 3' 13
1590.	+ 18' 17	+ 0' 21	1690	- 0' 3	- 1' 29	1790	- 18' 23	- 3' 19
1595.	+ 17' 22	+ 0' 16	1695	- 0' 58	- 1' 34	1795	- 19' 18	- 3' 24
1600.	+ 16' 27	+ 0' 10	1700	- 1' 53	- 1' 40	1800	- 20' 13	- 3' 30

Or, à la longitude de l'aphélie, il faut constamment ajouter 28' 7".

Suivant ces élémens, je m'en vais faire le calcul pour plusieurs observations.

I. A. 1582. Août 20 ^h 23 ^h 12' Long. H. ... 11 ^s 7° 27' 47"				Eq. ... 11 ^s 11° 43'			
Long. moyen. H.	Lieu de l'Aphél.	Lieu du ☉		$\omega = 11^s 11^o 43'$			Eq.
11 ^s 13° 24' 22"	8 25 36 27	3 19 21		$2\omega = 10 23 24$	$\sin. 36 36$		+ 20"
+ 19 45	+ 28 7	11 7 28		$\omega - q = 8 27 2$	$\sin. 87 2$		+ 256
11 13 44 7	8 26 4 34	7 18 7		$\omega - p = 6 28 4$	$\sin. 2 46$		- 50
- 6 16 29	11 13 44 7	Réduet.					
11 7 27 38	2 17 39 33	- 1 38					
- 1 38	Eq. 6 15 56						
11 7 26 0	aj. 33						+ 226
+ 3 46	6 16 29						+ 3' 46"
11 7 29 46	Lieu calculé.	} Erreur + 1' 59".					
11 7 27 47	Lieu observé.						

Prix. 1748.

P

II. A. 1583. Sept. 21^h 40' Long. H... 11^s 19° 49' 30".

Long. moyenne.	Aphélie.	Nœud Ω.	$\omega = 0^s 3^m 29'$	
11 ^s 26° 3' 55"	8 25 37 48	3 19 22	$2\omega = 0 6 58$	+ fin. 6 58 — 4
+ 19 34	+ 28 7	11 19 49	$\omega - q = 9 6 8$	— fin. 83 52 + 255
II 26 23 29	8 26 5 55	8 0 27	$\omega - p = 6 17 6$	
— 6 31 15	11 26 23 29	Réd. — 1 25	$2\omega - p = 6 20 35$	— fin. 20 35 — 100
II 19 52 14	3 0 17 34			+ 151
— 1 25	Eq. 6 30 46			+ 2' 31"
II 19 50 49	+ 29			
+ 2 31	6 31 15			
II 19 53 20	Lieu calculé.	} Erreur + 3' 50"		
II 19 49 30	Lieu observé.			

III. A. 1584. Sept. 15^h 30' Long. H.... 0^s 2° 34' 0".

			$\omega = 0 25 18$	
0 8 44 25	8 25 39 9	3 19 13	$2\omega = 1 20 36$	+ fin. 50 36 + 247
+ 19 23	+ 28 27	0 2 34	$\omega - q = 9 15 26$	— fin. 74 34 — 151
0 9 3 48	8 26 7 16	8 13 21	$\omega - p = 6 5 55$	+ 71
— 6 27 24	0 9 3 48	Réd. — 56"	$2\omega - p = 7 1 13$	+ 1' 11"
0 2 36 24	3 12 56 32			
— 56	Eq. 6 26 57			
0 2 35 28	+ 27			
+ 1 11	6 27 24			
0 2 36 39	Lieu calculé.	} Erreur + 2' 39"		
0 2 34 0	Lieu observé.			

IV. A. 1586. Octob. 12^h 9^h 0' Long. H.... 0^s 29° 6' 5".

			$\omega = 2 5 26$	
I 4 6 6	8 25 41 50	3 19 25	$2\omega = 4 10 52$	+ fin. 49 8 — 24
+ 19 1	+ 28 7	0 29 6	$\omega - q = 9 29 42$	— fin. 60 18 + 222
I 4 25 7	8 26 9 57	9 9 41	$\omega - p = 5 11 16$	
— 5 21 28	1 4 25 7	Réd. + 35	$2\omega - p = 7 16 42$	— fin. 46 42 — 211
0 29 3 39	4 8 15 10			+ 13"
+ 35	Eq. 5 21 6			
0 29 4 14	+ 22			
— 13	5 21 28			
0 29 4 1	Lieu calculé.	} Erreur — 2' 4"		
0 29 6 5	Lieu observé.			

V. A. 1590. Déc. 6^h 19^h 40' H.... 2^s 25° 14' 0".

			$\omega = 4 7 28$	
2 24 53 53	8 25 47 12	3 19 30	$2\omega = 8 14 56$	— fin. 74 56 + 31
+ 18 17	+ 28 7	2 25 14	$\omega - q = 10 8 25$	— fin. 51 35 + 198
2 25 12 10	8 26 15 19	11 5 44	$\omega - p = 3 11 16$	
— 7 43	2 25 12 10	R. + 1 15	$2\omega - p = 7 18 44$	— fin. 48 44 — 218
2 25 4 27	5 28 56 51			+ 11"
+ 1 19	Eq. 0 7 43			
2 26 5 42	0			
+ 11	0 7 43			
2 25 5 53	Lieu calculé.	} Erreur — 8' 7"		
2 25 14 0	Lieu observé.			

Je crois qu'il s'est glissé dans cette Observation quelque erreur, puisque le calcul de l'année suivante montre clairement que l'erreur ne sauroit être si considérable.

VI. A. 1591. Déc. 20^h 22^h 14^h H... 3^s 9° 23' 4".

3 7 35 50	8 25 48 33	3 19 31	$\omega = 4 22 38$		
+ 18 6	+ 28 7	3 9 23	$2\omega = 9 15 16$	$-\sin.74 44$	+ 31
3 7 53 56	8 26 16 40	11 19 52	$\omega - q = 8 10 8$	$-\sin.70 4$	+ 240
+ 1 24 44	3 7 53 56	Réd. + 35	$\omega - p = 2 26 3$		
3 9 18 40	6 11 37 16		$2\omega - p = 7 18 4$	$-\sin.48 4$	- 218
+ 35	Eq. 1 24 42				+ 53
2 9 19 15	2				
+ 53	1 24 44				
3 9 20 8	Lieu calculé.	} Erreur = 2' 56".			
3 9 23 4	Lieu observé.				

VII. A. 1595. Janv. 30^h 23^h 0' H... 4^s 21° 15' 0".

4 15 41 6	8 25 52 33	3 19 33	$\omega = 6 17 18$		
+ 17 22	+ 28 7	4 21 15	$2\omega = 1 4 36$	$+\sin.34 36$	- 19
4 15 58 28	8 26 20 40	1 1 42	$\omega - q = 10 24 56$	$-\sin.35 4$	+ 146
+ 5 12 25	4 15 58 28	R. - 1 28	$\omega - p = 1 15 13$		
4 21 10 53	7 19 37 48		$2\omega - p = 8 2 31$	$-\sin.62 31$	- 259
- 1 28	Eq. 5 12 13				- 132
4 21 9 25	+ 12				- 2, 12
- 2 12	5 12 25				
4 21 7 13	Lieu calculé.	} Erreur = 7' 47".			
4 21 15 0	Lieu observé.				

VIII. A. 1598. Mars 10^h 23^h 0' H... 6^s 0° 33' 35".

5 23 42 17	8 25 56 36	3 19 36	$\omega = 8 20 12$		
+ 16 49	+ 28 7	6 0 34	$2\omega = 5 10 24$	$+\sin.19 6$	- 10
5 23 59 6	8 26 24 43	2 10 58	$\omega - q = 11 19 11$	$-\sin.10 49$	+ 48
+ 6 31 40	5 23 59 6	R. - 1 3	$\omega - p = 0 9 56$		
6 0 30 46	8 27 34 23		$2\omega - p = 2 0 8$	$-\sin.89 52$	- 297
- 1 3	Eq. 6 31 28				- 259
6 0 29 43	+ 12				- 4, 19
- 4 19	6 31 40				
6 0 25 24	Lieu calculé.	} Erreur = 8' 11".			
6 0 33 35	Lieu observé.				

IX. A. 1599. Mars 23^h 18^h 40' H... 6^s 13° 0' 0".

6 6 21 38	8 25 57 56	3 19 37	$\omega = 9 9 32$		
+ 16 38	+ 28 7	6 13 0	$2\omega = 6 19 4$	$-\sin.19 4$	+ 10
6 6 38 16	8 26 26 9	2 23 23	$\omega - q = 11 25 59$	$-\sin.4 1$	+ 18
+ 6 19 54	6 6 38 16	Réd. - 25	$\omega - p = 11 27 47$		
6 12 58 10	9 10 12 13		$2\omega - p = 9 7 19$	$-\sin.82 41$	- 290
- 25	Eq. 6 19 43				- 262
6 12 57 45	+ 11				- 4, 22
- 4 22	6 19 54				
6 12 53 23	Lieu calculé.	} Erreur = 6' 37".			
6 13 0 0	Lieu observé.				

Jusqu'ici ce sont des Observations de Tycho-Brahé, dans lesquelles on me pourra pardonner ces erreurs, qui n'excedent presque que de 8'. Je passerai donc à celles de Hevelius, de Flamsteed, & des Astronomes de l'Observatoire de Paris.

116 RECHERCHES DES INEGALITES

X. A. 1658. Avril 3^e 17^h 13' H... 6° 14' 35" 28".

6 8 15 36	8 27 14 30	3 20 34	$\omega = 8 29 21$	$\sin. 1 18$	— 1
+ 5 49	+ 28 7	6 14 35	$2\omega = 5 28 42$	+ $\sin. 14 49$	+ 65
6 8 21 25	8 27 42 37	2 24 1	$\omega - q = 11 15 11$	— $\sin. 86 21$	— 295
+ 6 18 8	6 8 21 25	Réd. — 22	$\omega - p = 11 27 0$	— 231	— 3, 51
6 14 3 33	9 10 38 48		$2\omega - p = 8 26 21$		
— 22	Eq. 6 18 59				
6 14 39 11	— 51				
— 3 51	6 18 8				
6 14 35 20	Lieu calculé.	} Erreur. — 0' 8".			
6 14 35 28	Lieu observé.				

XI. A. 1661. Mai 10^e 6^h 2' H... 7° 20' 22" 24".

7 16 11 49	8 27 18 32	3 20 36	$\omega = 10 21 53$	$\sin. 76 14$	+ 31
+ 5 16	+ 28 7	7 20 22	$2\omega = 9 13 46$	+ $\sin. 0 58$	— 4
7 16 17 5	8 27 46 39	3 29 46	$\omega - q = 0 0 58$	— $\sin. 79 49$	— 288
+ 4 5 29	7 16 17 5	R + 1 26	$\omega - p = 10 18 18$	— 261	— 4, 21
7 20 22 34	10 18 30 26		$2\omega - p = 9 10 11$		
+ 1 26	Eq. 4 6 4				
7 20 24 0	— 35				
— 4 21	4 5 29				
7 20 19 39	Lieu calculé.	} Erreur — 2' 45".			
7 20 22 24	Lieu observé.				

XII. A. 1665. Juin 26^e 15^h 23' H... 9° 5' 43" 51".

9 6 43 26	8 27 23 54	3 20 40	$\omega = 1 7 48$	$\sin. 75 36$	— 31
+ 4 32	+ 28 7	9 5 44	$2\omega = 2 15 36$	+ $\sin. 28 58$	— 124
9 6 47 58	8 27 52 1	5 15 4	$\omega - q = 0 28 58$	— $\sin. 51 17$	— 227
— 0 56 39	9 6 47 58	Réd. + 51	$\omega - p = 9 0 55$	— 382	— 6' 22"
9 5 51 19	0 8 55 57		$2\omega - p = 10 8 43$		
+ 51	Eq. 0 56 47				
9 5 52 10	— 8				
— 6 22	0 56 39				
9 5 45 48	Lieu calculé.	} Erreur + 1' 57".			
9 5 43 51	Lieu observé.				

XIII. A. 1670. Août 27^e 7^h 20' H... 11° 3' 44" 11".

11 9 57 21	8 27 30 37	3 20 45	$\omega = 4 26 23$	$\sin. 67 74$	+ 29
+ 3 37	+ 28 7	11 3 44	$2\omega = 9 22 46$	+ $\sin. 77 0$	— 250
11 10 0 58	8 27 58 44	7 12 59	$\omega - q = 2 17 0$	+ $\sin. 4 13$	+ 20
— 6 2 39	11 10 0 58	R. — 1 38	$\omega - p = 7 7 50$	— 201	— 3, 21
11 3 58 19	2 12 2 14		$2\omega - p = 0 4 13$		
— 1 38	Eq. 6 3 41				
11 3 56 41	— 1 2				
— 3 21	6 2 39				
11 3 53 20	Lieu calculé.	} Erreur. + 9' 9".			
11 3 44 11	Lieu observé.				

XIV.

XIV. A. 1671. Sept. 8j 8^h 56' H... 11^s 16° 5' 0".

11 22 35 12	8 27 31 58	3 20 46	$\omega = 5$ 13 46		
+ 3 26	+ 28 7	11 16 5	$2\omega = 10$ 27 32	- <i>sin.</i> 32 28	+ 17
11 22 38 38	8 28 0 5	7 25 19	$\omega - q = 2$ 21 56	+ <i>sin.</i> 81 56	- 254
- 6 25 16	11 22 38 38	R. - 1 34	$\omega - p = 6$ 24 42		
11 16 13 22	2 24 38 33		$2\omega - p = 0$ 8 28	+ <i>sin.</i> 8 28	+ 40
- 1 34	Eq. 6 26 22				- 197
11 16 11 48	- 1 6				- 3 17
- 3 17					
11 16 8 31	Lieu calculé.	} Erreur + 3' 31".			
11 16 5 0	Lieu observé.				

Ce qui me fait croire que dans l'Observation précédente il s'est glissé une faute, vu que la différence des erreurs ne sauroit être si considérable, quelque loi que suive Saturne dans son mouvement.

XV. A. 1674. Octob. 17j 12^h 0' H... 0^s 24° 52' 40".

1 0 36 37	8 27 36 0	3 20 48	$\omega = 7$ 1 34		
+ 2 53	+ 28 7	0 24 53	$2\omega = 2$ 3 8	+ <i>sin.</i> 63 8	- 28
1 0 39 30	8 28 4 7	9 4 5	$\omega - q = 3$ 1 24	+ <i>sin.</i> 88 36	- 257
- 5 41 28	1 0 39 30	Réd. + 15	$\omega - p = 5$ 12 5		
0 24 58 2	4 2 34 23		$2\omega - p = 0$ 13 39	+ <i>sin.</i> 13 39	+ 66
+ 15	Eq. 5 42 30				- 219
0 24 58 17	- 1 2				- 3 39
- 3 39	5 41 28				
0 24 54 38	Lieu calculé.	} Erreur + 1' 58".			
0 24 52 40	Lieu observé.				

XVI. A. 1678. Déc. 11j 16^h 13' H... 2^s 20° 38' 12".

2 21 23 53	8 27 41 22	3 20 52	$\omega = 9$ 15 45		
+ 2 9	+ 28 7	2 20 38	$2\omega = 7$ 1 30	- <i>sin.</i> 31 30	+ 17
2 21 26 2	8 28 9 29	10 29 46	$\omega - q = 3$ 22 26	+ <i>sin.</i> 67 34	- 235
- 0 49 10	2 21 26 2	R. + 1 28	$\omega - p = 3$ 18 20		
2 20 36 52	5 23 16 33		$2\omega - p = 1$ 4 5	+ <i>sin.</i> 34 5	+ 164
+ 1 28	Eq. 0 49 19				- 54
2 20 38 20	- 9				
- 54					
2 20 37 26	Lieu calculé.	} Erreur - 0' 46".			
2 20 38 12	Lieu observé.				

XVII. A. 1682. Janv. 22j 3^h 20' H... 4^s 3° 9' 15".

3 29 30 0	8 27 45 23	3 20 56	$\omega = 11$ 13 34		
+ 1 25	+ 28 7	4 3 9	$2\omega = 10$ 27 8	- <i>sin.</i> 32 52	+ 18
3 29 31 25	8 28 13 30	0 12 13	$\omega - q = 4$ 10 2	+ <i>sin.</i> 49 58	- 196
+ 3 35 37	3 29 31 25	Réd. - 43	$\omega - p = 2$ 8 45		
4 3 7 2	7 1 17 55		$2\omega - p = 1$ 22 19	+ <i>sin.</i> 52 19	+ 231
- 43	Eq. 3 36 21				+ 53
4 3 6 19	- 44				
+ 53					
4 3 7 12	Lieu calculé.	} Erreur - 2' 3".			
4 3 9 15	Lieu observé.				

Prix. 1748.

Q

XVIII. A. 1686. Mars 16^j 10^h 28' $\bar{H} \dots 5^s 26^o 47' 10''$

5 20 13 30	8 27 50 47	3 21 1	$\omega = 1 17 4$	$+ \sin. 85 52$	$- 32$
+ 0 41	+ 28 7	5 26 47	$2\omega = 3 4 8$	$+ \sin. 38 34$	$- 158$
5 20 14 11	8 28 18 54	2 5 46	$\omega - q = 4 21 26$	$+ \sin. 57 52$	$+ 245$
+ 6 29 19	5 20 14 11	R. - 1 15	$\omega - p = 0 10 48$		$+ 55$
5 26 43 30	8 21 55 17		$2\omega - p = 1 27 52$		
- 1 15	Eq. 6 30 42				
5 26 42 15	- 1 23				
+ 55					
5 26 43 10	Lieu calculé.	} Erreur = 4' 0".			
5 26 47 10	Lieu observé.				

XIX. A. 1690. Mai 5^j 7^h 0' $\bar{H} \dots 7^s 15^o 34' 0''$

7 10 50 5	8 27 56 8	3 21 4	$\omega = 4 5 27$	$- \sin. 70 54$	$+ 30$
- 0 3	+ 28 7	7 15 34	$2\omega = 8 10 54$	$+ \sin. 9 43$	$- 43$
7 10 50 2	8 28 24 15	3 24 30	$\omega - q = 5 20 17$	$+ \sin. 88 20$	$+ 297$
+ 4 34 20	7 10 50 2	R. + 1 15	$\omega - p = 10 22 53$		$+ 284$
7 15 24 22	10 12 25 47		$2\omega - p = 2 28 20$		$+ 4' 44''$
+ 1 15	Eq. 4 35 23				
7 15 25 37	- 1 3				
+ 4 44					
7 15 30 21	Lieu calculé.	} Erreur = 3' 39".			
7 15 34 0	Lieu observé.				

XX. A. 1695. Juil. 3^j 23^h 40' $\bar{H} \dots 9^s 12^o 29' 40''$

9 14 0 2	8 28 2 48	3 21 8	$\omega = 7 20 21$	$+ \sin. 79 18$	$- 32$
- 0 58	+ 28 7	9 12 30	$2\omega = 3 10 42$	$+ \sin. 35 14$	$+ 147$
9 13 59 4	8 28 30 55	5 21 22	$\omega - q = 7 5 14$	$+ \sin. 41 5$	$+ 198$
- 1 37 17	9 13 59 4	Réd. + 30	$\omega - p = 8 28 34$		$+ 314$
9 12 21 47	0 15 28 9		$2\omega - p = 4 18 55$		$+ 5' 14''$
+ 30	Eq. 1 37 40				
9 12 22 17	- 23				
+ 5 14					
9 12 27 31	Lieu calculé.	} Erreur = 2' 9".			
9 12 29 40	Lieu observé.				

XXI. A. 1698. Août 8^j 19^h 0' $\bar{H} \dots 10^s 16^o 58' 40''$

10 21 54 47	8 28 6 51	3 21 11	$\omega = 9 12 15$	$- \sin. 24 30$	$+ 14$
- 1 31	+ 28 7	10 16 59	$2\omega = 6 24 30$	$+ \sin. 51 0$	$+ 199$
10 21 53 16	8 28 34 58	6 25 48	$\omega - q = 7 21 0$	$+ \sin. 27 28$	$+ 133$
- 4 59 25	10 21 53 16	R. - 1 16	$\omega - p = 7 20 17$		$+ 346$
10 16 53 51	1 23 18 18		$2\omega - p = 5 2 32$		$+ 5 46$
- 1 16	Eq. 5 0 39				
10 16 52 39	- 1 14				
+ 5 46	4 59 25				
10 16 58 21	Lieu calculé.	} Erreur = 0' 19".			
10 16 58 40	Lieu observé.				

XXII. A. 1701. Sept. 16^e 2^h 0'

H... 11° 23' 21" 20".

11 29 52 32	8 28 10 53	3 21 15	$\omega = 11 11 21$	
— 2 4	+ 28 7	11 23 21	$2\omega = 10 22 42$	— $\sin. 37 18$ + 20
11 29 50 28	8 28 39 0	8 2 6	$\omega - q = 8 12 55$	— $\sin. 72 55$ + 241
— 6 29 28	11 29 50 28	R. — 1 22	$\omega - p = 6 14 21$	
11 23 21 0	3 1 11 28		$2\omega - p = 5 25 42$	+ $\sin. 4 18$ + 18
— 1 12	Eq. 6 31 8			+ 279
11 23 19 38	— 1 40			+ 4, 39
+ 4 39				
11 23 24 17	Lieu calculé.	} Erreur. + 2' 57".		
11 23 21 20	Lieu observé.			

XXIII. A. 1704. Octob. 25^e 12^h 0'

H... 1° 2° 36' 40".

1 7 54 33	8 28 14 54	3 21 19	$\omega = 1 14 32$	
— 2 37	+ 28 7	1 2 37	$2\omega = 2 29 4$	+ $\sin. 89 4$ — 32
1 7 51 56	8 28 43 1	9 11 18	$\omega - q = 9 7 30$	— $\sin. 82 30$ + 254
— 5 16 39	1 7 51 56	R. + 0 38	$\omega - p = 5 9 25$	
1 2 35 17	4 9 8 55		$2\omega - p = 6 23 57$	— $\sin. 23 57$ — 119
+ 38	Eq. 5 17 23			+ 103
1 2 35 55	— 44			+ 1, 43
+ 1 43				
1 2 37 38	Lieu calculé.	} Erreur + 0' 55".		
1 2 36 40	Lieu observé.			

XXIV. A. 1706. Novemb. 22^e 10^h 37'

H... 2° 0° 16' 23".

2 3 17 53	8 28 17 36	3 21 21	$\omega = 2 19 9$	
— 2 59	+ 28 7	2 0 16	$2\omega = 5 8 18$	+ $\sin. 21 42$ — 12
2 3 14 54	8 28 45 43	10 8 55	$\omega - q = 9 15 37$	— $\sin. 74 23$ + 247
— 2 59 18	2 3 14 54	R. + 1 36	$\omega - p = 4 11 22$	
2 0 15 36	5 4 29 11		$2\omega - p = 7 0 31$	— $\sin. 30 31$ — 147
+ 1 36	Eq. 3 0 7			+ 88
2 0 17 12	— 49			+ 1 28
+ 1 28				
2 0 18 40	Lieu calculé.	} Erreur + 2' 17".		
2 0 16 23	Lieu observé.			

XXV. A. 1708. Décemb. 19^e 19^h 26'

H... 2° 28° 37' 11".

2 28 42 4	8 28 20 18	3 21 22	$\omega = 3 18 49$	
— 3 32	+ 28 7	2 28 37	$2\omega = 7 7 38$	— $\sin. 37 38$ + 20
2 28 38 32	8 28 48 25	11 7 15	$\omega - q = 9 18 26$	— $\sin. 71 34$ + 242
— 1 13	2 28 38 32	R. + 1 11	$\omega - p = 3 10 34$	
2 28 37 19	5 29 50 7		$2\omega - p = 6 29 23$	— $\sin. 29 23$ — 147
+ 1 11	Eq. 0 1 13			+ 115
2 28 38 30	— 0			+ 1, 55
+ 1 55				
2 28 40 25	Lieu calculé.	} Erreur. + 3' 14".		
2 28 37 11	Lieu observé.			

XXVI. A. 1711. Janv. 17ⁱ 1^h 4'H... 3^s 26° 54' 36".

3 24 6 0	8 28 22 58	3 21 24	$\omega = 4 19 13$	$\sin. 81 34$	+	32
- 3 54	+ 28 7	3 26 55	$2\omega = 9 8 26$	$\sin. 68 1$	+	237
3 24 2 6	8 28 51 5	0 5 31	$\omega - q = 9 21 59$			
+ 2 57 7	3 24 2 6	Réd. - 21	$\omega - p = 2 10 9$	$\sin. 29 22$	-	147
3 26 59 13	6 25 11 1		$2\omega - p = 6 29 22$			
- 21	Eq. 2 57 58					
3 26 58 52	- 51					
+ 2 2						
3 27 0 54	Lieu calculé.	} Erreur + 6' 18".				
3 26 54 36	Lieu observé.					

Puisque cette erreur est si grande, j'examinerai l'Observation suivante.

XXVII. A. 1712. Janv. 31ⁱ 0^h 6'H... 4^s 10° 51' 12".

4 6 47 39	8 28 24 19	3 29 25	$\omega = 5 6 27$	$\sin. 47 6$	+	24
- 4 5	+ 28 7	4 10 51	$2\omega = 10 12 54$	$\sin. 64 5$	+	230
4 6 43 34	8 28 52 26	0 18 26	$\omega - q = 9 25 55$			
+ 4 13 0	4 6 43 34	R. - 1 3	$\omega - p = 1 26 4$	$\sin. 32 31$	-	155
4 10 56 34	7 7 51 8		$2\omega - p = 7 2 31$			
- 1 3	Eq. 4 14 13					
4 10 55 31	- 1 13					
+ 1 39						
4 10 57 10	Lieu calculé.	} Erreur + 5' 58".				
4 10 51 12	Lieu observé.					

XXVIII. A. 1716. Mars 23ⁱ 19^h 4'H... 6^s 3° 48' 1".

5 27 30 7	8 28 29 43	3 21 29	$\omega = 7 28 55$	$\sin. 62 10$	-	28
- 4 49	+ 28 7	6 3 48	$2\omega = 3 27 50$	$\sin. 33 21$	+	140
5 27 25 18	8 28 57 50	2 12 19	$\omega - q = 10 26 39$			
+ 6 29 20	5 27 25 18	R. - 0 57	$\omega - p = 0 7 52$	$\sin. 66 47$	-	270
6 3 54 38	8 28 27 28		$2\omega - p = 8 6 47$			
- 0 57	Eq. 6 31 16					
6 3 53 41	- 1 56					
- 2 38						
6 3 51 3	Lieu calculé.	} Erreur + 3' 2".				
6 3 48 1	Lieu observé.					

XXIX. A. 1719. Avril 30ⁱ 20^h 15'H... 7^s 10° 17' 42".

7 5 27 22	8 28 33 44	3 21 32	$\omega = 9 25 28$	$\sin. 50 56$	+	25
- 5 22	+ 28 7	7 10 18	$2\omega = 7 20 56$	$\sin. 13 56$	+	62
7 5 22 0	8 29 1 51	3 18 46	$\omega - q = 11 16 4$			
+ 5 0 40	7 5 22 0	R. + 1 2	$\omega - p = 11 0 52$	$\sin. 86 20$	-	295
7 10 22 40	10 6 20 9		$2\omega - p = 8 26 20$			
+ 1 2	Eq. 5 2 12					
7 10 20 42	- 1 32					
- 3 28						
7 10 20 14	Lieu calculé.	} Erreur + 2' 32".				
7 10 17 42	Lieu observé.					

XXX.

XXX. A. 1723. Juin 17ⁱ 15^h 53' $\bar{h} \dots 8^{\circ} 26' 12'' 6''$.

8 25 59 51	8 28 39 5	3 21 35	$\omega = 0 6 25$		
— 6 8	+ 28 7	8 26 12	$2\omega = 0 12 50$	+ $\sin. 12 50$	— 7
8 25 53 43	8 29 7 12	5 4 37	$\omega - q = 0 8 56$	+ $\sin. 8 56$	— 40
— 0 20 27	8 25 53 43	R. + 1 17	$\omega - p = 9 10 47$		
8 26 14 10	11 26 46 31		$2\omega - p = 9 17 12$	— $\sin. 72 48$	— 279
+ 1 17	Eq. 0 20 33				— 326
8 26 15 27	— 6				— 5' 26''
— 5 26					
8 26 10 1	Lieu calculé.	} Erreur. — 2' 5''.			
8 26 12 6	Lieu observé.				

XXXI. A. 1726. Juil. 23ⁱ 1^h 42' $\bar{h} \dots 10^{\circ} 0' 13' 33''$.

10 3 53 48	8 28 43 6	3 21 38	$\omega = 2 12 9$		
— 6 39	+ 28 7	10 0 14	$2\omega = 4 24 18$	+ $\sin. 35 42$	— 19
10 3 47 9	8 29 11 13	6 8 36	$\omega - q = 1 8 45$	+ $\sin. 38 45$	— 161
— 3 28 42	10 3 47 9	R. — 0 31	$\omega - p = 8 9 39$		
10 0 18 27	1 4 35 56		$2\omega - p = 10 21 48$	— $\sin. 38 12$	— 181
— 31	Eq. 3 29 47				— 361
10 0 17 56	— 1 5				— 6' 1''
— 6 1					
10 0 11 55	Lieu calculé.	} Erreur — 1' 38''.			
10 0 13 33	Lieu observé.				

XXXII. A. 1728. Août 15ⁱ 22^h 50' $\bar{h} \dots 10^{\circ} 23' 36' 50''$.

10 29 11 2	8 28 45 48	3 21 40	$\omega = 3 26 29$		
— 7 1	+ 28 7	10 23 37	$2\omega = 7 22 58$	— $\sin. 52 58$	+ 26
10 29 4 1	8 29 13 55	7 1 57	$\omega - q = 1 28 48$	+ $\sin. 58 48$	— 219
— 5 24 28	10 29 4 1	R. — 1 29	$\omega - p = 7 17 47$		
10 23 39 33	1 29 50 6		$2\omega - p = 11 14 16$	— $\sin. 15 44$	— 76
— 1 29	Eq. 5 26 17				— 269
10 23 38 4	— 1 49				— 4' 29''
— 4 29					
10 23 33 35	Lieu calculé.	} Erreur — 3' 15''.			
10 23 36 50	Lieu observé.				

XXXIII. A. 1731. Septemb. 23ⁱ 15^h 51' $\bar{h} \dots 0^{\circ} 0' 30' 50''$.

0 7 9 34	8 28 49 51	3 22 25	$\omega = 5 20 27$		
— 7 34	+ 28 7	0 0 31	$2\omega = 11 10 54$	— $\sin. 19 6$	+ 10
0 7 2 0	8 29 17 58	8 8 6	$\omega - q = 2 15 23$	+ $\sin. 75 23$	— 248
— 6 28 37	0 7 2 0	R. — 1 9	$\omega - p = 6 10 13$		
0 0 33 23	3 7 44 2		$2\omega - p = 0 0 40$	+ $\sin. 0 40$	+ 4
— 1 9	Eq. 6 30 50				— 234
0 0 32 14	— 2 13				— 3' 54"
— 3 54					
0 0 28 20	Lieu calculé.	} Erreur. — 2' 30".			
0 0 30 50	Lieu observé.				
Prix. 1748.					

R

XXXIV. A. 1737. Décemb. 14^e 11^h 57'

H... 2° 22' 28" 4".

2 23 19 38	8 28 57 56	3 21 51	$\omega = 9 \ 7 \ 24$	$2\omega = 6 \ 14 \ 48$	$-\sin.14 \ 48$	$+$	8
— 8 40	+ 28 7	2 22 28					
2 23 10 58	8 29 26 3	11 0 37	$\omega - q = 3 \ 14 \ 2$	$+$	$\sin.75 \ 58$	$+$	249
— 0 44 58	2 23 10 58	R. + 1 24	$\omega - p = 3 \ 17 \ 9$	$+$	$\sin.24 \ 33$	$+$	121
2 22 26 0	5 23 44 55		$2\omega - p = 0 \ 24 \ 33$	$+$		$+$	120
+ 1 24	Eq. 0 45 14						— 2' 0"
2 21 27 24	— 16						
— 2 0							
2 22 25 24	Lieu calculé.	} Erreur — 2' 40".					
2 22 28 4	Lieu observé.						

XXXV. A. 1738. Décemb. 24^e 12^h 17'

H.... 3° 6' 33" 8".

3 5 53 20	8 28 59 16	3 21 52	$\omega = 9 \ 27 \ 34$	$2\omega = 7 \ 25 \ 8$	$-\sin.55 \ 8$	$+$	26
— 9 0	+ 28 7	3 6 33					
3 5 44 20	8 29 27 23	11 14 41	$\omega - q = 3 \ 20 \ 54$	$+$	$\sin.69 \ 6$	$+$	240
+ 0 45 48	3 5 44 20	R. + 0 52	$\omega - p = 3 \ 4 \ 37$	$+$	$\sin.32 \ 11$	$+$	155
3 6 30 8	6 6 16 57		$2\omega - p = 1 \ 2 \ 11$	$+$		$+$	59
+ 52	Eq. 0 46 5						
3 6 31 0	— 17						
— 59							
3 6 30 1	Lieu calculé.	} Erreur — 3' 7".					
3 6 33 8	Lieu observé.						

XXXVI. A. 1745. Mars 18^e 10^h 40'

H.... 5° 28' 26" 10".

5 22 7 37	8 29 7 18	3 21 58	$\omega = 1 \ 7 \ 43$	$2\omega = 2 \ 15 \ 26$	$+\sin.75 \ 26$	$+$	31
— 10 8	+ 28 7	5 28 26					
5 21 57 29	8 29 35 25	2 6 28	$\omega - q = 4 \ 11 \ 27$	$+$	$\sin.48 \ 33$	$+$	190
+ 6 28 25	5 21 57 29	R. — 1 13	$\omega - p = 0 \ 10 \ 29$	$+$	$\sin.48 \ 12$	$+$	218
5 28 25 54	9 22 22 4		$2\omega - p = 1 \ 18 \ 12$	$+$		$+$	3
— 1 13	Eq. 6 30 54						
5 28 24 41	— 2 29						
— 3	6 28 25						
5 28 24 38	Lieu calculé.	} Erreur — 1' 32".					
5 28 26 10	Lieu observé.						

Ces Observations réduites au calcul, me paroissent suffisantes pour prouver la préférence de mes Tables de Saturne sur celles dont on s'est servi jusqu'ici; vu que dans les miennes l'erreur ne surpasse que fort rarement 5'; & il est probable que dans ces cas mêmes, une bonne partie en doit être attribuée aux Observations : au lieu que les autres Tables s'écartent souvent des Observations jusqu'à 20' & au-delà. Mais outre cela, je

remarque une certaine régularité dans les erreurs ; car

depuis 1582 jusqu'à 1585 elles sont affirmatives.

Depuis 1585 jusqu'à 1599 elles sont négatives.

Depuis 1665 jusqu'à 1675 elles sont affirmatives.

Depuis 1678 jusqu'à 1701 elles sont négatives.

Depuis 1701 jusqu'à 1720 elles sont affirmatives.

Depuis 1720 jusqu'à 1745 elles sont négatives.

Ainsi j'espère qu'avec le tems, quand on aura plusieurs Observations assez exactes, on sera en état de délivrer encore les Tables de ces petites erreurs, & qu'on en pourra assigner la cause véritable. Au reste, il faut remarquer que les momens des oppositions de ♄ & ♅ ont été conclus de plusieurs Observations, dont les erreurs inévitables, & principalement les trop grands intervalles de tems qu'on a probablement souvent été obligé d'employer, doivent nécessairement rendre cette détermination moins certaine ; de sorte que la plus grande partie des erreurs de mes Tables tombera vraisemblablement sur les Observations mêmes.

F I N.

Fig. 1.

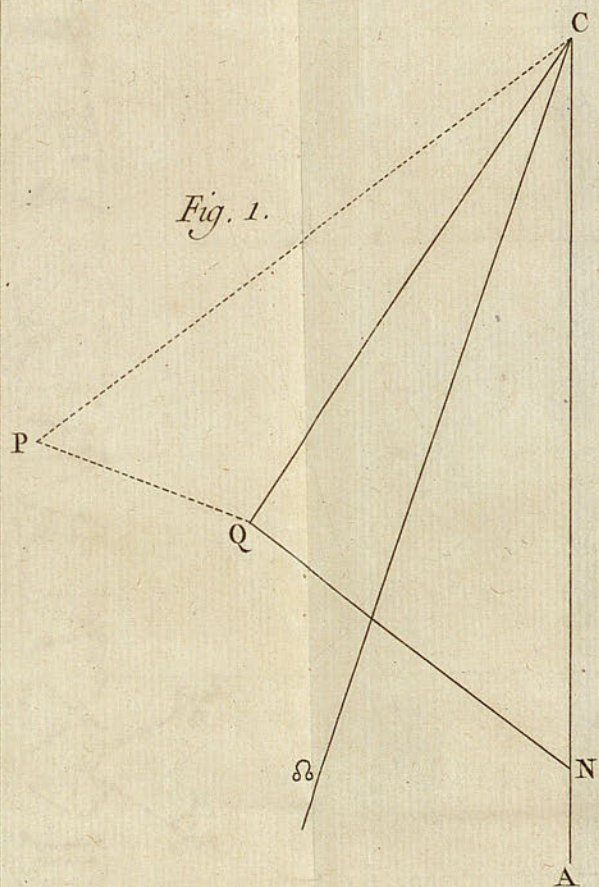


Fig. 2.

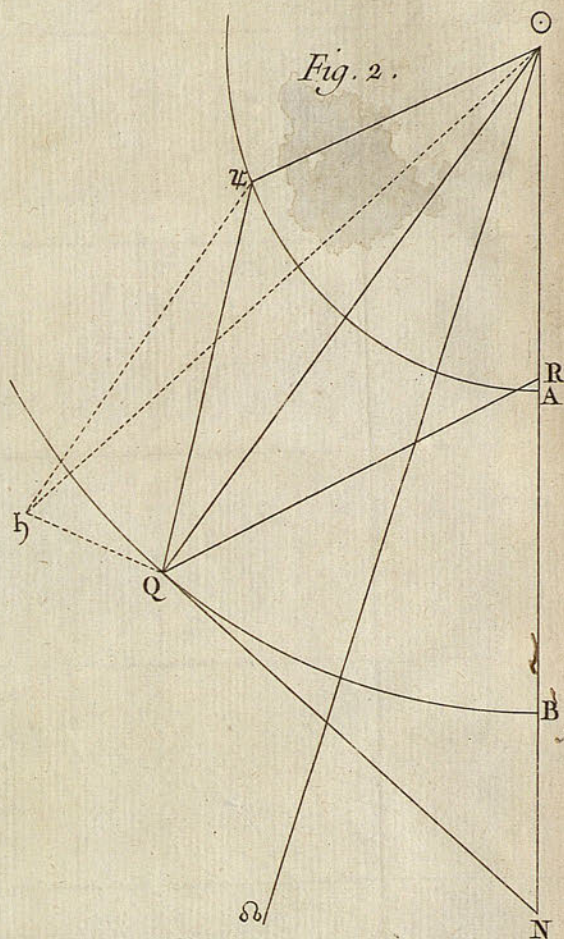
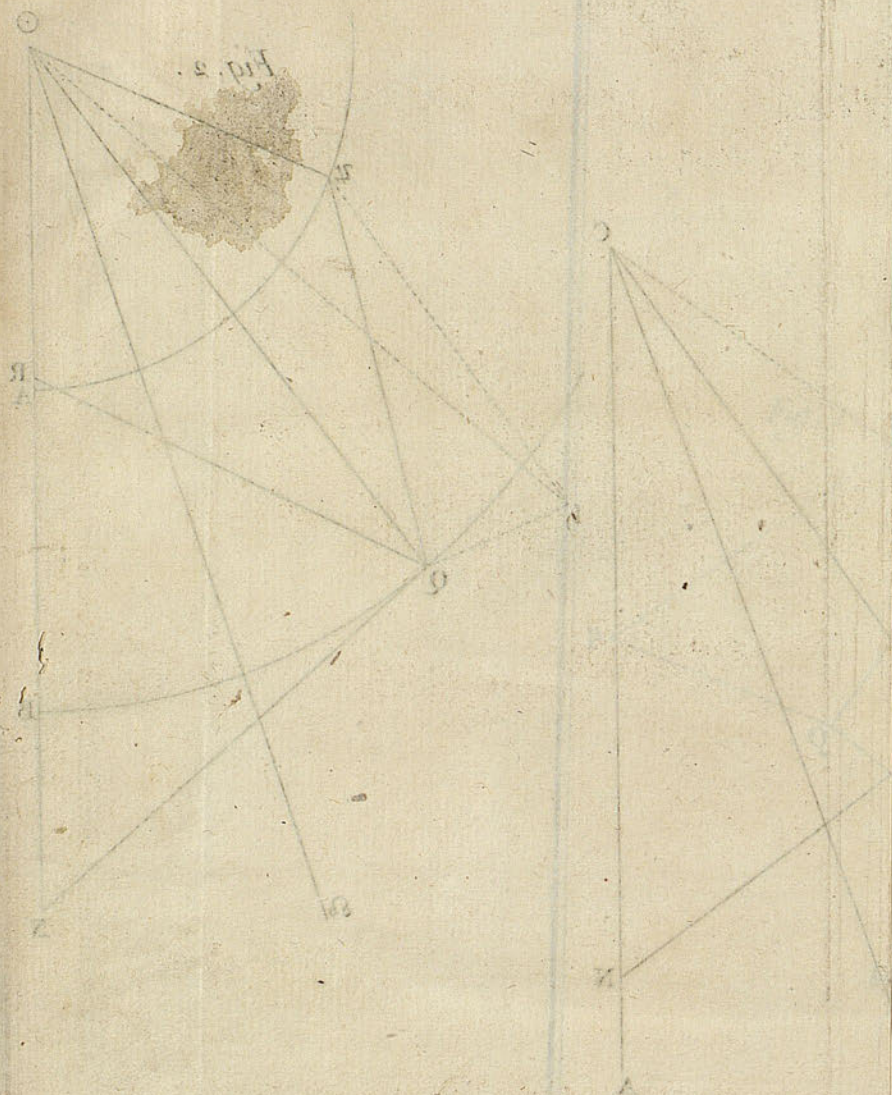


Fig. 2.





A 077(240)/123

UNIVERSIDAD DE SEVILLA



600157728

i 24670418





P R I X
D E
L A C A D E M

7 M D C C L I I I
T O M V I
7 M D C C L I I I

